

# 접촉강성을 고려한 차륜-레일계의 연성진동해석

## A Coupled Vibration Analysis of Railway Track System with Consideration of Contact Stiffness

류윤선<sup>1</sup>, 조희복<sup>1</sup>, 김사수<sup>2</sup>  
Yunseon RYU, Heebock CHO, Sasoo KIM

Key Words : Coupled Vibration, Hertzian Contact Spring, Corrugation

### Abstract

Corrugation of railway track can be caused by the various dynamic behaviors of traveling wheels and track. In this paper, the coupled vibrations of traveling wheel and railway track are analyzed as the cause of corrugations. To analyze the coupled vibration, the track supported by the sleepers and the traveling wheels are identified to the elastically supported infinite beam and the spring-mass system which runs at constant speed. The Hertzian contact spring is considered between the infinite beam and spring-mass system. The dynamic responses of elastically supported infinite beam and spring-mass system are calculated. The cause and development of rail corrugation are discussed in the view point of contact force fluctuation affected by the elastic supports and the corrugated surface profile on the track. By the obtained results, the possibilities of resonance are checked between the excitation by the corrugated surface profile and the natural frequency of contact spring-mass system. It may be thought to a development of railway corrugation.

### 1. 머릿말

철도에서 레일 표면에 발생하는 파상마모(波狀摩耗)는, 레일의 표면에 압흔이 규칙적으로 발생하는 현상으로서, **Corrugation** 이라고도 불리운다. 파상마모는 철도 시스템에 소음과 진동 문제를 일으키며, 보수 관리에 드는 비용의 증대를 초래한다는 점 뿐만 아니라, 철도가 고속화 될 경우에 안전성에도 심각한 문제를 야기하므로, 가능한 한 회피해야 할 문제로 보여진다.

파상마모의 발생 및 성장 기구에 대해서는 아직까지 명확히 밝혀지지 않았지만, 차륜이 주행할 때 차륜과 레일 사이에서 발생하는 진동에 의한 차륜-레일간의 접촉력변동과 밀접한 관계가 있는 것으로 알려져 있다. 그러나, 차륜과 레일로 구성되는 진동계는, 이동하는 집중 질량계와 연속체와의 연성진동인 점과<sup>(1)</sup>, 차륜과 레일의 접촉부에 있어서는 마모에 의한 소성변형의 고려가 필요한 점 등 때문에 해석하기에 매우 복잡하다.

이러한 종류의 진동 해석으로서, 스다<sup>(2)</sup>는 1985년 파상마모의 발생 및 성장에 관하여,

1 자유도계에서의 원통 접촉에 대한 이론적인 검토와 실험을 한 바 있다. 또, **Grassie**<sup>(3)</sup> 등은 1980년, 레일을 무한보로 가정하고, 그 위를 외력이 통과하는 경우에 대해서 레일의 탄성지지에 의한 접촉력의 변동에 대한 연구를 발표했다. **Clark**<sup>(4)</sup> 등은 1992년, 실측에 의해서 그 접촉력의 변동을 확인했고, **Duffy**<sup>(5)</sup>는 1992년, 무한보 위를 정현가진력이 통과하는 경우에 대해서 해석적인 연구를 발표했다.

본 연구는, 파상마모의 발생 및 성장 기구를 규명하기 위해서 기본적인 검토를 한다는 목적으로, **Hertz** 접촉 스프링을 고려하여 레일과 차륜으로부터 모델화된 계에서 발생하는 상하방향의 연성진동 문제를 취급하고, 차륜과 레일의 접촉부에서 발생하는 접촉력 변동에 대해서 해석한다.

레일 위의 파상마모의 발생 및 성장과정에 대해서, 그 기구를 규명하기 위해서는, 소성 변형이나 차륜이 반복해서 레일을 통과하는 것 등을 고려하지 않으면 안된다고 생각하지만, 여기서는 차륜의 관성력과 레일의 표면 형상에 주목하여, 여기에 기인하는 접촉력의

\*1: 현대자동차 선형연구실

\*2: 부산대학교 조선해양공학과

변동에 대해서 검토한다.

## 2. 해석 모델과 운동 방정식

### 2.1 해석 모델

철로받침목에 지지 되어 있는 레일을 Fig.1 과 같이, 탄성지지된 무한보로 모델링 한다. 보는 일정 단면으로 자중에 의한 영향을 무시하며, 굽힘 강성  $EI$ , 단위길이당 질량  $\rho A$ , 일정한 간격으로 강성  $k_s$ 의 탄성지지스프링에 의해 지지 되어 있다고 본다. 보의 무부하시의 상태에서부터 연직하방향의 처짐을  $U(x, t)$ 로한다. 여기서,  $x$ 는 보의 축방향 좌표,  $t$ 는 시간이다. 그림 1에서, 이동질량은 일정 속도  $V$ 로 이동하며,  $m$ 은 이동질량의 질량,  $k_w$ 는 보와 이동질량 사이에 고려하는 선형 접촉스프링계수,  $y(t)$ 는 이동질량의 변위를 나타내고 있다. 또,  $k_w$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k_w = (2/\eta)(2E^{*2}R_a P_0)^{1/3}$$

여기서,  $E^{*2} = E^2/(1-\nu^2)$ ,  $E$ 는 보의 종탄성계수,  $P_0$ 는 접촉부의 정적 하중,  $R_a$ 는 접촉부의 유효 곡률반경,  $\eta$ 는  $R_a$ 로서 결정되는 무차원계수,  $\nu$ 는 Poisson 비이다.

### 2.2 운동 방정식

Fig.1 에서 보인 계의 연성진동 방정식은 아래와 같다.

$$EI \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + k_s U(x, t) = P(x, t) \quad (1)$$

여기서,

$$P(x, t) = \left\{ mg + k_w R(x) - m \frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} \right\} \times \delta(x - Vt) \quad (2)$$

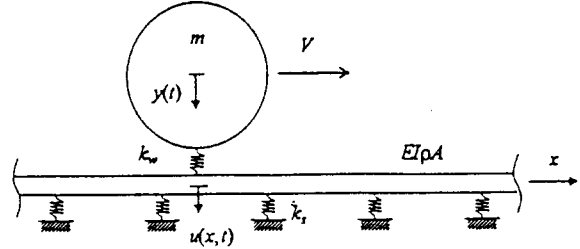


Fig.1 Analytical model and coordinate system

$$R(x) = a \cos 2\pi \frac{x}{l_a} \quad (3)$$

$R(x)$ 는 철로 표면에 발생된 파상마모를 나타내는 형상 함수로서,  $a$ 는 파상마모의 깊이,  $l_a$ 는 파상마모의 파장이다.

(1),(2)식을 무차원화하기 위해서, 시간의 대표 값으로서는 보의 단위 길이에 대한 기본고유주기  $1/\omega_0$ 를 사용하고, 길이의 대표 값은 정적 상태에서의 보의 최대처짐량  $\varphi_{st}$ 을 이용하면,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $U^* = U/\varphi_{st}$ ,  $Y^* = y/\varphi_{st}$ 로 되는 무차원량을 도입한다. 또, 파수  $\lambda = (k_s/4EI)^{1/4}$ 를 이용하여,  $\xi = \lambda x$ 로 되는 좌표계로 변환하여 정리하면 (1),(2)식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^4 U(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + \alpha^2 U(\xi, \tau) = P(\xi, \tau) \quad (4)$$

여기서,

$$P(\xi, \tau) = \delta(\xi - U\tau) \cdot \left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \cos \kappa\tau - \mu \left( \frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2U \frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} + U^2 \frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right) \right\} \quad (5)$$

로 되며, (4),(5)식에서 사용된 무차원계수는

아래와 같다.

$$\alpha^2 = \frac{k_s}{\rho A \omega_0^2}, \quad \mu = \frac{m}{\rho A}, \quad \beta = \frac{a}{mg} k_s \quad (6)$$

$$U = \frac{V}{\omega_0} \lambda, \quad \kappa = \frac{\omega_c}{\omega_0}, \quad \omega_c = \frac{2\pi}{l_a} V$$

또, (4),(5)식에 대하여  $\zeta = \xi - U\tau$ 인 이동 좌표계를 도입하여 정리하면, (4),(5)식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^4 u(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^4} + \frac{\partial^2 u(\zeta, \tau)}{\partial \tau^2} - 2U \frac{\partial^2 u(\zeta, \tau)}{\partial \tau \partial \zeta} + U^2 \frac{\partial^2 u(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} + \alpha^2 u(\zeta, \tau) = \left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \cos \kappa \tau - \mu \frac{\partial^2 u(\zeta, \tau)}{\partial \tau^2} \right\} \delta(\zeta) \quad (7)$$

(7)식의 해를 구하기 위해서,  $\zeta$ 와  $\tau$ 에 대해서 각각 **Fourier** 및 **Laplace** 변환하여 정리하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\left( \frac{1}{4} k^4 - U^2 k^2 - 2iUks + s^2 + \alpha^2 \right) \bar{u}(k, s) = \left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} - \mu s^2 \bar{u}(0, s) \right\} \quad (8)$$

이때, **Fourier** 변환과 **Laplace** 변환의 관계식은 각각 다음과 같다.

$$u(\zeta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(k, \tau) e^{ik\zeta} dk \quad (9)$$

$$\bar{u}(k, s) = \int_0^{\infty} \bar{u}(k, \tau) e^{-s\tau} d\tau$$

(8)식의 해는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\bar{u}(k, s) = \frac{\left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} - \mu s^2 \bar{u}(0, s) \right\}}{\frac{1}{4} k^4 - U^2 k^2 - 2iUks + s^2 + \alpha^2} \quad (10)$$

(10)식의 해를 **Fourier** 역변환하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\bar{u}(\zeta, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} - \mu s^2 \bar{u}(0, s) \right\}}{\frac{1}{4} k^4 - U^2 k^2 - 2iUks + s^2 + \alpha^2} e^{ik\zeta} dk \quad (11)$$

(11)식을 **Cauchy**의 **Residue** 정리를 이용하여 풀면, 다음과 같이 된다.

$$\bar{u}(\zeta, s) = i \operatorname{sgn}(\zeta) \frac{\left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} - \mu s^2 \bar{u}(0, s) \right\}}{k_n^3 - 2U^2 k_n - 2iUs} e^{-k_n \zeta} + i \operatorname{sgn}(\zeta) \frac{\left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} - \mu s^2 \bar{u}(0, s) \right\}}{k_j^3 - 2U^2 k_j - 2iUs} e^{k_j \zeta} \quad (12)$$

여기서,  $\zeta = 0$ 일 때  $i \operatorname{sgn}(0) = 1$ 을 이용하여,  $\bar{u}(0, s)$ 에 대해서 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\left( 1 + i \frac{\mu s^2}{k_n^3 - 2U^2 k_n - 2iUs} + i \frac{\mu s^2}{k_j^3 - 2U^2 k_j - 2jUs} \right) \bar{u}(0, s) = i \frac{\left( 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} \right)}{k_n^3 - 2U^2 k_n - 2iUs} + i \frac{\left( 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} \right)}{k_j^3 - 2U^2 k_j - 2jUs} \quad (13)$$

또,

$$Z_m = k_m^3 - 2U^2 k_m - 2iUs \quad (14)$$

로 두고, (13)식을  $\bar{u}(0, s)$ 에 대해서 정리하

면 다음과 같이 된다.

$$\bar{u}(0, s) = \frac{Z_n + Z_j}{Z_n Z_j + i\mu s^2 (Z_n Z_j)} \times i \left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} \right\} \quad (15)$$

이를 다시 (12)식에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(\zeta, s) = & i \operatorname{sgn}(\zeta) \frac{e^{s\zeta}}{Z_n} \left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} - \mu s^2 \frac{Z_n + Z_j}{Z_n Z_j + i\mu s^2 (Z_n + Z_j)} \left( 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} \right) \right\} \\ & + i \operatorname{sgn}(\zeta) \frac{e^{s\zeta}}{Z_j} \left\{ 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} - \mu s^2 \frac{Z_n + Z_j}{Z_n Z_j + i\mu s^2 (Z_n + Z_j)} \left( 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

(16)식을 Laplace 역변환하면 다음과 같이 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u(\zeta, \tau) = & \frac{\operatorname{sgn}(\zeta)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{\mu\beta}{\alpha^2} \frac{s}{s^2 + \kappa^2} \right) \frac{Z_n e^{ik_s \zeta} + Z_j e^{ik_w \zeta}}{Z_n Z_j + i\mu s^2 (Z_n + Z_j)} e^{s\tau} ds \end{aligned} \quad (17)$$

### 3. 이동질량과 무한보의 연성진동과 접촉력 변동

접촉 스프링-이동질량계가 탄성지지된 무한보 위를 주행할 때, 이동질량과 보 사이에서 발생하는 접촉력은, 파상마모의 발생, 성장에 크게 관여한다고 생각된다. 우선, 접촉 스프링-이동질량계와 탄성 지지 무한보와의 연성진동의 특성을 파악한 후, 이때 얻어진 결과로부터 이동질량과 무한보 사이의 접촉력변동에 대해서 고찰한다. 수치해석에 이용된 기본 물리량은 Table. 1에 나타낸 것과

같으며, 이는 실제 열차의 예와 대개 일치한다.

Table 1 Principal Data

$EI$	보의 굽힘강성	4.03 MNm <sup>2</sup>
$m_r$	보의 단위길이 당 질량	50.47 kg/m
$A$	보의 단면적	6.4×10 <sup>-3</sup> m <sup>2</sup>
$I$	보의 단면 2차 모멘트	1.96×10 <sup>-5</sup> m <sup>4</sup>
$l$	지지점의 간격	0.625 m
$k_s$	지지 강성	0.68 MN/m
$k_w$	접촉 강성	2000 MN/m
$m$	이동질량의 질량	349 kg
$V$	이동 속도	37 km/h

#### 3.1 이동질량과 무한보와의 연성진동

접촉 스프링-이동질량계가 탄성지지된 무한보 위를 주행할 때 발생하는 무한보에서의 진동 가속도를 Fig.2에 나타낸다. 종축은 보의 일정 점에 대한 진동 가속도의 크기를, 횡축은 시간으로 놓는다. 이때, 보의 표면에는 어떠한 파상마모도 발생하지 않은 상태로 가정하고, 이동질량이 주행 중에 무한보에서의 진동 응답의 변화를 살펴본다. Fig.2에서, 무한보의 진동은 이동질량이 관측점에 접근할수록 점점 증가하다가, 관측점을 통과한 후에는 점점 감소하는 경향을 확인했다. 또, 무한보에서의 진동 응답으로부터 보면, 가장 높은 주파수성분은 접촉스프링에 의한 접촉 주파수(Contact Frequency)이며, 이보다 낮은 주파수성분 즉, 지지점 한구간내에 3.4개의 피크가 나타나는 주파수성분은 무한보의 굽힘강성에 의한 진동수성분으로 보여지며, 지지점의 각 구간마다 유사한 진동의 형태가 반복되는데, 이 진동수성분은 지지점통과주파수(Sleeper-Passing Frequency)로 파악된다.

Fig.3은 접촉점에서의 진동가속도의 변화를 나타낸 것으로서, 종축은 접촉점에서의 진동가속도의 크기, 횡축은 시간이다. 이는 지지점 두구간을 이동질량이 통과하는 시간에 해당하는 때의 응답으로서, 지지점과 지지점의 한가운데의 지점에 이동질량이 놓여

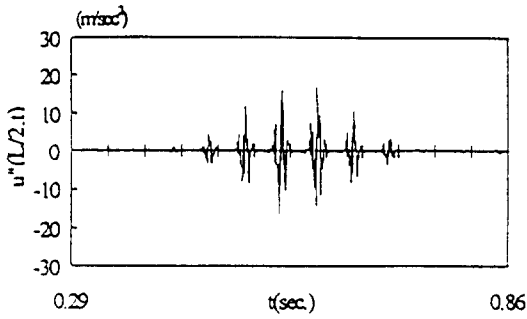


Fig.2 Vibration acceleration of infinite beam (at constant point)

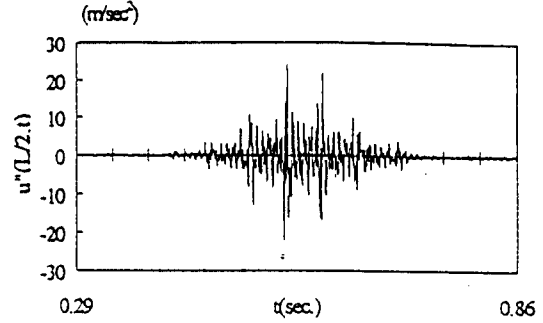


Fig.5 Vibration acceleration of corrugated beam (at constant point)

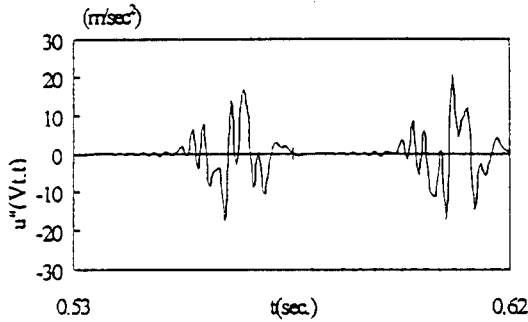


Fig.3 Vibration acceleration of infinite beam (at contact point)

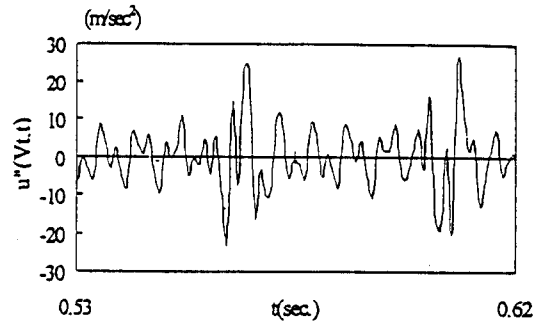


Fig.6 Vibration acceleration of corrugated beam (at contact point)

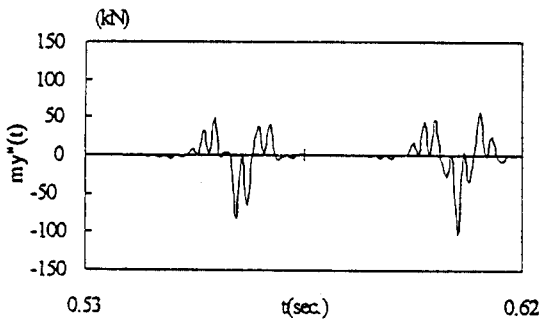


Fig.4 Contact force fluctuation between beam and moving mass (at contact point)

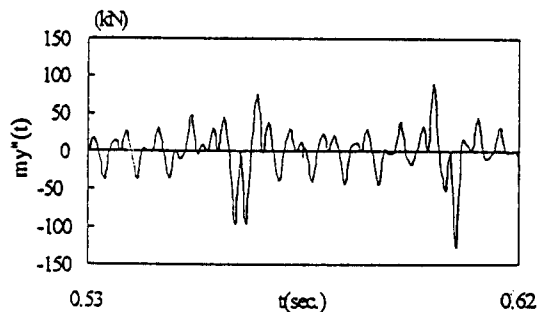


Fig.7 Contact force fluctuation between corrugated beam and moving mass (at contact point)

있을 때 보의 최대처짐이 발생되며, 이를 이동질량이 통과한 후부터, 보에는 탄성에 의해서 복원력이 발생되며, 이 복원력과 이동질량의 관성력 사이의 반력이 상대적으로 큰 진동을 유발시키는 것으로 파악된다.

### 3.2 접촉력변동

Fig.4 는 Fig.3 순간에서의 접촉력변동을 나타낸 것으로, 종축은 접촉점에서의 접촉력의 크기, 횡축은 시간을 나타낸다. Fig.3,4 에서

보였듯이 진동이 크게 발생하는 지점에서 이동질량과 보 사이에서의 접촉력의 변동은 커지며, 이 접촉력에 의해서 보의 표면에서는 소성변형이 일어날 가능성이 큰 것으로 인식된다. 따라서, 이동질량이 보의 최대처짐이 발생하는 지나면서 다음 지지점에 도달하기 전까지 보와 이동질량 사이의 접촉력이 가장 크게 발생된다는 특성을 확인할 수 있으며, 이동질량이 연속적으로 반복해서 통과할 경

우에는 이 지점에서 소성변형이 발생할 가능성이 가장 높은 것으로 추정된다.

#### 4. 파상마모의 영향

파상마모의 발생 가능성에 대해서는 3장에서 언급하였으며, 본 장에서는 파상마모가 어떻게 성장해 가는가에 대한 검토를 하기 위하여, 무한보의 표면에 미리 파장 100mm, 깊이 0.2mm의 파상마모가 발생되어 있다고 가정된 후의 수치해석 결과를 검토한다.

Fig.5는 표면에 파상마모가 발생되어 있는 무한보 위를 이동질량이 주행할 경우에 대한 수치해석의 결과를 나타낸 것이다. 종축은 보의 일정 관측점에서의 진동가속도의 크기, 횡축은 시간을 나타내고 있다. 그림에서 가장 높은 진동수 성분으로 나타나는 것이, 이동질량이 보의 표면에 발생된 파상마모 위를 통과하면서 가진되는 주파수 즉, 파상마모주파수(Corrugation Frequency)이다. 파상마모는 (1)식과 (2)식에서 볼 수 있는 바와 같이, 이동질량에 외력의 형태로 작용되며, 이에 대한 반력이 보에 작용되는 힘의 상호작용 구조를 갖고 있다. Fig.6은 접촉점에서의 보의 진동가속도를 보인 것으로, 종축은 진동가속도의 크기, 횡축은 시간을 나타낸다. Fig.3과 비교해 볼 때, 전체적으로 보의 진동은 파상마모주파수에 의존하고 있음을 볼 수 있다. 그러나, 지지점의 앞에서 큰 진동이 발생하는 특성은 보존되고 있음을 볼 수 있다. Fig.7은 이때의 이동질량과 무한보 사이의 접촉력변동을 나타낸 것이다. 종축은 접촉력변동의 크기, 횡축은 시간을 나타낸다. Fig.4,5에서 보인 것과 같이, 지지점의 직전에서 접촉력변동이 커지는 경향을 보이지만, 파상마모의 영향에 의해서 파상마모의 형태에 따라 접촉력변동의 형태도 변하는 경향을 보인다. 따라서, 연속적인 이동질량의 통과에 대한 경우에는 접촉력변동이 보에 발생된 파상마모를 더욱 촉진시킬 가능성이 있음을 알 수 있다.

#### 5. 맺음말

철도에서 발생하는 파상마모의 언급을 위해서는, 보다 엄밀히 접촉력을 구하기 위한 계의 모델화가 필요하다고 생각된다. 이를

위하여, 보의 표면에서의 파상마모 및 이동질량의 관성력을 고려하여, 접촉스프링-이동질량계와 탄성지지된 무한보와의 연성진동 문제를 해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 접촉스프링-이동질량계가 탄성지지된 무한보 위를 주행할 때의 연성진동은 전체적으로 접촉주파수에 의존한다.
- 2) 이동질량이 무한보 위를 주행할 때, 무한보의 탄성지지점과 탄성지지점 사이의 보의 최대 처짐점을 지나고서, 이동질량과 무한보 사이의 접촉력변동이 최대가 되며, 이 지점에서 파상마모가 발생할 확률이 높다.
- 3) 파상마모가 발생된 무한보 위를 이동질량이 주행할 경우의 연성진동은 파상마모주파수가 지배적이 되므로, 파상마모는 더욱 촉진될 가능성이 있다.

향후, 이동질량이 반복해서 통과하는 경우, 또는 소성변형을 고려한 파상마모의 성장에 관한 언급을 전개할 예정이다.

#### 참고문헌

1. 吉村彰芳, 他 1名, 1994, 移動荷重による軌道の振動の解析, 鐵道總研報告書 89號
2. 須田義大, 他 2名, 1985, コルゲーションの成長.減衰機構の研究, 日本機械學會論文集 C編, 54號
3. S.L. Grassie, R.W. Gregory, D. Harrison, K.L. Johnson, 1982, The Dynamic Response of Railway Track to High Frequency Vertical Excitation, Journal of Mechanical Engineering Science, vol.24, No.2, 77
4. R.A. Clark, P.A. Dean, J.A. Elkins, S.G. Newton, 1982, An Investigation into the Dynamic Effects of Railway Vehicles Running on Corrugated Rails, Journal of Mechanical Engineering Science, vol.24, No.2, 65
5. Dean G. Duffy, 1990, The Response of an Infinite Railroad Track to Moving, Vibrating Mass, Transaction of American Society of Mechanical Engineering, vol.57, 66
6. R.J. Roark, W.C. Young, 1975, Formulas for Stress and Strain, 5<sup>th</sup> Ed., McGraw-Hill, 517
7. L. Fryba, 1975, Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Noordhoff, p.206