

축어긋남이 있는 볼베어링 지지 회전체의 진동해석

⁰ 이영섭*, 이종원*

Vibration analysis of a misaligned rotor system supported by ball bearings

Young-Seob Lee and Chong-Won Lee

ABSTRACT

축어긋남이 있는 회전체-볼베어링계의 진동을 묘사할 수 있는 모델을 개발하였다. 이 모델은 축어긋남의 효과로서 커플링과 베어링에 작용하는 힘과 모멘트, 그리고 이에 의한 변형을 고려하였으며, 실험과 수치해석 결과로부터 모델의 타당성을 검증하였다. 그 결과는 각축어긋남이 심해짐에 따라 타원 형태의 선회궤적을 보여주며, 어긋남방향의 회전체 고유진동수와 베어링 강성계수가 크게 증가하는 것으로 나타났다. 그리고 이러한 현상은 어긋남 방향의 베어링 모멘트 강성증가에 의한 것으로 밝혀졌다.

1. 서론

회전기계에서 축어긋남(misalignment)은 불균형 다음으로 자주 일어나는 결함으로 베어링 하우징의 변형, 부적절한 조립과 설치등에 의해 발생되며, 베어링과 커플링에 전하중(preload)을 작용시킨다. 이 결함은 주로 회전속도에 해당되는 진동(1x)을 발생시키며, 심한 경우에는 2x성분에 의해, 바나나 또는 '8'자 형태의 선회궤적(whirling orbit)을 만든다[1-3].

최근 축어긋남에 대한 연구는 주로 커플링의 변형에 관한 모형화와 진동 영향에 대한 연구들이 진행되고 있다[4-8]. 그러나 이전의 연구들이 고려하지 않았던 베어링에 작용하는 전하중은 회전체 불균형응답과 고유진동수에 많은 영향을 미치는 것으로 알려져 있다[3,9]. 따라서 축어긋남이 있는 회전체-베어링계를 정확히 묘사하고, 관련된 진동 특성들을 알기 위해서는 베어링과 커플링에 작용하는 전하중과 그의 변형에 관한 영향들이 고려되어야 한다. 이 연구의 목적은 축어긋남이 존재하는

회전체계의 진동을 묘사할 수 있는 모델을 개발하고, 실험과 수치해석의 불균형응답과 고유진동수로부터 축어긋남과 관련된 진동 특성들을 조사하여 모델의 타당성을 검증하고자 한다.

2. 운동방정식

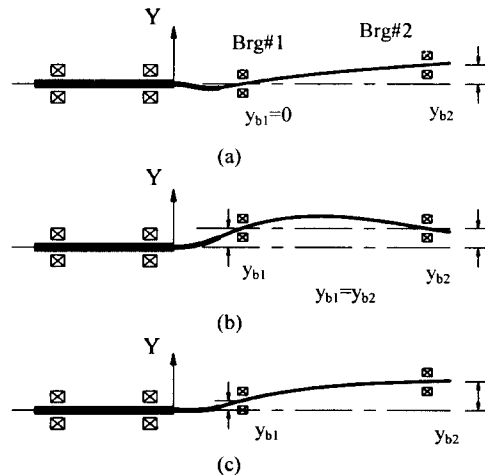


Figure 1 Types of misalignment

* 한국과학기술원 기계공학과

- (a) angular misalignment (b) parallel misalignment
(c) combined misalignment

축어긋남은 Figure 1과 같이 각(angular) 축어긋남, 평행(parallel) 축어긋남, 그리고 2개가 동시에 존재하는(combined) 축어긋남으로 나뉘어지는 데, 축어긋남에 의한 회전체 진동특성을 알아보기 위해, 볼베어링으로 지지된 회전체계를 모형화하였다.

2.1 회전체계의 유한요소 모형화

축방향을 포함한 축과 원판에 대한 유한 요소 모델을 이용하였으며[10], 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{bmatrix} m^{s+d} & 0 & 0 \\ 0 & m^{s+d} & 0 \\ 0 & 0 & m^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g^{s+d} & 0 \\ -g^{s+d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \\ x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k^s & 0 & 0 \\ 0 & k^s & 0 \\ 0 & 0 & k^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \\ f_x \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 위첨자 's' 와 'a'는 축과 원판요소를 'a'는 축방향성분을 의미한다. 그리고 힘벡터는 불균형력, 중력과 축방향력을 포함한다.

2.2 볼베어링의 하중과 처짐의 관계

축어긋남에 의해 베어링에 작용하는 힘과 모멘트는 베어링의 변형을 가져오며, n개의 구름요소를 갖는 베어링에서 변위 벡터와의 관계는 Hertzian의 접촉 이론을 이용하여 다음과 같이 표시할 수 있다. [11].

$$\begin{aligned} F_{bx} &= \sum_{j=1}^n K_{3/2} \delta_j^{3/2} \sin \alpha_j \\ F_{by} &= \sum_{j=1}^n K_{3/2} \delta_j^{3/2} \cos \alpha_j \cos \psi_j \\ F_{bz} &= \sum_{j=1}^n K_{3/2} \delta_j^{3/2} \cos \alpha_j \sin \psi_j \\ M_{by} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} D_m K_{3/2} \delta_j^{3/2} \sin \alpha_j \sin \psi_j \end{aligned} \quad (2)$$

$$M_{bz} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} D_m K_{3/2} \delta_j^{3/2} \sin \alpha_j \cos \psi_j$$

여기서 δ_j 와 α_j 는 y축으로부터 ψ_j 각도에 위치한 j-번째 구름요소의 탄성변형과 접촉각을 나타낸다.

2.3 변형된 커플링의 모형화

Figure 2와 같이 축어긋남은 커플링의 변형을 가져오며, 이로 인해 작용하는 힘과 모멘트를 크게 2가지로 분류할 수 있다. 하나는 회전체를 구동시키는 데 필요한 전달토크에 의한 것으로, 다음과 같이 표시된다[4,5,8].

$$\begin{aligned} M_{Ty} &= T_q \sin(\phi_a) \cos(\phi_p) + T_q \sin(\phi_p) \cos(\phi_a) \\ M_{Tz} &= -T_q \sin(\theta_a) \cos(\theta_p) - T_q \sin(\theta_p) \cos(\theta_a) \\ F_{Ty} &= \frac{M_{Tz}}{l_c} \quad \text{와} \quad F_{Tz} = \frac{M_{Ty}}{l_c} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \theta_a &= \sin^{-1} \left(\frac{\Delta z_a}{l_b} \right) \quad \text{와} \quad \phi_a = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta y_a}{l_b} \right) \\ \theta_p &= \sin^{-1} \left(\frac{\Delta z_p}{l_c} \right) \quad \text{와} \quad \phi_p = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta y_p}{l_c} \right) \end{aligned}$$

는 각과 평행 축어긋남에 의한 처짐각을 나타낸다. 그리고 l_c 와 l_b 는 커플링의 길이와 베어링사이의 거리이다.

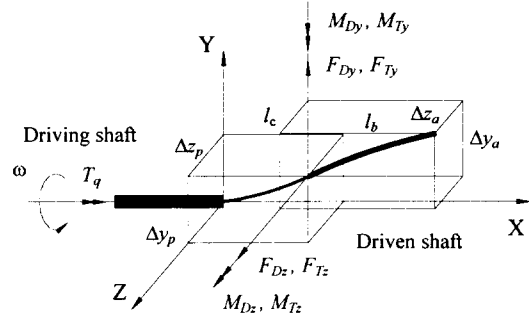


Figure 2 Reaction forces and moments of coupling element

Figure 1에서 보여준 Brg #1과 Brg #2의 변위 벡터를 이용하여 각과 평행 축어긋남을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\text{각축어긋남} : \Delta y_a = y_{b2} - y_{b1}, \quad \Delta z_a = z_{b2} - z_{b1}$$

평행축어긋남 : $\Delta y_p = y_{b1}$ or y_{b2} , $\Delta z_p = z_{b1}$ or z_{b2}

다른 하나는 커플링의 변형에 의한 것으로 커플링을 유효굽힘강성(effective flexural rigidity), $(EI)_{eff}$ 과 유효축강성(effective axial rigidity), $(EA)_{eff}$ 을 갖는 빔요소로 가정하여 힘과 모멘트를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$F_{Dy} = \frac{12(EI)_{eff}}{l_c^3} \left(\Delta y_p - \frac{\phi_a l_c}{2} \right)$$

$$F_{Dz} = \frac{12(EI)_{eff}}{l_c^3} \left(\Delta z_p - \frac{\theta_a l_c}{2} \right) \quad (4)$$

$$M_{Dy} = \frac{6(EI)_{eff}}{l_c^2} \left(\Delta y_p - \frac{2\phi_a l_c}{3} \right)$$

$$M_{Dz} = \frac{6(EI)_{eff}}{l_c^2} \left(\Delta z_p - \frac{2\theta_a l_c}{3} \right)$$

그리고 커플링의 Δx 만큼 축방향 변형에 의한 발생되는 축하중은 다음과 표시된다.

$$F_{Dx} = \frac{(EA)_{eff}}{l_c} \Delta x \quad (5)$$

2.4 운동방정식

위에서의 축, 베어링과 커플링에 대한 모델로부터 축어긋남을 갖는 회전체의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [G+C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{F\}_b + \{F\}_e \quad (6)$$

여기서 $\{F\}_b$ 는 베어링에 작용하는 힘과 모멘트를 $\{F\}_e$ 는 그 외의 불균형력과 중력, 그리고 커플링에 작용하는 힘과 모멘트를 나타낸다. 비선형 모델을 포함하는 운동방정식으로부터 축어긋남과 불균형력에 의한 시간응답을 구하기 위해 Runge-Kutta 적분 알고리즘을 이용하였다.

2.5 예제

Figure 3은 회전체 실험장치로, 축길이는 500 mm, 지름은 10 mm로 2개의 요소를 갖는 것으로 모형화하였다. 그리고 원판의 질량과 질량관성 모멘트는

0.26 kg, 0.02 kg-m² 과 0.01 kg-m² 이며, 실험과 수치 해석에서의 불균형량은 15.7 g-mm이었다. 사용된 고무커플링은 길이가 30 mm이고, 유효굽힘강성과 축강성은 0.03 N-m²와 728.4 N로 사용된 축에 비해 상당히 유연한 것으로 나타났다. 그리고 사용된 깊은홈 볼베어링(Type6200)은 8개의 구름요소를 갖으며, 간극은 5 μm이다. 회전체 실험장치는 수직과 수평 방향의 이동이 가능한 2개의 이동 테이블로 구성되어 있고, 이 테이블을 이용하여 회전체 중심선을 일치시킬 수 있었으며, 실험에서 20 μm이하의 정확도를 갖고 여러 축어긋남 조건을 구현할 수 있었다.

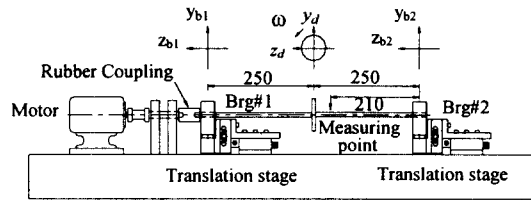


Figure 3 Experimental setup

3. 해석

실험과 수치해석에서 얻은 선회계적, 주파수 응답 함수 그리고 민감도해석으로부터 축어긋남과 관련된 진동특성을 조사하였다.

3.1 선회계적에 대한 해석

Figure 4는 각 축어긋남이 있을 때 측정된 선회계적을 나타낸 것으로 Figure 4(a)에서 어긋남이 없는 경우 궤적은 원에 가깝다. 그러나 Figure 4(b)와 (c)에서 z 방향의 어긋남을 갖는 경우, 궤적은 임계속도아래에서는 z축방향으로 그리고 그 위에서는 y축방향으로 줄어들어 타원형태의 궤적이 된다. 마찬가지로 y축 방향의 어긋남을 갖는 Figure 4(d)의 경우에는 궤적의 단축이 y축방향에서 z축방향으로 줄어든다. Figure 5는 수치해석결과로 실험에서 보여준 타원선회계적에 대한 특징들을 잘 보여주고 있으며, 특히 Figure 5(c)와 (d)에서는 후진선회계적을 보여주고 있다. Figure 6과

7은 평행축 어긋남에 대한 선회궤적을 나타낸 것으로 선회궤적에 대한 변화가 거의 없으며, 이것은 사용된 커플링이 유연하여 작용하는 힘과 모멘트가 큰 영향을 주지 못하는 것으로 보인다.

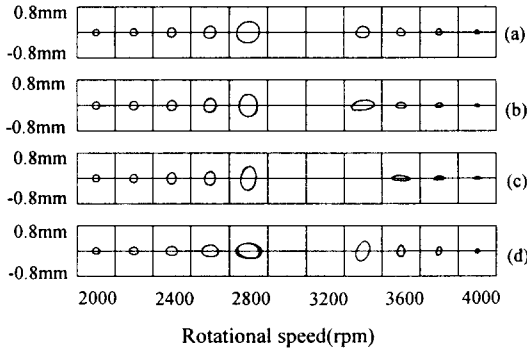


Figure 4 Whirling orbits for angular misalignment : Experiment
(a) no misalignment (b) $\Delta z_a = 1.0$ mm
(c) $\Delta z_a = 2.0$ mm (d) $\Delta y_a = 2.0$ mm

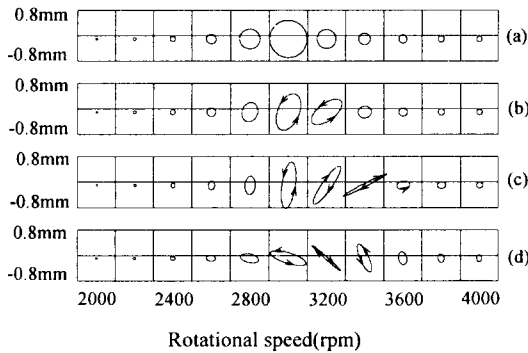


Figure 5 Whirling orbits for angular misalignment : Simulation
(a) no misalignment (b) $\Delta z_a = 1.0$ mm
(c) $\Delta z_a = 2.0$ mm (d) $\Delta y_a = 2.0$ mm

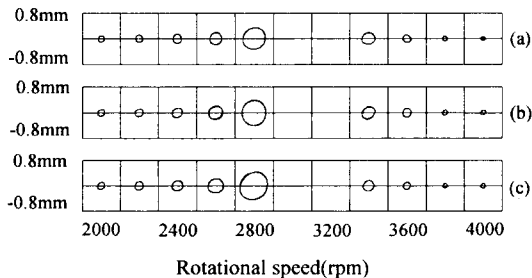


Figure 6 Whirling orbits for parallel misalignment : Experiment
(a) no misalignment (b) $\Delta y_p = 0.5$ mm (c) $\Delta y_p = 1.0$ mm

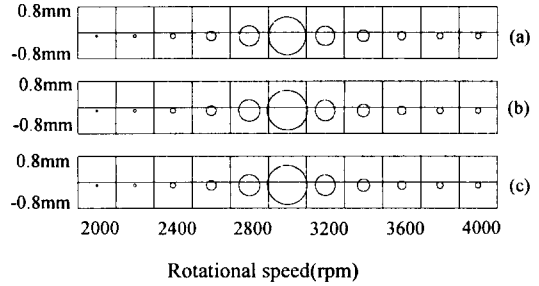


Figure 7 Whirling orbits for parallel misalignment : Simulation
(a) no misalignment (b) $\Delta y_p = 0.5$ mm (c) $\Delta y_p = 1.0$ mm

3.2 유효 베어링 강성

베어링 강성계수에 대한 각축어긋남의 영향을 조사하기 위하여 수식 (2)로부터 다음과 같이 유효 베어링강성을 구하였다[11].

$$k_{bij} = \frac{\partial F_i}{\partial \delta_j} ; \quad i, j = x_b, y_b, z_b, \theta_{by}, \theta_{bz} \quad (5)$$

여기서 F_i 는 베어링에 작용하는 힘과 모멘트를 $x_b, y_b, z_b, \theta_{by}$ 와 θ_{bz} 는 베어링변위벡터이다. 그리고 200 rpm의 낮은 속도에서의 진동을 가정하여 평균유효강성 행렬, $[K]_b$,을 정의하였다. Figure 8은 y축방향의 각축어긋남이 있는 경우 평균베어링 강성을 보여주는 것으로 k_{byy} 와 $k_{b\theta_y}$ 에서 큰 증가를 보여준다. 이것은 결국 축어긋남 방향의 베어링강성 증가를 의미하는 것으로 타원선회 궤적의 원인이 된다.

3.3 주파수응답함수

각 축어긋남이 회전체 고유진동수에 미치는 영향을 살펴 보기 위해 주파수응답함수를 실험과 수치 해석으로부터 구하였다. Figure 9는 측정된 주파수 응답함수로 y축방향의 각축어긋남이 존재하는 경우 고유진동수가 크게 증가하는 것을 보여주고 있으며, 이러한 고유진동수의 변화는 Table 1에 잘 나타나 있다. Table 1(a)와 (b)는 y(z)축방향의 각축어긋남의 경우 앞절에서 말한 베어링 강성, k_{byy} 과 $k_{b\theta_y}$ (k_{bzz} 와 $k_{b\theta_z}$),의 증가에 의해 y(z)축방향의 고유진동수, $\omega_{ny}(\omega_{nz})$,의 증가를 보여주고 있으며, 베어링

의 상호효과에 의해 z(y)축에서의 고유진동수, ω_{nz} (ω_{ny}), 증가가 조금 있다. 이러한 고유진동수의 증가는 임계속도부근에서 불균형응답을 크게 증가시키게 되며, 고유진동수의 분할을 가져와 Figure 5(c)와 (d)에서의 후진선회폐적을 발생시킨다. 한편 Figure 12(b)와 Table 1(c)에서의 평행축 어긋남의 경우 유연한 커플링의 영향으로 고유진동수의 변화가 거의 없다.

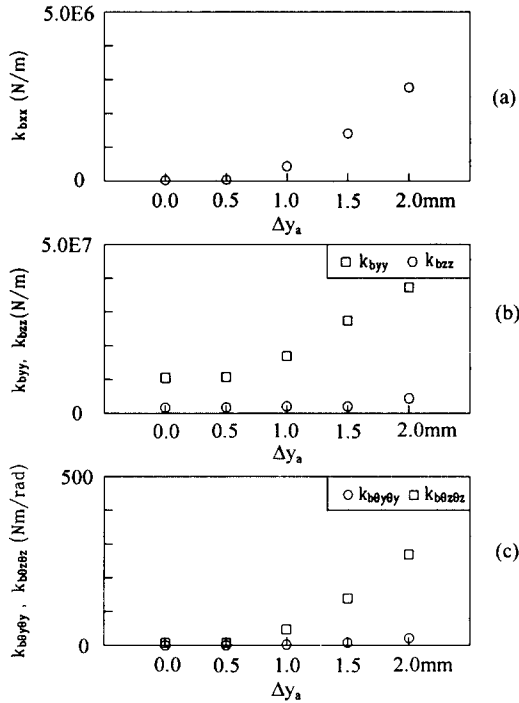


Figure 8 Effective mean bearing stiffnesses for y-directional angular misalignment at Brg#2

(a) k_{bxx} (b) k_{byy}, k_{bzz} (c) k_{bbyy}, k_{bzzz}

3.4 민감도해석

축어긋남을 갖는 회전체 고유진동수에 영향을 주는 베어링강성을 선별하기 위하여 Taguchi 방법을 이용한 민감도해석을 수행하였다[12]. 여기서 제어 인자로 베어링강성을 선택하였으며, 어긋남 방향의 고유진동수를 목적함수로 하였다. 이때 제어 인자의 2 수준은 평균강성계수로 그리고 1 수준과 3 수준은 2 수준에서 10 %씩 감소하고 더해진 값으로 하였다.

Figure 10은 민감도 해석결과로서 z축방향의 각축 어긋남을 갖을 때 $k_{b\theta, \theta_{y2}}$ 가 고유진동수에 제일 큰 영향을 주는 것으로 나타났으며, 베어링의 상호효과를 나타내는 $k_{by\theta_{y2}}$ 도 영향을 주는 것으로 밝혀졌다.

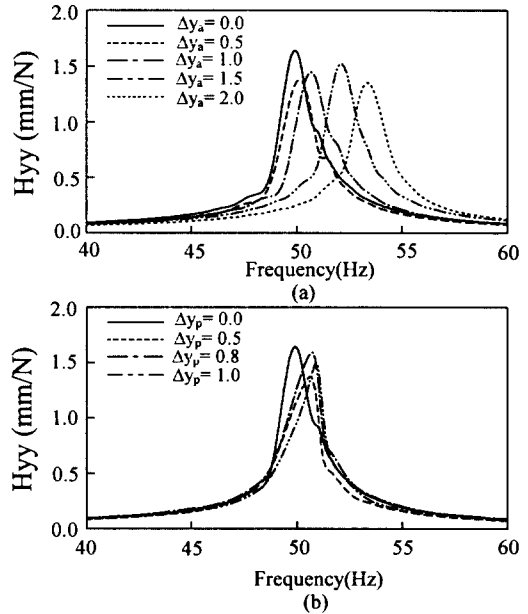


Figure 9 Frequency response function : Experiment (a) angular misalignment (b) parallel misalignment

Table 1 Natural frequency of the misaligned rotor system

(a) for the y-directional angular misalignment

Δy_a (mm)	Experiment		Simulation	
	ω_{ny} (Hz)	ω_{nz} (Hz)	ω_{ny} (Hz)	ω_{nz} (Hz)
0.0	50.1	49.6	49.8	49.4
0.5	50.4	49.6	49.8	49.4
1.0	51.0	49.8	50.6	49.5
1.5	52.4	50.3	52.2	49.6
2.0	53.6	50.8	54.3	49.8

(b) for the z-directional angular misalignment

Δz_a (mm)	Experiment		Simulation	
	ω_{ny} (Hz)	ω_{nz} (Hz)	ω_{ny} (Hz)	ω_{nz} (Hz)
0.0	50.1	49.6	49.8	49.4
0.5	50.3	49.9	49.8	49.4
1.0	50.3	50.9	49.9	50.1
1.5	50.6	52.3	50.1	51.8
2.0	51.3	53.6	50.4	54.2
2.5	51.6	55.4	50.8	57.3

(c) for the y-directional parallel misalignment

Δy_p (mm)	Experiment		Simulation	
	ω_{ny} (Hz)	ω_{nz} (Hz)	ω_{ny} (Hz)	ω_{nz} (Hz)
0.0	50.1	49.6	49.8	49.4
0.5	50.6	49.6	49.8	49.4
0.8	50.7	49.5	49.8	49.4
1.0	50.9	49.5	49.8	49.4

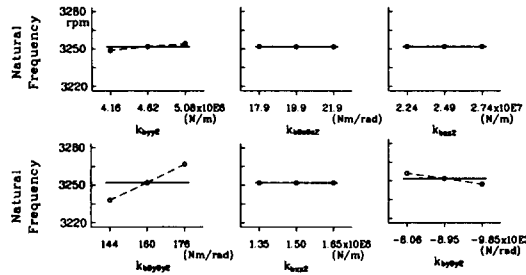


Figure 11 Sensitivity analysis for bearing stiffness using

Taguchi's method : $\Delta z_a = 2.0$ mm

4. 결론

본 연구에서는 축어긋남이 있는 회전체-볼베어링계에 대한 모델을 개발하고, 진동특성들을 조사하였다. 각 축어긋남이 증가하는 경우 임계속도아래에서 어긋남방향으로 줄어드는 타원선회계적을 보이고 있으며, 2개의 임계속도사이에서 후진 선회계적을 보여주고 있다. 그리고 어긋남방향의 회전체 고유진동수는 크게 증가하는 것으로 나타났으며, 이것은 베어링모델을 고려하지 않은 이전의 연구에서 보여 주지 못한 연구 결과이다. 한편 평행축 어긋남의 경우 유연한 커플링으로 인하여 선회계적과 고유진동수의 변화가 거의 없는 것으로 나타났다. 유효베어링강성과 민감도해석으로부터 각 축어긋남에 의한 어긋남 방향의 베어링 강성이 크게 증가하는 것을 볼 수 있었으며, 어긋남 방향의 베어링 모멘트 강성이 회전체 고유진동수에 가장 큰 영향을 미치는 것으로 밝혀졌다. 이상의 여러 실험과 수치해석 결과로부터 축어긋남이 베어링에 미치는 영향을 고려한 회전체계의 모형화에 대한 타당성을 검증할 수 있었다.

5. 참고문헌

1. M.J.GOODWIN 1989 *Dynamics of Rotor-Bearing Systems*. London: Unwin Hyman Ltd.

2. J.M.VANCE 1988 *Rotordynamics of Turbomachinery*. John Wiley & Sons.

3. Bently Nevada 1993 *Technical Training; Machinery Diagnostics Course*.

4. C.B.GIBBONS 1976 *Proceedings 5th Turbomachinery Symposium Gas Turbine Laboratories, Texas A&M Univ*, 111-116. Coupling Misalignment Forces.

5. A.S.SEKHAR and B.S.PRABHU 1995 *Journal of Sound and Vibration* **185**(4), 655-671. Effects of Coupling Misalignment on Vibrations of Rotating Machinery.

6. M.XU and R.D.MARANGONI 1994 *Journal of Sound and Vibration* **176**(5), 663-679. Vibration Analysis of a Motor-Flexible Coupling-Rotor System Subject to Misalignment and Unbalance, Part I : Theoretical Model and Analysis.

7. M.XU and R.D.MARANGONI 1994 *Journal of Sound and Vibration* **176**(5), 681-691. Vibration Analysis of a Motor-Flexible Coupling-Rotor System Subject to Misalignment and Unbalance, Part II : Experimental Validation

8. P.ARUMUGAM, S.SWARNAMANI and B.S.PRABHU 1995 *ASME Design Engineering Technical Conferences* **84** (2), 1049-1054. Effects of Coupling Misalignment on the Vibration Characteristics of a Two Stage Turbine Rotor.

9. T.C.LIM and R.SINGH 1990 *Journal of Sound and Vibration* **139**(2), 201-225. Vibration Transmission through Rolling Element Bearings, Part II : System Studies.

10. H.D.NELSON and MCVAUGH 1976 *J. of Eng. Industry*, 593-600. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements.

11. T.C.LIM and R.SINGH 1990 *Journal of Sound and Vibration* **139**(2), 179-199. Vibration Transmission through Rolling Element Bearings, Part I : Bearing Stiffness Formulation.

12. M.S.PHADKE 1989 *Quality Engineering Using Robust Design*. Prentice Hall.