

# 부정류 계산모형의 보정에 관한 연구

黃義俊\*, ○田庚秀\*\*

## 1. 서론

우리 나라는 여름철에 집중하는 강우로 인하여 빈번한 홍수피해를 겪고 있다. 홍수피해의 경감을 위해서는 가능한 피해 양상을 평가할 수 있는 수리학적 계산모형이 필요하다. 이러한 계산모형의 적절성을 좌우하는 요소의 하나는 지배방정식에 대한 수치해법의 정확성으로서, 현재에는 Preissmann 기법에 의한 유한차분법이 안정성과 정확성이 우수한 것으로 평가되어 널리 사용되고 있다. 모형의 적절성을 결정짓는 또 하나의 중요한 요소는 모형의 매개변수로서 부정류 계산모형의 경우에는 운동량 방정식의 에너지 경사, 또는 마찰 경사 항에 포함되는 조도계수가 지배적인 매개변수가 된다. 특히 자연하천에 관한 부정류 계산모형의 조도계수는 하상재료의 크기 특성에 따라 좌우되는 표피마찰뿐만 아니라 하상의 굴곡 등 단면형의 변화에 따른 형상손실 및 하천의 사행에 따른 손실 효과 등을 포괄적으로 내포하고 있기 때문에 모든 하천구간에 대하여 일반적으로 적용할 수 있는 조도계수의 값을 결정하기는 어렵다. 또한 조도계수는 흐름조건, 즉 유량 또는 수위의 변화에 따른 가변성을 갖고 있기 때문에, 흐름이 시간 및 공간적으로 변화하는 부정류 계산모형에 있어서는 더욱 그러하다. 따라서, 모형의 적용에 앞서 부정류 계산모형에 관한 조도계수를 결정하기 위한 절차로서, 기왕의 홍수사상에 대한 관측자료를 이용한 모형의 보정이 필수적으로 요구된다.

부정류 계산모형의 매개변수 최적 추정에 관한 연구는 유역 수문모형, 지하수 흐름모형 등 타 분야의 경우에 비하여 상대적으로 적은 편이나, 1970년대 초반부터 현재까지 꾸준히 연구가 수행되어 오고 있다. Becker와 Yeh(1972; 1973)는 단면형이 일정한 하도에 대하여 에너지 경사 항을 하도의 단면특성과 조도특성을 대표하는 두 개의 매개변수를 사용하여 모형화하고, 영향계수법(influence coefficient algorithm)에 의한 이들 매개변수의 최적 추정 방법을 제시한 바 있다. Becker와 Yeh(1972; 1973)가 관측치와 계산치 간 오차제곱합을 최소화하는 것을 목적함수로 한 반면, Fread와 Smith(1978)는 수정 Newton-Raphson 반복계산법을 사용하여 오차의 합을 영에 가장 근사하게 하는 조도계수의 값을 최적치로서 추정한 바 있다. 그들은 수위 관측 지점들을 기준으로 전체 하천구간을 다수의 소구간으로 구분하고, 가장 상류 구간에서 시작하여 하류 방향으로 각 소구간별 조도계수를 순차적으로 추정하였으며, 또한 조도계수가 유량에 따라 부분 선형적(piecewise linear)으로 변화한다고 두고, 각 유량규모별 조도계수를 추정하였다. Fread와 Smith(1978)의 매개변수 추정기법은 미국 기상청의 홍수추적 모형인 DWOPER의 보정 기법으로 적용되고 있다(Fread, 1989). Wormleaton과 Karmegam(1984)은 하도의 단면 형상을 사다리꼴로 가정하고, 단면형 및 조도와 관련된 매개변수들을 오차 최대치의 최소화(minimax) 및 오차제곱합의 최소화를 목적함수로 하는 각각의 경우에 대하여 추정하였다. 이밖에도 Wasantha Lal(1995)은 특이치 분해(singular value decomposition) 방법을 적용하여 조도계수의 추정을 수행한 바 있다. 국내의 연구로는 김원 등(1995)이 유일한데, Fread와 Smith(1978)의 매개변수 추정기법을 한 강 본류에 적용하여 고안-광장 및 잠수교-인도교 구간에 대하여 유량규모별로 조도계수의 추정을 수행한 바 있다.

이와 같은 기존의 연구들 중 Fread와 Smith(1978) 및 김원 등(1995)의 경우를 제외한 대부분의 경우, 조도계수의 공간적 변화 및 유량에 따른 변화 경향을 고려하지 않고 있다. Fread와 Smith(1978)의 경우에는 소구간별로 다른 조도계수를 갖도록 모형을 보정할 수 있으나, 그들의 소구간 구분은 관측소의 위치에 따라 좌우되기 때문에 실제 하도의 물리적 특성의 변화에 따른 구

\* 현대엔지니어링 토건사업본부 수자원개발부

\*\* 성균관대학교 공과대학 토목공학과 조교수

분과는 거리가 있다. 또한 그들의 모형은 유량규모에 따라 조도계수가 다르게 부여되도록 되어 있으나, 소구간 내의 모든 계산점에 매 시각 동일한 값의 조도계수가 부여되기 때문에 lumped parameter 모형으로 볼 수 있다. 본 연구에서는 하도의 형태특성 등에 따라 하천구간을 임의로 구분하고, 각 구간별로 유량규모에 따라 조도계수를 부여하되, 동일한 구간내의 각 계산점에서도 유량에 따라 서로 다른 조도계수의 값을 갖도록 하는 분포형 매개변수(distributed parameter) 모형을 구성하고, 이를 한강 본류에 적용하여 모형의 보정을 수행한다. 또한, 모형의 검증을 통하여 조도계수의 공간적 변화 또는 유량에 따른 변화를 고려하지 않는 경우와 비교하여, 그 개선 효과를 살펴보고자 한다.

## 2. 한강 본류에 대한 부정류 계산모형

한강 본류에 대한 부정류 계산모형으로서 폐합형 수계에 관한 계산모형을 적용하였다. 이는 폐합형 수계 모형이 지천 유입지점, 월류형 수공구조물 등의 내부경계를 간편하게 처리할 수 있다는 장점이 있기도 하지만, 무엇보다도 잠실 및 신곡 수중보가 고정보와 가동보로 이루어져 이들 지점에서는 하도형 및 월류형 흐름이 함께 발생할 수 있다는 한강 본류의 특수한 상황 때문이다. 이에 대하여는 뒤에서 좀더 상세히 기술하기로 한다.

### 2.1 지배방정식 및 수치해법

폐합형 수계에 관한 계산모형의 지배 방정식은 수로 지배방정식과 절점 지배 방정식들로 구성된다. 하도형 흐름에 관한 수로 지배방정식은 다음식 (1) 및 (2)와 같은 연속방정식 및 운동량 방정식으로 구성된다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gA \frac{Q|Q|}{K^2} + gAS_b = 0 \quad (2)$$

여기서  $Q = Q(x,t)$  및  $y = y(x,t)$ 는 각각 유량과 수위를 나타내며,  $A$ 와  $K$ 는 흐름 단면적과 통수능으로서 각각  $y$ 의 함수이다.  $\alpha$ 는 운동량 보정계수,  $g$ 는 중력가속도이며,  $x$ 와  $t$ 는 각각 공간 및 시간좌표를 나타낸다.  $S_b$ 는 교각을 포함하는 수로의 경우, 교각에 의해 추가적으로 발생하는 단위길이당 손실수두를 나타낸다. 통수능  $K$ 는 Manning의 조도계수( $n$ )를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = \frac{1}{n} AR^{2/3} \quad (3)$$

여기서  $R$ 은 동수반경이다.

월류형 흐름에 관한 수로 지배방정식은 다음과 같다.

$$Q_u = Q_d \quad (4)$$

$$Q_u = \mu b \sqrt{2g} \sqrt{y_u - y_d} (y_d - y_w) \quad \left( y_d - y_w \geq \frac{2}{3} (y_u - y_w) \right) \quad (5a)$$

$$Q_u = \mu b \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2g}{3}} (y_u - y_d)^{3/2} \quad \left( y_d - y_w < \frac{2}{3} (y_u - y_w) \right) \quad (5b)$$

여기서  $\mu$ 는 월류유량계수,  $y_w$ 는 월류부의 바닥표고,  $b$ 는 월류부의 바닥폭이다.  $y_u$  및  $y_d$ 는 각각 월류구조물 상류 및 하류측 수위를,  $Q_u$  및  $Q_d$ 는 월류유량을 나타낸다.

절점 지배방정식은 연속방정식 (6)과 동수위 조건식 (7)로 구성된다.

$$\sum_{k=1}^{L_j} Q_{j,k} + Q_{\text{ext}}(j,t) = 0, \quad j=1, \dots, J \quad (6)$$

$$y_{j,k} = y_j, \quad k = 1, \dots, L_j; \quad j = 1, \dots, J \quad (7)$$

여기서  $J$ 는 절점의 총수,  $L_j$ 는 절점  $j$ 에 연결된 수로의 총수이다.  $Q_{j,k}$ 은 수로  $k$ 로부터의 유입량

또는 수로 k로의 유출량이며  $Q_{ext}(j, t)$ 는 시차  $\tau$ 에서의 기지의 외부 유출입량으로서 지천 유입량, 상류단 경계에서의 유입량, 하류단 경계에서 유출량 등이 여기에 포함된다.  $Q_{j,k}$ 와  $Q_{ext}(j, t)$ 는 양의 값일 경우 절점으로의 유입량을, 음의 값일 경우 유출량을 각각 의미한다.  $y_{j,k}$ 는 절점 j와 k를 연결하는 수로의 절점 j측 끝단 계산점에서의 수위를 나타낸다.

하도형 흐름에 관한 수로 지배방정식을 Preissmann의 4점 음해법(Liggett과 Cunge, 1975; Cunge 등, 1980)에 의하여 차분화하면 수로상의 각 계산점에서의 수위 및 유량과 절점 수위에 관한 비선형 연립방정식이 구성되며, 그 해는 Newton-Raphson 방법을 적용하여 구한다. Newton-Raphson 방법을 적용하여 구성되는 수위 및 유량 보정치에 관한 선형 연립방정식의 해법으로는 절점 수위 보정치의 계산 및 수로에 대한 return sweep으로 구성되는 폐합형 double-sweep 알고리즘을 사용한다. 월류흐름의 처리기법에 관한 상세한 내용에 관해서는 田庚秀(1996)에, 전반적인 계산모형에 관한 상세한 내용은 Holly 등(1990) 및 黃義俊(1997)에 상세히 기술되어 있다. 교각에 따른 추가적 손실수두에 관한 실험공식으로 Yarnell의 식(Henderson, 1966)을 적용하였으며, 이를 포함한 수치해법에 관해서는 HEC(1996)에 기술되어 있다.

## 2.2 모형의 구성

팔당댐부터 전류까지의 69.431 km 구간을 대상으로 하여 모형을 구성하였다. 모형의 상류단 및 하류단인 팔당댐 및 전류지점과 왕숙천, 탄천, 중랑천 및 안양천 등 4개 지천의 유입지점, 잠실 및 신곡 수중보의 직상류 및 직하류에 각각 절점이 위치하도록 하였다. 수중보 직상류 및 직하류의 절점들은 두 개의 수로로 연결되며, 그밖의 절점들은 인접 절점들과 각각 한 개의 수로로 연결된다. 따라서 전체 모형은 총 10개의 절점과 11개의 수로로 구성된다. 계산점간 평균 간격은 약 200 m이다.

앞에서도 언급한 바와 같이 잠실 수중보와 신곡 수중보는 고정보와 가동보의 복합형으로 되어 있다. 따라서 가동보가 완전히 개방되는 홍수시 흐름의 경우, 고정보 측에서는 월류형 흐름이, 가동보 측에서는 하도형 흐름이 각각 발생하게 된다. 따라서 이들을 분리하여 모의하기 위하여 두 개의 수로로 연결되는 폐합형 수계 모형을 구성하였다. 고정보 흐름 모의를 위한 수로 상에는 상·하류측에 각각 한 개씩 두 개의 계산점이, 개방된 가동 흐름을 위한 수로 상에는 3개의 계산점이 포함되도록 하였다. 또한 행주대교, 성산대교, 양화대교, 당산철교, 마포대교, 원효대교, 한강대교, 동작대교, 반포대교, 한남대교, 동호대교, 성수대교, 잠실대교, 잠실철교, 올림픽대교 및 광진교 등 총 17개의 교량이 포함되도록 모형을 구성하였다. 하천수로내 각 계산점에서의 횡단면 자료는 서울시 관내 하천제방 안전도 검토 및 치수 종합 대책수립 보고서(1992) 및 한강 하류연안 개발계획 보고서(1989) 등의 하천측량 자료를 사용하였다.

## 3. 모형의 보정 및 검증

### 3.1 사용자료

1987년부터 1993년 사이에 발생한 홍수사상 중 팔당댐 방류량과 고안, 잠수교, 인도교 및 전류 지점 수위 관측치가 모두 가용한 8개 홍수사상에 대한 관측자료를 이용하여 모형의 보정 및 검증을 수행하였다. 표 1은 이들 홍수사상을 상류단 경계인 팔당댐에서의 해당 홍수기간 중 최대 방류량의 크기순으로 정리한 것이다. 팔당댐 방류량을 상류단 경계조건으로, 전류 지점 수위 관측치를 하류단 경계조건으로 각각 사용하였다. 유입지천인 왕숙천, 탄천 및 안양천에서의 시간별 지천 유입유량은 퇴계원, 성남 및 안양 수위표 지점에 대한 수위-유량 관계곡선으로부터 산정하였으며, 중랑천의 경우에는 인접한 탄천에서의 유입유량에 중랑천의 유역면적과 탄천의 유역면적의 비를 곱한 값을 중랑천에서의 지천 유입량으로 취하였다.

### 3.2 매개변수에 대한 민감도 분석

모형의 보정을 위한 매개변수로는 Manning 조도계수 및 월류 흐름에 관한 유량계수들이 있다. 모형의 추정에 앞서 추정 대상 매개변수들을 선정하기 위하여 각 매개변수에 대한 하도내 흐름의 민감도 분석을 실시하였다.

우선 월류유량계수를 1.0으로 고정시키고, Manning 조도계수를 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1로 변

화시켜 가며 홍수사상 4(표 1 참조)에 대한 모의계산을 수행하였다. 다음으로는 역시 홍수사상 4에 대하여, Manning 조도계수는 0.04로 고정시키고, 잠실 및 신곡 수중보에서의 월류유량계수를 0.5, 0.75 및 1.0으로 변화시켜가며 모의계산을 실시하였다. 각 경우에 대하여 계산된 한강 분류상의 여러 지점에서의 수위 수문곡선을 비교한 결과, 조도계수가 증가할수록 홍수위가 상승하는 경향이 잘 나타났다. 또한 월류유량계수가 작아질수록 홍수위가 상승하는 경향이 나타났으나 월류유량계수에 대한 민감도는 조도계수에 대한 민감도에 비하여 미미함을 알 수 있었다. 따라서 월류유량계수는 1.0으로 고정시키고, 조도계수 만을 모형의 보정을 위한 매개변수로 취하였다.

표 1. 모형의 보정 및 검증을 위한 홍수사상 자료

홍수사상	기 간	팔당댐 최대방류량 (CMS)	홍수사상	기 간	팔당댐 최대방류량 (CMS)
1	89.7.27 01:00~7.30 18:00	6,485	2	91.7.19 01:00~7.22 18:00	7,027
3	90.6.23 01:00~6.27 06:00	8,600	4	87.8.3 01:00~8.9 24:00	11,068
5	87.8.29 01:00~9.2 24:00	11,745	6	87.7.26 01:00~7.30 24:00	12,194
7	87.8.15 01:00~8.18 24:00	13,000	8	91.7.24 01:00~7.26 24:00	15,302

### 3.3 모형의 보정

모형의 보정을 위한 목적함수로는 고안, 잠수교 및 인도교 지점에서의 매 시각 수위 관측치와 계산치 간의 오차 제곱합이 최소화되도록 하였다. 최적 추정 기법으로는 Marquardt(1963)의 방법에 따른 비선형 회귀분석 방법이 사용되었다. 최적화 기법에 관한 상세한 내용은 Doherty 등(1994) 및 Hill(1992)에 기술되어 있다.

각 홍수사상에 대한 팔당댐 최대 방류량의 순으로 정리된 8개의 홍수사상(표 1 참조) 중 홀수 번째 홍수사상 4개에 대하여 조도계수의 추정을 수행하였다. 모형의 보정은 다음에 기술된 바와 같이 구성된 1, 2 및 8 매개변수 모형에 대하여 홍수사상별로 각각 수행하였다. 우선 전체 구간에 대하여 조도계수를 항상 일정하게 두고(1 매개변수 모형) 조도계수의 추정을 수행하였다. 다음으로는 조도계수의 공간적 변동성을 반영하기 위하여, 한강 분류 구간을 왕숙천 유입지점 상류 및 하류의 2개 구간으로 구성하여 각 구간마다 서로 다른 조도계수를 갖도록 하여, 즉 2개의 매개변수를 갖는 모형을 구성하여, 그에 대한 추정을 수행하였다. 왕숙천 유입지점을 기준으로 하도 구간을 구분한 것은 하천단면 자료의 검토 결과 왕숙천 유입지점의 상류 구간이 하상 변동과 횡단면의 변화가 심하여 하류 구간과는 상당히 다른 하도특성을 나타낼 것으로 판단되었기 때문이다. 또한 유량의 증가에 따라 조도계수가 변화하는 경향을 반영하기 위하여 2 매개변수 모형들의 구간별 조도계수를 유량규모별로 세분화하여 8 매개변수 모형을 구성하였다. 즉, 각 구간에 대하여 유량이 3000 CMS 이하인 경우, 3000~5000 CMS인 경우, 5000~10000 CMS인 경우 및 10000 CMS 이상인 경우 등 4단계로 구분하여, 유량에 따라 각각 다른 조도계수를 갖도록 모형을 구성하여, 보정을 수행하였다. 조도계수는 각 계산점별로 이전 Newton-Raphson 반복계산 단계에서 구해진 유량값에 따라 그에 해당하는 값을 부여하도록 하였다.

1, 2 및 8 매개변수 모형에 대하여 홍수사상별로 추정된 조도계수의 값들은 표 2에 정리된 바와 같으며, 추정된 매개변수를 사용한 계산결과와 관측치와의 RMS 오차는 표 3과 같다. 2 매개변수 모형을 사용한 경우, 왕숙천 유입지점의 상류 구간에 대한 조도계수가 하류 구간에 대한 조도계수에 비하여 큰 경향이 뚜렷이 나타나고 있다. 이러한 경향은 고안-광장 구간에 대하여 추정된 조도계수가 잠수교-인도교 구간의 경우보다 크게 나타난 김원 등(1995)의 연구결과와 일관성이 있는 것으로 볼 수 있다. 8 매개변수 모형을 사용한 매개변수 추정결과로부터 역시 왕숙천 유입지점 상류에 대한 조도계수가 하류 구간에 비하여 크며, 또한 유량이 커질수록 조도계수가 감소하는 경향이 잘 나타나고 있음을 보여주고 있다. 1 매개변수 모형보다는 2 매개변수 모형의 경우에, 또한 2 매개변수 모형보다는 8 매개변수 모형의 경우, 매개변수 추정에 따른 오차가 감소함을 알 수 있다.

### 3.4 모형의 검증

이상과 같이 4개의 홍수사상에 대하여 추정된 조도계수 값들의 하도구간별, 유량규모별 평균

치 (표 2 참조)들을 사용하여 모형의 보정에 사용되지 않은, 표 2의 짝수 번째의 4개 홍수사상에 대한 모의계산을 수행하였다. 계산된 매 시각 수위값과 관측치간의 RMS 오차는 표 4에 나타내었다. 1 매개변수 모형보다는 2 매개변수 모형의 경우에, 2 매개변수 모형보다는 8 매개변수 모형의 경우에 오차가 감소함을 볼 수 있다.

표 2. 조도계수 추정결과

홍수 사상	유량범위 (CMS)	8 매개변수 모형		2 매개변수 모형		1 매개변수 모형
		왕속천 상류	왕속천 하류	왕속천 상류	왕속천 하류	
1	3000 이하	0.0480	0.0370	0.0402	0.0262	0.0313
	3000~5000	0.0416	0.0277			
	5000~10000	0.0369	0.0257			
	10000 이상	—	—			
3	3000 이하	0.0549	0.0498	0.0303	0.0272	0.0283
	3000~5000	0.0331	0.0293			
	5000~8600	0.0299	0.0263			
	10000 이상	—	—			
5	3000 이하	0.0649	0.0302	0.0406	0.0257	0.0308
	3000~5000	0.0488	0.0291			
	5000~10000	0.0395	0.0258			
	10000 이상	0.0369	0.0254			
7	3000 이하	0.0638	0.0400	0.0434	0.0257	0.0314
	3000~5000	0.0517	0.0265			
	5000~10000	0.0391	0.0250			
	10000 이상	0.0354	0.0246			
평균	3000 이하	0.0579	0.0393	0.0386	0.0262	0.0305
	3000~5000	0.0438	0.0282			
	5000~10000	0.0364	0.0257			
	10000 이상	0.0362	0.0250			

표 3. 매개변수 추정에 따른 RMS 오차

단위 : m

모형 \ 홍수 사상	8 매개변수 모형	2 매개변수 모형	1 매개변수 모형
1	0.108	0.219	0.566
3	0.168	0.314	0.354
5	0.196	0.395	0.808
7	0.200	0.427	0.847
평균	0.168	0.339	0.644

표 4. 추정된 조도계수를 적용한 각 모형의 검증에 따른 RMS 오차

단위 : m

모형 \ 홍수 사상	8 매개변수 모형	2 매개변수 모형	1 매개변수 모형
2	0.574	0.632	0.779
4	0.404	0.455	0.879
6	0.431	0.562	0.904
8	0.868	0.882	0.988
평균	0.569	0.633	0.888

#### 4. 결론

하도의 형태특성 등에 따라 하천구간을 구분하고, 각 구간별로 유량규모에 따라 조도계수를 부여하되, 동일한 구간내의 각 계산점에서도 유량에 따라 서로 다른 조도계수의 값을 갖도록 하는 분포형 매개변수 모형을 구성하고, 이를 한강 본류에 적용하여 모형의 보정을 수행하였다.

조도계수와 월류유량계수에 대한 민감도 분석을 실시한 결과, 조도계수에 대해서는 상당히 민감한 것을 볼 수 있었으나, 월류유량계수에 따른 민감도는 미미한 것으로 나타났다. 왕속천 상·하류의 조도계수를 달리 부여하는 2 매개변수 모형에 대한 조도계수 추정 결과 왕속천 상류측의 조도계수가 하류 구간에 비하여 현저히 크게 추정되었으며, 유량에 따라서도 조도계수를 달리 부

여하는 8 매개변수 모형에 대한 보정 결과로부터 유량이 증가함에 따라 조도계수가 감소하는 경향이 명확히 나타났다. 1 매개변수 모형보다는 2 매개변수 모형이, 2 매개변수 모형보다는 8 매개변수 모형이 관측치와 잘 일치하는 결과를 가져옴이 모형의 검증을 통하여 입증되었다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 연구비 지원에 의하여 수행되었으며(과제번호: 961-1205-018-2) 이에 사의를 표한다.

#### 참고문헌

- 김원, 김양수, 우효섭 (1995). "부정류 모형을 이용한 한강 하류부 하도의 조도계수산정." 韓國水文學會誌, 제28권, 제6호, pp. 133-146.
- 서울시 관내 하천제방 안전도 검토 및 치수 종합 대책수립 보고서. (1992). 서울특별시.
- 田庚秀 (1996). "월류흐름을 포함한 부정류 계산모형에 관한 연구." 韓國水資源學會誌, 제29권, 제2호, pp. 153-165.
- 한강 하류연안 개발계획 보고서. (1989). 건설부 서울지방 국토관리청.
- 黃義俊 (1997). "한강 본류에 대한 부정류 계산모형," 석사학위논문, 성균관대학교.
- Becker, L., and Yeh, W.W.-G. (1972). "Identification of parameters in unsteady open channel flow." Water Resour. Res., Vol. 8, No. 4, pp. 956-965.
- Becker, L., and Yeh, W.W.-G. (1973). "Identification of multiple reach channel parameters." Water Resour. Res., Vol. 9, No. 2, pp. 326-335.
- Cunge, J.A., Holly, F.M., Jr., and Verwey, A. (1980). Practical aspects of computational river hydraulics. Pittman.
- Doherty, J., Brebber, L., and Whyte, P. (1994). PEST: model-independent parameter estimation. Watermark Computing.
- Fread, D.L. (1989). "Flood routing models and the Manning n." Proc. of Int. Conf. for Centennial of Manning's Formula and Kuichling's Rational Formula, B.C. Yen, ed., pp. 699-708.
- Fread, D.L., and Smith, G.F. (1978). "Calibration technique for 1-D unsteady flow models." J. Hydr. Div., ASCE, Vol. 104, No. HY7, pp. 1027-1044.
- HEC (1996). UNET: one-dimensional unsteady flow through a full network of open channels, version 3.1 user's manual. US Army Corps of Engineers.
- Henderson, F.M. (1966). Open channel flow. Macmillan.
- Hill, M.C. (1992). "A computer program (MODFLOWP) for estimating parameters of a transient, three-dimensional, ground-water flow model using nonlinear regression." Open-File Report 91-484, U.S. Geological Survey.
- Holly, F.M., Yang, J.C., Schwarz, P., Schaefer, J., Hsu, S.H., and Einhellig, R. (1990). "Numerical simulation of unsteady water and sediment movement in multiply connected networks of mobile-bed channels." IIHR Report No. 343, Iowa Inst. of Hydr. Res., Iowa City, Iowa.
- Liggett, J.A., and Cunge, J.A. (1975). "Numerical methods of solution of the unsteady flow equations." Unsteady flow in open channels, K. Mohmmmod and V. Yevjevich, eds., Water Resour. Publications, Fort Collins, Colo., pp. 89-182.
- Marquardt, D.W. (1963). "An algorithm for least-square estimation of nonlinear parameters." J. Soc. of Ind. and Appl. Math., Vol. 11, No. 2, pp. 431-441.
- Wasantha Lal, A.M. (1995). "Calibration of riverbed roughness." J. Hydr. Engrg., ASCE, Vol. 121, No. 9, pp. 664-671.
- Wormleaton, R., and Karmegam, M. (1984). "Parameter optimization in flood routing." J. Hydr. Engrg., ASCE, Vol. 110, No. 12, pp. 1799-1814.