

Collocation FE [에 의한 부정류 해석

한건연*, 박재홍**, ○이올래***, 이재영***

1. 서 론

개수로 부정류에 대한 유한요소법의 적용에 있어 수면형의 불연속성이 없는 점변부정류의 경우에도 기존의 Galerkin 방법은 이 기법이 가지는 수치적 비감쇠 특성으로 인하여 하도내의 부정류를 계산하는 방법으로 성공적이지 못하였고 최소한의 방법제시에 그쳤다. Collocation 기법은 이러한 면에서 유한요소법이 가지는 여러 가지 장점을 제공할 수 있다. 즉 유한요소방정식의 수식화에서 복잡한 과정의 적분계산을 필요로 하지 않으며, 그 결과로 나타나는 매트릭스 방정식의 결과는 유한요소법의 기본적인 장점을 유지하면서도 이론적으로는 단순하고 수치적으로 안정된 접근법을 제시한다.

Collocation 유한요소모형은 다양한 흐름조건에 대하여 적용하며 그 결과를 비교검토 함으로써 유한요소기법의 부정류에 대한 해석기법을 체계화하여 발전시키고자 한다. 댐 파괴와 같은 급변 부정류와 실제하천에서의 점변부정류의 경우에 대해서 그 결과를 기존의 해석기법과 비교하여 본 연구모형의 적용성을 입증하였다.

2. 기본 방정식

부정류 해석을 위한 1차원 Saint-Venant식은 연속방정식과 운동 방정식에 의해 기술된다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} - gA(S_0 - S_f) = 0 \quad (2)$$

* 경북대학교 토목공학과 교수

** 세명대학교 토목공학과 전임강사

*** 경북대학교 대학원 토목공학과 박사과정

여기서, β 는 운동량계수, A 는 흐름의 단면적, B 는 수로폭, Q 는 유량, h 는 수심, x 는 저수지의 상류단으로 부터의 거리, t 는 시간, g 는 중력가속도, S_0 는 수로바닥경사, S_1 는 마찰경사이다.

식 (1), (2)에 대한 가중잔차의 적용은 아래와 같다.

$$\int_L \left[\frac{\partial(B\hat{h})}{\partial t} + \frac{\partial\hat{Q}}{\partial x} \right] \omega_i dx = 0 ; \quad (i=1,2,3,4) \quad (3)$$

$$\int_L \left[\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\hat{Q}^2}{B\hat{h}} \right) + gB\hat{h} \frac{\partial\hat{h}}{\partial x} - gB\hat{h} \left(S_0 - \frac{Q|\hat{Q}|}{K^2} \right) \right] \omega_i dx = 0 ; \quad (i=1,2,3,4) \quad (4)$$

여기서, $K = \hat{h}$ 의 함수, $\omega_i(x)$ 는 공간적으로 4개의 방정식을 만드는 가중함수이다. Collocation 기법에서 w_i 는 dirac delta 함수로서 선택된다.

Hermitian 다항함수는 공간영역에서 훌륭한 해법을 제시하기 때문에 본 모형에서 사용되어진다. 그것은 두 개의 경계절점을 가지게 되며, 다음과 같이 연속적으로 정의된 요소에 대해서 흐름에 대한 근사적인 수심은 \hat{h} 이고 유량은 \hat{Q} 이다.

$$h \approx \hat{h} = \sum_{j=1}^4 h_j(t) N_j(x); \quad Q \approx \hat{Q} = \sum_{j=1}^4 Q_j(t) N_j(x) \quad (5)$$

여기서 j 는 공간영역에서 각각의 요소에 대한 자유도의 수이다. h_j 는 각 절점당 2개 ($h, \partial h / \partial x$), Q_j 는 또한 각 절점에 대해서 2개 ($Q, \partial Q / \partial x$) 모두 4개의 자유도를 나타내며, N_j 는 완전하게 요구조건을 만족하는 독립기저함수이다.

하나의 요소에서 두 개의 절점에 대한 1차원에서 네개의 Hermitian 기저 함수, N_j 는 식 (6)과 같이 기술될 수 있다.

$$\begin{aligned} N(0, -1) &= \frac{1}{4} (\xi-1)^2 (\xi+2) \\ N(0, +1) &= -\frac{1}{4} (\xi+1)^2 (\xi-2) \\ N(1, -1) &= \frac{1}{8} L^{(e)}(\xi+1)^2 (\xi-2) \\ N(1, +1) &= \frac{1}{8} L^{(e)}(\xi-1)^2 (\xi+2) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $N_j(x)$ 는 일차원 Hermitian 기저함수, ξ 는 국지 좌표계, 그리고 $L^{(e)}$ 는 각 요소의 길이를 나타낸다.

3. 유한요소방정식

3.1 공간항의 해석

본 연구에서는 지배방정식을 풀기 위해서 Collocation 유한요소기법을 적용하였다. 국지좌표계 ξ 는 하나의 요소에 대해서 ξ 이 -1에서 1까지 변화도록 정의되었다. ξ 에 있어서, 단면적 A에 대한 공간적 미분치는 식 (7)과 같이 근사화시킬 수 있다.

$$\frac{\partial \hat{A}(x,t)}{\partial x} = \frac{d\xi(\xi)}{dx} \sum_{j=-1,1} \left\{ \frac{\partial N_{0,j}(\xi)}{\partial \xi} A_j(t) + \frac{\partial N_{1,j}(\xi)}{\partial \xi} \frac{dx_j}{d\xi} \frac{\partial A_j(t)}{\partial x} \right\} \quad (7)$$

Collocation 기법은 가중잔차법의 특수한 경우로서 식 (8), (9)와 같이 기술된다.

$$\int R_1 \omega(x) dx = 0 \quad (8)$$

$$\int R_2 \omega(x) dx = 0 \quad (9)$$

여기서 잔차 R_1 과 R_2 는 식 (10), (11)과 같이 기술된다.

$$R_1 = \frac{\partial}{\partial t} (\hat{A}) + \frac{\partial}{\partial x} \hat{Q} = 0 \quad (10)$$

$$R_2 = \frac{\partial}{\partial t} (\hat{Q}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta \hat{Q}^2}{\hat{A}} \right) + g \hat{A} \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \right) + g A (S_0 - \hat{S}_f) = 0 \quad (11)$$

식 (8)~(9)의 계산은 Collocation 지점에 대해서 산정되어진다. Hermitian 다항식의 사용은 각각의 종속변수에 대해서 각 절점에서 두 개의 미지수로 나타나게 되어, 각 요소안에서 두 개의 Collocation point를 필요로 한다. Collocation point는 Gaussian 구적점(± 0.577350269)이나 Lobatto 구적점(± 1.0 와 0.0)을 이용할 수 있다.

3.2 시간항의 해석

시간에 대한 이산화는 식 (12), (13)과 같은 시간 가중 유한차분기법을 통해서 수행될 수 있다. 따라서, 각각의 종속변수에서의 증분변화에 있어서 기본식은 반복해석기법으로 그해를 구할 수 있다.

$$\theta(Q_{i+1}^{j+1}-Q_i^{j+1})+(1-\theta)(Q_{i+1}^j-Q_i^j)+\frac{\Delta x_i}{2\Delta t}[(A_{i+1}^{j+1}+A_{i+1}^j)-(A_i^j+A_i^{j+1})]=0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x_i}{2\Delta t}[(Q_{i+1}^{j+1}+Q_{i+1}^j)-(Q_i^j+Q_i^{j+1})]+\theta\left\{\left(\frac{\beta Q^2}{A}\right)_{i+1}^{j+1}-\left(\frac{\beta Q^2}{A}\right)_i^{j+1}+g\bar{A}_i^{j+1}[h_{i+1}^{j+1}-h_i^{j+1}\right. \\ & \left.+(S_f)_i^{j+1}\Delta x_i+(S_0)_i^{j+1}\Delta x_i]\right\}+(1-\theta)\left\{\left(\frac{\beta Q^2}{A}\right)_{i+1}^j-\left(\frac{\beta Q^2}{A}\right)_i^j+g\bar{A}_i^j[h_{i+1}^j-h_i^j+(S_f)_i^j\Delta x_i\right. \\ & \left.+(S_0)_i^j\Delta x_i]\right\}=0 \end{aligned} \quad (13)$$

4. 댐 파괴류 해석

Fennema와 Chaudhry(1987)로부터 재현된 이 수치실험은 마찰없는 수평수로에서 댐의 순간적인 파괴를 모의수행하는 경우이다. 수로 형상은 직사각형의 단위폭단면으로 구성되어 있고, 대상구간은 2000 m를 80개 요소로 구분하여 각 요소는 25 m의 길이를 가지도록 구성하였다. 초기유량은 모든 절점에서 0 m³/sec로 설정하였고 초기수위는 영역의 상류단의 1/2을 통해서 초기수심 H₀는 10 m로 하고 하류단의 1/2 영역에 대해서 H₁은 5 m의 수심(H₁/H₀=0.5)조건하에서 모의수행 되었고 경계 조건은 지정된 양끝단에서 유량이 0 m³/sec로 주어졌다.

주어진 조건에 부합하는 적절한 시간가중치가 필요하였다. 본 모형에서 사용된 시간가중치는 0.7을 사용하였다. 그림 1에서 보는 바와 같이 시간이 지나가면서 수심의 변화가 전형적인 댐파괴의 형상을 나타내고 있으며, 댐파괴에 의한 수면형상의 모의가 만족할만한 결과로 나타나고 있다.

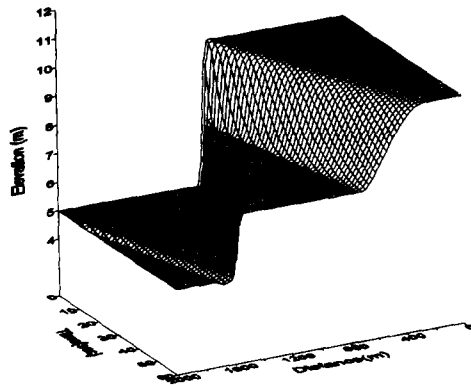


그림 1 댐 파괴류에 의한 수면의 3차원 전파형상

본 연구결과에서 보는 바와 같이 collocation 기법을 이용한 본 모형은 매우 가능성 있는 기법으로 나타났다. 댐 파괴의 문제에 대해 좀 더 정교한 수치실험이 다양한 H_1/H_0 비, 적절한 감쇠계수의 도입, Cr 및 시간가중치 등을 고려하여 해석되어야 할 것으로 판단되었다.

5. 홍수류해석에 대한 적용

본 모형을 실제 하도구간의 홍수류 해석의 경우에 적용하였다. 대상구간은 하도단면의 변화가 비교적 완만한 태화강 하류부를 선정하였고, 이 구간 상류부에서 설계 홍수수문곡선과 하류부에서 고조위조건에 대하여 홍수파 해석을 실시하였다. 태화강 하류부까지의 거리 5.0 km에 대해서 28개의 요소를 취하였는데 평균적인 하도경사는 0.00037이고 Manning의 조도계수는 관련문헌을 참조하여 0.023으로 설정하였다. 또한 평균적인 계산거리구간은 178 m, 계산시간간격은 0.5시간으로 하였다. 본 연구모형에 의한 계산결과는 Preissmann 기법을 사용하는 NETWORK 모형 (Fread, 1985)에 의한 계산치와 비교함으로써 본 계산결과의 적용성을 입증하고자 하였다. 특히 본 Collocation 유한요소모형은 자연하도 단면의 특성을 그대로 반영한 HEC-2 단면형태로 입력이 가능하도록 구성하여 단면입력을 위한 별도의 추가작업을 필요하지 않았다.

그림 2는 no. 10, 20에서의 Collocation 기법에 의해 계산된 유량수문곡선을 도시한 것으로서 Collocation 기법에 의한 계산결과는 기존의 NETWORK모형에 의한 계산치와 비교하여 주요지점에서의 유량과 수위 수문곡선 및 유량의 종단현상에 있어서 대등한 결과를 나타내고 있어서 본 연구모형의 활용성을 입증하였다.

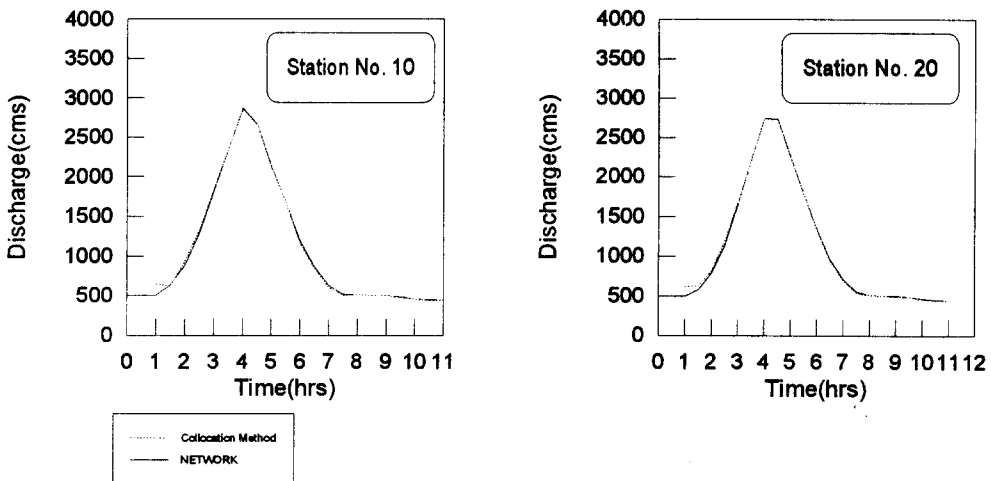


그림 2 주요지점별 수문곡선의 비교

6. 결 론

개수로의 부정류해석을 위해서 Saint-Venant식을 Collocation 유한요소법에 의해 해석한 것으로서 공간항에 대하여 Hermitian 보간함수를 사용하는 유한요소기법, 시간항에 대해서는 유한차분기법을 조합하여 반복계산기법을 적용함으로써 해석하였다. 댐 파괴의 경우에 대한 적용에 있어 본 Collocation 모형은 댐 파괴의 급격한 선단부를 합리적으로 보존하며 하류부로 전파되고 있었으며 모의수행결과는 해석적 계산결과와 잘 일치하고 있었다. 태화강 하류부의 점변 부정류해석의 경우를 본 모형에 적용한 경우 Collocation 유한요소법에 의한 계산결과는 기존의 NETWORK 모형에 의한 계산치와 비교할 때 주요지점에서의 유량과 수위 수문곡선에 있어서 대등한 결과를 나타내었다. Collocation 기법에 의한 유한요소모형은 균일하도단면 뿐만 아니라 자연하도 단면을 HEC-2 단면형태로 효율적 처리를 할수있었고 급변부정류에 대해서 정확하고 수치적으로 안정된 모의수행이 이루어졌다.

< 참고문헌 >

- 건설부 (1987). *태화강 하천정비 기본계획*. 울산시.
- 한건연, 박재홍, 이종태 (1996). 개수로내의 점변 및 급변부정류에 대한 유한요소해석: I. 이론 및 수치안정성 해석 *한국수자원학회지* 제 26권, 제6호, pp. 167-178.
- 한건연, 박재홍, 이을래 (1997). 개수로내의 점변 및 급변부정류에 대한 유한요소해석: II. 적용예 *한국수자원학회지* 제 30권, 제1호, pp. 35-44.
- Alam, M. M., and Bhuiyan, M. A. (1995). "Collocation finite element simulation of dam-break flows." *J. of Hyd. Eng.*, ASCE, Vol. 121, No. 2, pp. 118-128.
- DeLong, L. L. (1985). "Extension of the Unsteady one-dimensional open channel flow equations for flow simulation in meandering channel with floodplains" in *selected papers in the hydrologic sciences, USGS, Water-Supply Paper 2220*, pp. 101- 105.
- Fennema, R. J., and Chaudhry, M. H. (1987). "Simulation of one-dimensional dam-break flows." *Int. J. of Hyd. Res.* Vol. 25, No. 1, pp. 41-51.
- Froehlich, D. C. (1990). "Hermite-Galerkin model for dam-break floods" *Proc. of 1990 Nat. Conf. on Hyd. Eng.*, ASCE, pp. 557-562.
- Lapidus, L. and Pinder, G. F. (1982). "Numerical solution of partial differential equations in science and engineering". John Wiley and Sons, pp. 1-677.