

승용차 스티어링 칼럼 시스템의 진동해석과 승차감 개선에 관한 연구

김 찬 목*·임 홍 재*·김 도 연**·임 승 만**·이 외 순***·조 항 원***

A study on the vibration analysis of automobile steering system and improvement of ride comfort

Kim Chan-Mook, Yim Hong-Jae,^o Kim Do-Youn, Lim Seung-Man
Lee Wea-Soon, Cho Hang-Won

ABSTRACT

In this paper, in order to analyze dynamic characteristics of automobile steering system consisting of many components, natural frequencies and transfer functions of each component and total system are found on FFT by experiments. Then, the data are transmitted to commercial package program, CADA-PC. By analyzing the data, the mode shape of each natural frequency and damping values are obtained. Also, the function of rubber coupling in column and telescoping effects on system are considered. C.A.E commercial programs are used to compare with the results of experiments. For finite element modeling, I-DEAS is used. Data processing and post processing are operated on NASTRAN and XL, respectively. The ball-bearing and the linkage of shaft with column are modeled by spring element. Stiffness is modified from the results of experiments. The results of those show close agreement. In the mode shape of total system, wheel mode is dominant at lower frequency, while the column mode is main mode at higher. The role of rubber coupling in vibration isolation is clear on mode shape. Telescoping function makes natural frequency of column changed.

I. 서 론

과거의 연비절감과 성능에 주안점을 두었던 자동차 산업은 최근 승차감 및 자동차 소음레벨 감소에 중요성을 두고 신차설계를 하고 있다. 승차감 저하의 가장 큰 원인이 되고 있는 스티어링 시스템의 공회전(idle speed)상태에서의 휠의 진동은 설계단계에서 가장 큰 역점을 두어야 하겠다.

* 국민대학교 기계·자동차 공학부

** 국민대학교 대학원 기계설계학과

*** 쌍용 자동차

본 논문에서는 엔진의 기진력이 칼럼을 통해 들어오는 진동해석 뿐 아니라, 칼럼의 telescoping 과 유니버설 조인트 역할을 하고있는 고무커플링(rubber coupling) 기능에 의한 고유진동수 변화와 이에 따른 진동형 특성의 변화도 고려하였다.

여러 개의 단품으로 구성되어 있는 스티어링 시스템의 동특성을 파악 하기위하여, 먼저 실험적인 방법으로 각 단품(스티어링 휠, 스티어링 칼럼) 과 전 스티어링 시스템의 고유진동수 및 전달함수를 FFT를 통해 확인하고 실험을 통해 구한 데이터를 모달해석 상용프로그램인 CADA-PC

를 통해 각 고유 진동수에서의 진동형 및 감쇠 값을 분석하였다. 또한, 칼럼의 길이조정에 의한 동특성 변화와 고무댐퍼의 기능상의 특성도 함께 조사하였다. 이와같은 실험결과를 바탕으로 구조해석 상용 패키지를 이용하여 유한요소 모델링 기법으로 실험의 결과값과 비교하였다.

구조해석 패키지인 NASTRAN을 이용하여, 구조적 특성을 고려하여 각 단품의 모델링 기법에 대해 알아 보았고, 아울러 샤프트와 칼럼의 연결부인 베어링과 고무커플링의 강성 등을 고려하여 해석하였다. 실험결과 칼럼에서 고무커플링의 역할은 진동형분석에서 그 기능이 뚜렷했으며, 전 스티어링 시스템에서도 커플링의 진폭에 의해 전 시스템의 감쇠비가 상당한 영향을 받고있는 것을 확인하였다. 칼럼의 telescoping 기능에 의한 길이조정으로 고유진동수의 이동을 발견할 수 있다. 이는 자동차의 idle 회전예 의한 가진 주파수(D-range)영역에 포함되므로 강성 등을 고려한 설계 필요성을 제기하고 있다.

II 이론 해석.

(1) 특성 방정식과 계의 고유 진동형

단순구조물의 응답을 해석하는 경우에는, 적절한 경계조건과 함께 미분 운동방정식의 해를 구하므로써, 응답을 예측할 수 있다. 그러나, 실제 상황에서, 기하학적 특성과 재료의 특성은 매우 다양하며, 경계조건 역시 정확한 함수로 규정하기 어려운 경우가 많다. 또한, 복잡한 형상을 가진 구조물의 경우 여러 형태의 성분들 즉, 보, 평판, 셸 등으로 구성되어 있으므로 경계조건을 만족시키는 운동방정식의 이론해를 구하는 것은 불가능하다고 할 수 있다. 이러한 이유로 계의 유한요소해석이 필요하게 된다.

n 개 자유도를 가진 계의 운동방정식은 n 개의 미분 방정식으로 이루어져있다. 일반적으로 이들 방정식은 서로 연성(coupling)되어 있으나, 선형변환을 이용하여 비연성화 될 수 있다. n 개의 자유도를 가진 계의 비연성 미분 방정식은 행렬형으로 표현이 되며, 이때, 선형변환을 나타내는 행렬은 계의 고유 진동형(natural mode)을 나타내는 진동형 벡터이다.

보존력장에서 자유진동을 하는 계의 운동방정식을 Lagrange 방정식을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$M\{\ddot{u}\} + K\{u\} = \{0\} \quad (1)$$

여기서, M, K는 각각 계의 강성과 질량을 나타내는 행렬이다. 식 (1)의 해를 변수 분리법에 의해 표현하면 다음과 같다.

$$u = u_i f(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

식(2)를 식(1)에 대입하면 다음을 구할 수 있다.

$$M\{u\} \ddot{f}(t) + K\{u\} f(t) = \{0\} \quad (3)$$

식 (3)은 각 항을 n개의 방정식의 합의 꼴로 표현할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} u_j \ddot{f}(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j f(t) = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (4)$$

식 (4)는 다음과 같이 시간에 독립되도록 표현할 수 있다.

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j}{\sum_{j=1}^n M_{ij} u_j} = \omega^2, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (5)$$

식(5)의 좌변은 지수에 대해 독립이며, 우변은 시간에 독립이기 때문에 두변은 하나의 상수와 같다고 놓아야 하겠다. 이때, 상수를 양의 상수 ω^2 이라고 한다면 다음과 같은 관계를 유추해 낼 수 있다.

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n (K_{ij} - \omega^2 M_{ij}) u_j = 0, \quad (7)$$

식 (6)의 해가 조화함수의 형태를 갖고 있다고 하면

$$f(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (8)$$

와 같다.

식 (8)에서 우리는 모든 좌표들이 일정 주파수 ω 와 위상각 ϕ 에서 조화운동을 하는 운동이라는 결론을 내릴 수 있다. 주파수 ω 값을 구하기 위해, 식 (7)을 이용하게 된다. 여기서, 양의 상수 ω^2 의 값을 결정하기 위해서 특성값문제를 해결해야 한다. 특성값 문제를 풀기위해, 식 (7)을 행렬형태로 표현하면,

$$K\{u\} = \omega^2 M\{u\} \quad (9)$$

이다. 식 (9)의 해가 유용해를 갖기위해서 계수들의 행렬값(determinant)이 0일 경우에만 구해질 수 있다. 즉,

$$\Delta = |K - \omega^2 M| = 0 \quad (10)$$

가 된다. 여기서, Δ 를 특성 행렬값이라 하고, 이 특성 행렬값을 확장하여, n개의 대수 방정식에서 진동수 값을 구해낼 수 있다. 이때, 특성 행렬값에서 구한 ω 값을 특성값(eigenvalue)라 한다. 특성벡터(eigenvector) 값을 구하기 위해 식 (9)의 방정식에서 조화운동의 진폭 u_i 를 결정해야 한다. 식 (9)에서 구한 특성값을 이용하여 다음과 같은 형태의 방정식을 구할수 있다.

$$K\{u\} = \omega_r^2 M\{u\}, \quad r=1,2,\dots,n. \quad (11)$$

여기서 각각의 ω_r^2 에 대해 벡터 해 $\{u^{(r)}\}$ 을 갖게 된다. 여기서 특성벡터 $\{u^{(r)}\}$,는 계를 구성하는 요소들간의 상대비를 나타낸다.

(2) Beam element 의 유한요소 해석

본 실험에서 사용된 스티어링 시스템의 유한요소 해석은 복잡한 형상의 시스템을 보 및 스프링으로 나누어 해석을 하였다. 특히, 샤프트와 휠의 스포크,링 등 대부분의 형상을 보요소로 해석하였다.

Fig.1은 2개의 절점을 가진 보요소를 나타낸다. 이때 가상일의 원리를 이용하여, 외력이 작용하는 경우의 한 개의 보요소에 대한 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & EI \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right) \left(\frac{d\bar{\beta}}{dx} \right) dx \\ & + GAk \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \left(d \frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\beta} \right) dx \quad (12) \\ & = \int_0^L p \bar{w} dx + \int_0^L m \bar{\beta} dx \end{aligned}$$

여기서 p 와 m은 각각 단위길이당 작용하는 종방향의 하중과 모멘트 하중을 나타낸다. 내삽법(interpolation)을 이용하여 각각의 변위를 표현하면,

$$w = \sum_{i=1}^q h_i w_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^q h_i \theta_i \quad (13)$$

가 된다. 여기서 q는 사용된 절점의 수를 말하고 h_i 는 1차원 interpolation 함수이다. 식 (12)를 이용하여 계의 모든 관련 성분들을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$w = H_w u, \quad \beta = H_\beta u, \quad (14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = B_w u, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = B_\beta u$$

여기서, H는 interpolation 함수들의 행렬이며, u는 각 절점에서의 변위를 나타내는 행렬이다.

$$\begin{aligned} w^T &= [w_1, \dots, w_q, \theta_1, \dots, \theta_1], \\ H_w &= [h_1, \dots, h_q, 0, \dots, 0], \\ H_\beta &= [0, \dots, 0, h_1, \dots, h_q] \end{aligned} \quad (15)$$

또한, 변형을-변위 변환행렬을 나타내는 행렬 B는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_w &= J^{-1} \left[\frac{\partial h_1}{\partial r}, \dots, \frac{\partial h_q}{\partial r}, 0, \dots, 0 \right], \\ B_\beta &= J^{-1} \left[0, \dots, 0, \frac{\partial h_1}{\partial r}, \dots, \frac{\partial h_q}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, J는 Jacobian 연산자로서 전체 좌표계(global coordinate)에서의 요소의 길이와 국부 좌표계(local coordinate)에서 요소의 길이와의 관계를 나타낸다.

이제, 강성행렬 K와 외력행렬 R 을 구해보면 다음과 같다.

$$K = EI \int_{-1}^1 B_{\beta}^T B_{\beta} \det J dr + GAk \int_{-1}^1 (B_w - H_{\beta})^T (B_w - H_{\beta}) \det J dr \quad (17)$$

$$R = \int_{-1}^1 H_w^T b \det J dr + \int_{-1}^1 H_{\beta}^T p \det J dr \quad (18)$$

질량행렬은 d'Alembert 원리를 이용하여 계산할 수 있는데, 다음과 같다.

$$M = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} H_w \\ H_{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho b h & 0 \\ 0 & \frac{\rho b h^3}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_w \\ H_{\beta} \end{bmatrix} \det J dr \quad (19)$$

본연구에서는 스티어링 시스템의 자유진동에 관한 해석이므로 식 (18)을 무시해도 좋겠다.

III. 실험모델 및 방법

본 실험에서 사용된 스티어링 칼럼은 일반 승용차용 칼럼과 비교하여 형상에 있어 차이가 있다. 칼럼과 기어박스의 연결지점에 고무커플링이 설치되어 있으며, 연결 샤프트(intermediate shaft)는 벨로우즈 형태의 튜브(corrugated tube)로 이루어져 있다 (Fig.2). 이와같은 형상의 차이가 진동형에는 어떤 영향을 미치는지를 고려하며 실험을 수행하였다. 또한, 운전자의 체격조건에 따른 칼럼의 길이조정 (telescoping function) 이 시스템의 고유진동수와 진동형에 어떤 영향을 미치는지를 고찰하였다. 실험은 각각의 단품과 전 스티어링 시스템을 임팩트햄머와 가속도계를 각각 신호입력장치와 출력장치로 이용하였다. 또한, 각각의 모델은 최대한 자유-자유 경계조건 (free-free B.C)을 유지하도록 하기위해 칼럼과 전 스티어링 시스템은 자동차용 튜브위에, 휠은 피아노선을 이용하였다. 정확한 진동형을 구하기 위해 가속도계는 3축 가속도계를 이용하여 3방향 (x,y,z)의 주파수 응답함수(F.R.F)를 모니터 하였다. 햄머가진은 평균 10회 이상을 실시하며, 입, 출력 신호의 잡음을 최소화 하기위해 coherence 선도를 이용하였고, F.F.T.장비를 통해 주파수

응답함수와 전달함수를 구하였다. 각 노드점에서의 정보는 진동형 분석을 위해 상업용 모드해석 프로그램 (CADA-PC)으로 전송하였다.(Fig.3).

IV. 실험결과

1) 스티어링 휠.

200 Hz의 주파수 영역에서 4개의 모드를 구할 수 있다.(Fig.4). 주파수 응답함수에서 볼 수 있듯이 4차 모드에서 가장 큰 에너지 값을 갖고 있으며, 휠의 주모드(main mode)가 나타남을 볼 수 있다. 비틀림 모드가 1차 고유진동수에서 발생하며, 1,2,3차 굽힘모드가 그 이후에 발생한다. 대표적인 진동형은 Fig.5 와 같다.

2) 스티어링 칼럼과 샤프트의 조합.

총 주파수 영역 800 Hz의 주파수 응답함수 곡선에서 5개의 피크를 얻을 수 있다. 본 실험의 칼럼-샤프트 모델은 타 모델과는 달리 고무커플링이 칼럼과 벨로우즈 형태의 연결 샤프트사이에 위치하고 있다. 이는 진동형에서 그 기능이 분명히 드러나고 있음을 보이고 있다.(Fig.6) 고무커플링을 중심으로 기어박스과 연결되는 샤프트와 칼럼부분의 진동형에서 진폭차이가 크게 나타나고 있다. 또한, 1,2,3차 굽힘모드가 저주파 영역에서 발생하고 있으며, 1,2차 비틀림 모드가 이후 발생하고 있음을 알 수 있다. 각 모드에서의 대표적인 진동형은 Fig.7에 나타내었다.

3) 전체 스티어링 시스템

200 Hz 의 주파수 영역에서 4개의 진동형을 살펴 보았다. 주로 저차 모드에서는 휠의 진동형이 지배적임을 알수있고, 고차 모드로 갈수록 칼럼의 진동형이 두드러졌다. 2,3차에서의 노드점(nodal point)를 확인해본 결과 전기모터와 브라켓의 위치선정이 비교적 안정된곳에 되어있음을 진동형에서 확인하였다. 시스템 전체의 감쇠비는 고무 커플링과 칼럼의 노드점의 위치와의 관계가 밀접함을 알았다. 고무 커플링을 중심으로 노드점의 위치가 가까우면 상대적으로 고무 커플링의 진폭이 줄어들므로써, 전체 감쇠비가 감소되었다. 이와같은 결과로 커플링의 진동절연효과를 감쇠비로 확인할 수 있다. 대표적인 진동형은 Fig.8에 나타내었다.

4) 길이조정후의 스티어링 칼럼.

텔리스코핑(telescoping) 기능을 가진 칼럼 고유진동수의 변화와 진동형을 알아보기 위해, 길이를 3등분하여 똑같은 조건에서 주파수 응답함수

와 진동형을 살펴보았다. 칼럼을 가장 길게했을 경우와 가장 짧을 경우의 고유진동수 범위에 칼럼의 길이조정으로 인한 가능한 주파수 영역이 모두 포함된다고 가정 하였다. 3가지 경우 1차 고유진동수는 최고 4 Hz 정도의 이동이 보였으며(table.1), 고차 모드로 갈 경우 그 변화폭이 넓어짐을 알 수 있다. 실차에 장착할 경우 약간의 차이는 있겠지만, 공회전시 엔진 가진주파수를 평균 30~35 Hz 범위 있다고 볼 때, 취약한 진동특성이 있다고 볼 수 있다. 그러나, 주행시 6기통 4행정 차량의 경우 RPM의 증가에 따라, 엔진의 가진 주파수가 최고 170 Hz 까지 증가한다고 보았을 경우, 세 경우 모두 2차 고유진동수가 이를 넘으므로 큰 영향이 없음을 알 수 있다.

V. 구조해석 패키지에 의한 진동해석

1) 스티어링 휠

스티어링 휠은 링(ring), 스포크(spoke), 허브(hub) 및 전체를 감고 있는 우레탄으로 구성되어 있다. 원형의 링은 중공 빔 요소로 모델링하였고, 스포크는 직사각형의 중실 빔 요소로, 중심부의 허브와 만나는 곳은 강체 요소로써 각각 모델링하였다. 허브는 질량이 다른 부분보다 상당히 크므로 강성 효과를 무시하였으며 그에 해당하는 집중 질량 요소로써 모델링하였다. 우레탄 부분은 실제적으로 모델링하기가 어려우므로 집중 질량 요소로 대체하여 질량 효과만을 고려할 수 있도록 하였다.

2) 스티어링 칼럼

복잡한 단면 형상을 가진 칼럼은 스티어링 휠의 링처럼 중공의 빔 요소로 모델링하였으며 모터 등과 같은 부수적인 부분은 집중 질량 요소를 사용하여 단순화하여 모델링 하였다. 또한 휠 쪽과 뒤쪽의 볼 베어링은 집중 질량 요소로 모델링하였으며 스프링 요소를 사용하여 강성도를 주었다.

3) 스티어링 샤프트

스티어링 샤프트는 중실로 된 빔 요소를 사용하여 단면형상을 넣어 모델링하였다. 벨로우즈와 연결되는 부분은 스프링 요소를 사용하여 그 영

향을 감안하였으나 감쇠 효과는 고려하지 않았다.

4) 시스템의 연결부

칼럼과 휠은 볼트로 연결되어 있으며 축 방향과 병진 방향만 잡아주고 나머지 두 방향의 강성값만 주어 그 영향을 모델링하였다. 칼럼과 샤프트의 연결부는 스프링 요소로써 회전에 대한 영향만을 주도록 모델링하였다. 그러나 free-free 상태에서의 진동 해석이므로 기어 박스와 연결된 부분의 모델링은 하지 않았다.

VI. 해석 결과

진동 해석을 하기위해서 스티어링 휠, 스티어링 컬럼과 샤프트 그리고 전체 스티어링 시스템을 free-free상태로 하여 진동 해석을 하였다. 진동 해석은 범용 유한요소코드인 MSC/NASTRAN으로 하였으며 Lanzos법을 사용하였다.

1) 스티어링 휠

해석결과와 실험결과에서 나타난 고유진동수와 진동형을 비교한 결과는 Table.2과 같으며 Fig.9는 대표적인 진동형을 보여준다.

2) 스티어링 칼럼과 샤프트의 조합

스티어링 컬럼과 샤프트를 실험에서 분리하여 해석할 수 없었기 때문에 여기에서도 조합한 형태로 모델링을 하여 진동 해석을 수행하였으며 실험결과와의 비교는 Table.3에 나타내었다. Fig.10은 각 고유 진동수에서의 진동형을 보여준다.

3) 전 스티어링 시스템

Table.4는 전 스티어링 시스템에 대한 진동 해석 결과를 보여주고 있다. Fig.11은 각각의 차수에서의 진동형이다.

VII. 결 론

스티어링 시스템의 단품 및 전체 시스템의 실험과 구조해석 모델링을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 칼럼과 연결샤프트 중간에 위치한 고무커플링은 진동형 분석에서도 나타나듯이 휠로 전달되는 진동을 효과적으로 절연하는데 유용하며, 이로인해 전 시스템의 1차 모드에서 비교적 큰 감쇠비를 보인다.

2. telescoping 기능에 의한 길이조정에서 세 경우 각각의 제 1차 고유진동수는 최대 4Hz 정도의 차이가 있고, 2,3차 고유진동수는 매우 큰폭의 차이가 있다.
3. 칼럼과 샤프트 사이의 2개의 볼베어링은 집중 질량요소로 모델링하여 스프링 요소로 강성도를 조정할 수 있다.
4. 칼럼과 샤프트의 연결부는 회전에 대한 영향만을 고려하여 스프링 요소로 모델링 할 수 있다.

참고 문헌

- [1] Meirovitch, L., 1967, Analytical methods in vibration , Macmillan, pp. 76~80
- [2] Klaus-Jurgen Bathe., 1967, Finite element procedure , Prentice-Hall, pp. 400~408
- [3] 오재웅 외, 1992, "스티어링 시스템의 모델링 및 진동해석", 한국소음 진동 공학회지, 제2권 2호
- [4] Maurice Petyt, Introduction to finite element vibration analysis, Cambridge Uni. press
- [5] Jean Bottle, 1995, "Optimization of power steering systems vibration reduction in passenger car" S.A.E #951253
- [6] Hiroshi Sugita, 1987, "Experimental analysis for the steering wheel vibration using mechanical impedance methods" S.A.E #870971

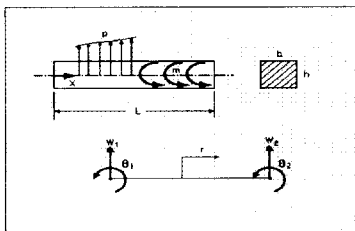


Fig.1. beam element and 2-node model



Fig.2. photo of steering system

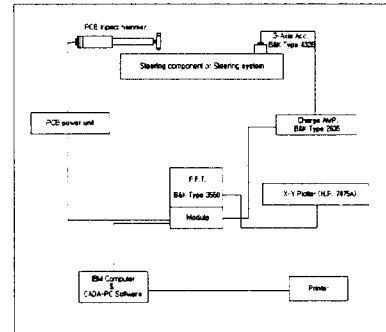


Fig.3. block diagram of experiment set-up

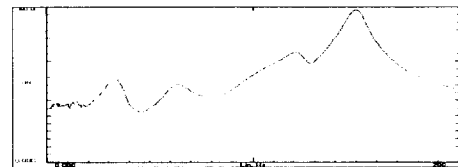
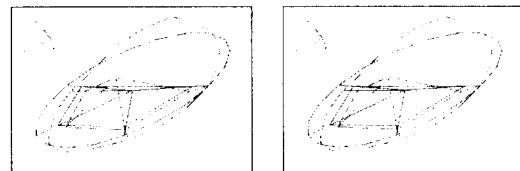
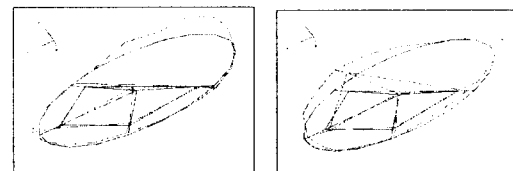


Fig.4. F.R.F. curve of steering wheel



(a)33.1 Hz

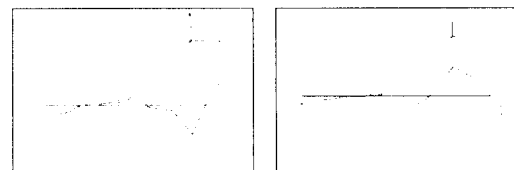
(b)63.5 Hz



(c)121.4 Hz

(d)149.6 Hz

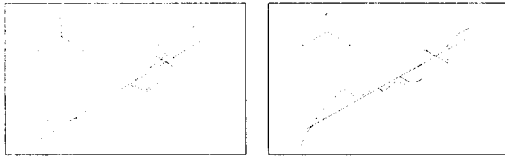
Fig.5. mode shape of steering wheel by CADA-PC



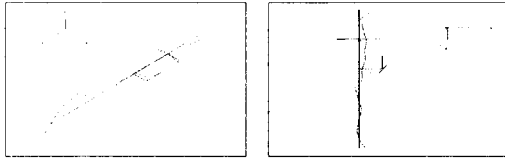
(a)215.2 Hz

(b) 314.8 Hz

Fig.6. rubber coupling effects

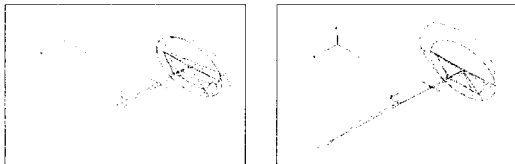


(a) 34.8 Hz (b) 215.2 Hz

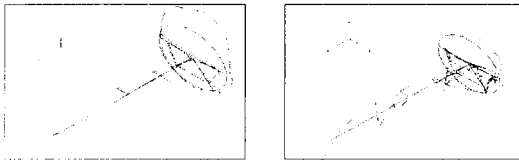


(c) 314.8 Hz (d) 438.9 Hz

Fig.7. mode shape of steering column by CADA-PC



(a) 23.3 Hz (b) 60.1 Hz



(c) 108.6 Hz (d) 181.8 Hz

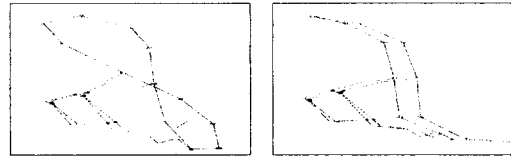
Fig.8. mode shape of total steering system by CADA-PC.

table.1. frequency comparison by length

길이 차수	longest	middle	shortest
1	35	33	31
2	216	235	253
3	317	336	381

table.2. analysis and test results of wheel.

	C.A.E	test	mode shape
1	37.7	33.1	y축 중심의 1차 비틀림
2	64.2	63.5	x축 중심의 1차 굽힘
3	123.7	121.4	x축 중심의 2차 굽힘
4	154.2	151.1	y축 중심의 3차 굽힘

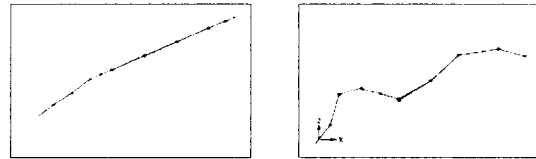


(a) 37.7 Hz (b) 64.2 Hz

Fig.9. mode shape of wheel by analysis.

table.3. analysis and test results of column

	C.A.E	test	mode-shape
1	34.9	34.8	z축 방향 1차 굽힘
2	224.5	215.2	z축 방향 2차 굽힘
3	299.2	314.8	z축 방향 3차 굽힘
4	410	438.9	x축 중심 1차 비틀림

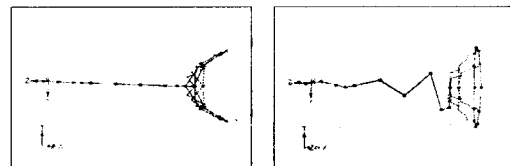


(a) 34.9 Hz (b) 299.2 Hz

Fig.10. mode shape of column by analysis.

table.4. analysis and test results of total system

	C.A.E	test	mode-shape
1	24.5	23.3	±x 방향 wheel 병진운동
2	65	60.1	휠의 1차 굽힘 (y축 중심)
3	109	108.6	휠의 1차 비틀림 (y축 중심)
4	174.8	181.8	칼럼의 1차 굽힘 (z축 방향)



(a) 65 Hz (b) 174.8 Hz

Fig.11. mode shape of total system by analysis.