韓國精密工學會 '97年度 春季學術大會論文集 pp.389~394

Tetra-cosine Rule에 의한 Vector Space고찰

A Study on the Vector Space by Taking the Tetra-cosine Rule

김 건회[*1], 이 수종[*2], 최창용[*1], 김 홍건[*1]

ABSTRACT

Consider a tetrahedron is composed of six dihedral angles φ_i(i=1,2, ⋯, 6), and a vertex of a tetrahedron is also three dihedral angles. It will assume that a vertex A, for an example, is composed of three angles defined such as α, β, and γ, and then there is a corresponding angle can be given as φ_1, φ_2, φ_3. Here, in order to differentiate between a conventional triangle and dihedral angle, if a dihedral angle defined in this paper is symbolized as φ_A, the value of $\cos\theta$ of φ_A, in a trigonometric function rule, can be defined to ***tecos*** φ_A and it is defined as a **tetradcdral cosine** φ or simply called a **tecos** φ. Moreover, in a simillar method, the dihedral angle of tetrahedron φ_A is given as: value of $\sin\theta$ of φ_A can define a **tetra sin** φ_A, and value of $\tan\theta$ of φ_A is a **tetra tan** φ_A.

By induction it can derive that a tetrahedral geometry on the basis of suggesting a geometric tetrahedron.

Key Words: Triangle Function, Vector Space, Tetrahedral Geometry, Tetrahedral Cosine Rule

1. 서 론

삼각형의 내심과 외심, 내합과 무게중심, 그리고 삼각형의 기본꼴인 **直角三角形**에서 도출된 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 이용하여 삼각형의 길이와 면적의 변화를 해석하고, 이것을 **球面三角法** 으로 발전시켜 **曲面**에 있어서의 삼각형의 변화를 유도할 수 있다. 그러나 모든 **多面體**의 기본형이라할 수 있는 사면체의 **規則**을 **活用**하여 삼각형의 면적과 $\cos\theta$의 제1정리, 제2정리 및 **斜線式**, Tetra-cosine Rule이라 명칭하고, 이을 이용하여 Vector Space에 있어서의 운동방정식의 해석을 간단하고도 실용적으로 구할 수 있다.

따라서, 본연구에서 정의한 Tetra-cosine Rule의 기본적인 개념을 정립하고, 간단한 운동방정식에 적용하여 이를 증명하고자 한다.

*1 전주대학교 기계공학과

*2 창원대학교 기계공학과, 학생회원

2. Tetra-cosine Rule의 정의

삼각형의 기본꼴인 **直角**삼각형이 $a^2+b^2=c^2$ 으로 이루어 짐을 알 수 있다. 마찬가지로 사면체의 기본꼴도 한 꼭지점이 모두 90도로 이루져있을 때, 면적은 $S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$ (단, S_i, I=1,2,3,4)와 같은 식이 **成立**된다 . 이것을 그림으로 **圖式化**하면 Fig.1과 같다.

(단, 삼각형의면적

$\triangle ABC=S_4$, $\triangle OAB=S_1$ $\triangle OCA=S_2$, $\triangle OBC=S_3$)

Fig.1에서 S_4와 S_1이 이루는 각을 φ_A라 하면

$\cos\varphi_A=\dfrac{S_1}{S_4}$ 이고, 이를 ***이면각*** φ_A (Dehedral angle φ_A)로 하고, 이를 이용하여 사면체와 이면각의 관계를 고찰한다.

우선 기본꼴 사면체를 일반 사면체로 확장시키면 일반 사면체에서 하나의 사면체는 6개의 "이면

각 φ"을 가지고 있고, 한 개의 꼭지점은 3개의 이면각으로 구성된다. 예로 꼭지점 A가 각각 α, β, γ로 이루어져 있을 때 이면각은 Fig.2에서와 같이 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$로 구성된다.

일반 사면체에서 6개의 꼭지점중 임의의 한 꼭지점 A를 잡았을 때의 이면각 3개를 왼쪽부터 차례로 $\varphi_{A_1}, \varphi_{A_2}, \varphi_{A_3}$로 나타내기로 한다.

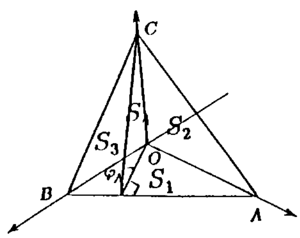

Fig.1 A General Form of the Tetrahedron by Representing a Triangle

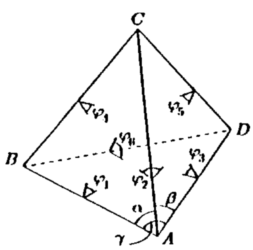

Fig.2 A Tetrahedron Composed of Six Dihedral Angles

2.1 tesin φ_A, tecos φ_A, tetan φ_A의 정의

사면체의 이면각 φ_{A_1}의 $\sin \varphi_{A_1}$값을 tetrasin φ_{A_1}라 표기하고 "tetrahedral sin φ " 또는 줄여서 " te sin φ "로 읽기로 한다. 또한 사면체의 이면각 φ_{A_1}의 $\cos \varphi_{A_1}$값을 tecos φ_{A_1}라 표기하고 "tetrahedral cos φ "또는 줄여서 " tetra cos φ"로 읽기로 한다. 그리고, 사면체의이면각 φ_{A_1}의 $\tan \varphi_{A_1}$값을 tetan φ_{A_1}라 표기하고 "tetrahedral tan φ"또는 줄여서" tetra tan φ"로 읽기로 한다.

2.2 tecosφ_A 제 1의 정리

Fig.3에서

$\triangle ABC = S_4$, $\triangle BCD = S_1$, $\triangle CDA = S_2$, $\triangle DAB = S_3$

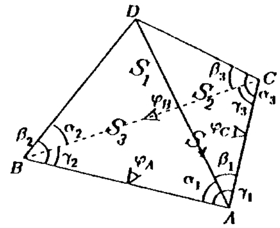

Fig.3 A Tetrahedron Composed of Six Dihedral Angles and Areas S_1, S_2, S_3, and S_4

로 치환하면

$$S_4 = S_1 \text{ tecos } \varphi_{B_1} + S_2 \text{ tecos } \varphi_{C_1} + S_3 \text{ tecos } \varphi_{A_1}$$

인 관계가 성립하고 이것을 "**tetrahedral** $\cos \varphi_A$ **제 1 정리**"라 정의한다.

< 증명 >

Fig.4(a,b,c)에서 평면 ABC에 점 D에서 내린 垂線과 만나는 점을 O라 하면 면적 S_4는 3개로 나누어진다. 즉, $S_4 = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$인 관계가 성립된다. 그런데

$$\triangle OAB = \triangle ABD \text{ tecos } \varphi_{A_1} = S_3 \text{ tecos } \varphi_{A_1}$$

$$\triangle OBC = \triangle BCD \text{ tecos } \varphi_{B_1} = S_1 \text{ tecos } \varphi_{B_1}$$

$$\triangle OCA = \triangle CAD \text{ tecos } \varphi_{C_1} = S_2 \text{ tecos } \varphi_{C_1}$$

이므로

$$S_4 = S_1 \text{ tecos } \varphi_{B_1} + S_2 \text{ tecos } \varphi_{C_1} + S_3 \text{ tecos } \varphi_{A_1}$$

이 성립된다.

Fig.5와 같이 주어진 각이 $\angle \beta 2 > \frac{\pi}{2}$인 사면체의 경우에는 다음과 같다. 평면 ABC의 확장 평면 D에서 내린 수선의 발을 O라 하면 면적 S_4는 3개로 나누어 표현되어 진다.

즉,

$S_4 = \triangle OAB - \triangle OBC + \triangle OAC$ 인 관계가 성립된다.

그런데 $\triangle OAB = \triangle ABD \text{ tecos } \varphi_{A_1} = S_3 \text{ tecos } \varphi_{A_1}$이다.

$\triangle OAC = \triangle ACD \text{ tecos } \varphi_{C_1} = S_2 \text{ tecos } \varphi_{C_1}$이다.

그리고, $\varphi'_{B_1} = \pi - \varphi_{B_1}$ 이므로

$$-\triangle OBC = -\triangle BCD \text{ tecos } \varphi'_{B_1} = S_1 \text{ tecos } \varphi_{B_1}$$

이다.

따라서

$$S_4 = S_1 \text{ tecos } \varphi_{B_1} + S_2 \text{ tecos } \varphi_{C_1} + S_3 \text{ tecos } \varphi_{A_1}$$

이 성립된다.

또한, Fig.5(a,b,c)와 같이 角인 경우에 있어서는 $\angle \alpha 2 > \frac{\pi}{2}$, $\angle \beta 2 > \frac{\pi}{2}$, $\angle \gamma 2 > \frac{\pi}{2}$인 사면체의 경

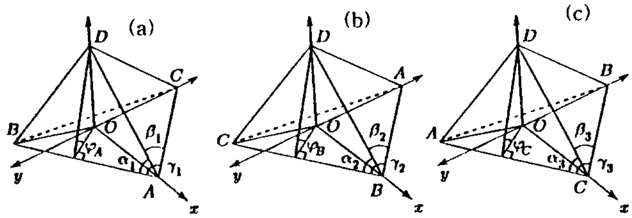

Fig.4 A Schematic Tetrahedron for Identifying the Tetrahedral $\cos\varphi_A$ Rule

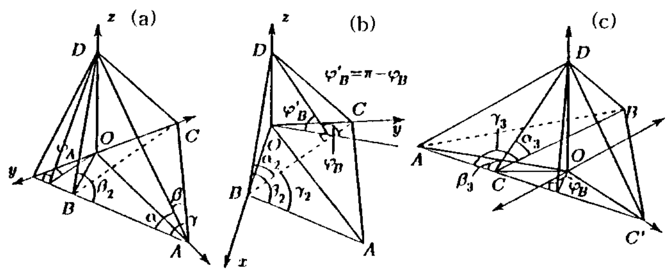

Fig.5 A Schematic Tetrahedron for Identifying the Tetrahedral $\cos\varphi_A$ Rule (in case $\angle\beta > \pi/2$)

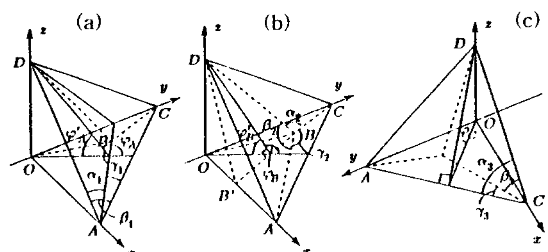

Fig.6 A Schematic Tetrahedron for Identifying the Tetrahedral $\cos\varphi_A$ Rule

우에 있어서, 평면 ABC를 포함한 확장 평면에 D에서 내린 수선의 발을 O라 하면 면적 S_4는 3개의 면적으로 나누어 표현 된다.

즉,

$$S_4 = -\triangle OAB - \triangle OBC + \triangle OAC$$

그런데 여기서

$\triangle OAC = \triangle ACD\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{C_1} = S_2\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{C_1}$ 이고,

또한 $\varphi'_{A_1} = \pi - \varphi_{A_1}$ 이고 $\varphi'_{B_1} = \pi - \varphi_{B_1}$ 이므로

$-\triangle OAB = -\triangle ABD\,\mathrm{tecos}\,\varphi'_{A_1} = S_3\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{A_1}$ 이다.

$-\triangle OBC = -\triangle BCD\,\mathrm{tecos}\,\varphi'_{B_1} = S_1\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{B_1}$ 이다.

$$\therefore\ S_4 = S_1\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{B_1} + S_2\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{C_1} + S_3\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{A_1}$$

2.3 tecosφ_A 제 2의 정리

Fig.7에서와 같이 삼각형의 면적을

$\triangle ABC = S_4$, $\triangle BCD = S_1$, $\triangle ACD = S_2$, $\triangle ABD = S_3$

로 치환하면

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1} - 2S_2S_3\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2} - 2S_3S_1\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3}$$

(단, φ_{D_1}은 S_1과 S_2, φ_{D_2}는 S_2와 S_3, φ_{D_3}는 S_3와 S_1의 이면각)인 관계가 성립하고 이을 "**tetrahedral**

$\cos\varphi_A$ 제 2정리"라 한다.

< 증명 >

앞에서 증명한 " $\mathrm{tecos}\varphi$ 제 1정리"를 이용해서 위의 내용을 증명하면 다음과 같다.
Fig.8(a)에서

$S_1 = S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1} + S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_1} + S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_1}$

양변에 S_1를 곱하면

$S_1^2 = S_1S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1} + S_1S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_1} + S_1S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_1}$

와 같은 관계가 성립된다.
Fig.8(b)에서

$S_2 = S_1\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_2} + S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2} + S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_2}$

양변에 S_2를 곱하면

$S_2^2 = S_1S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_2} + S_2S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2} + S_2S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_2}$

와 같은 관계가 성립된다.
또한, Fig.8(c)에서

$S_3 = S_1\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3} + S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_3} + S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_3}$

양변에 S_3를 곱하면

$S_3^2 = S_1S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3} + S_2S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_3} + S_3S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_3}$

와 같은 관계가 성립된다.
같은 방법으로 Fig.8(d)에서

$S_4 = S_1\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_4} + S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_4} + S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_4}$

양변에 S_4를 곱하면

$S_4^2 = S_4S_1\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_4} + S_2S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_4} + S_3S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_4}$

와 같은 관계가 성립된다.
여기서, 위 결과들을 S_1^2, S_2^2, S_3^2은 더하고 S_4^2을 빼면 $S_1^2+S_2^2+S_3^2-S_4^2=K$인데, 여기서 좌변의 K에 대하여 정리하면 다음과 같은 식이 성립된다

$$\begin{aligned} K = {} & S_1S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1} + S_1S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_1} + S_1S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_1} \\ & + S_1S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_2} + S_2S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2} + S_2S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_2} \\ & + S_1S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3} + S_2S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_3} + S_3S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_3} \\ & - S_1S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_4} - S_2S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_4} - S_3S_4\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_4} \end{aligned}$$

여기서 φ_{D_3}는 면 S_1과 S_3가 이루는 이면각의 크기를 말하고 φ_{B_1}은 면 S_3와 S_1이 이루는 이면각의 크기를말하므로 $\varphi_{D_3}=\varphi_{B_1}$이다.

따라서 $\mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3} = \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_1}$ 이 성립 된다.

같은 방법으로 적용하면 共通的인 값을 가지는 $\mathrm{tecos}\,\varphi$가 존재한다. 즉,

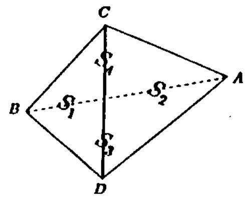

Fig.7 A Schematic Tetrahedron for Identifying the Tetrahedral $\cos\varphi_A$ Rule II

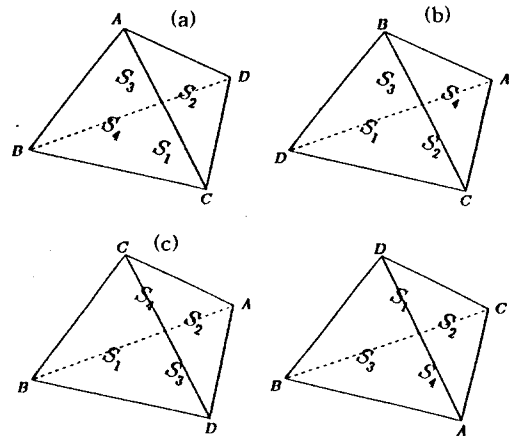

Fig.8 A Schematic Tetrahedron for Identifying the Tetrahedral $\cos\varphi_A$ Rule I

$\mathrm{tecos}\,\varphi_{B_4} = \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_1},\ \ \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_4} = \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_2}$

$\mathrm{tecos}\,\varphi_{A_4} = \mathrm{tecos}\,\varphi_{B_3},\ \ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1} = \mathrm{tecos}\,\varphi_{C_2}$

$\mathrm{tecos}\,\varphi_{B_1} = \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3},\ \ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2} = \mathrm{tecos}\,\varphi_{A_3}$

그러므로 위의 식 K를 정리하면

$K =$

$2S_1S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1} + 2S_2S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2} + 2S_3S_1\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3}$

이 된다.
따라서

$S_1^2+S_2^2+S_3^2-S_4^2=K,\quad S_1^2+S_2^2+S_3^2-K=S_4^2$

와 같이 정리된다. 그리고 이것에 K값을 대입하면

$$\begin{aligned} S_4^2 = {} & S_1^2+S_2^2+S_3^2-(2S_1S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1} + 2S_2S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2} \\ & + 2S_3S_1\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4^2 = {} & S_1^2+S_2^2+S_3^2 - 2S_1S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1} \\ & - 2S_2S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2} - 2S_3S_1\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3} \end{aligned}$$

와같은 관계가 성립된다.

그런데 한 꼭지점에서 각 α, β, γ가 주어질 때 이면각의 크기를 구하는 방법은 구면 삼각법[1]

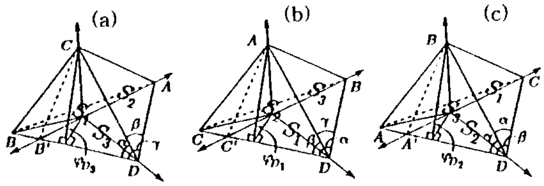

Fig.11 A Obtaining Method of Dihedral Angles by Taking Tetrahedral cosine Rule for the Three Cases

$S_3 = \frac{1}{2} a\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ 이므로 $\text{tesin}\varphi_{A_1} = \frac{\frac{1}{2} aa_2}{S_3}$ 이다.

이것을 a_2에관해서 정리를 하면 $a_2 = \frac{2S_3 \text{ tesin}\varphi_{A_1}}{a}$ 으로 주어진다. 여기서, a_2는 $\triangle ABC$를 밑면으로 할 때 높이와 같다. 따라서 體積는 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{3} a_2 S_4 = \frac{2}{3} S_3 S_4 \frac{1}{a} \text{ tesin}\varphi_{A_1}$$

또한, Fig.12(b)에서 *tetra sine φ rule*을 적용하면,

$$\text{tesin}\varphi_{A_1} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{\frac{1}{2} aa_2}{\frac{1}{2} a\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{\frac{1}{2} aa_2}{S_3}$$

이 된다. 여기서 $\therefore a_2 = \frac{2S_3 \text{ tesin}\varphi_{A_1}}{a}$ 으로 주어진다. 그리고 사면체 $ABCD$에서는 a_2는 $\triangle ABC$를 밑면으로 할 때 높이와 같으므로 體積 V는 아래와 같이 주어진다.

$$V = \frac{1}{3} a_2 S_4 = \frac{2}{3} S_3 S_4 \frac{1}{a} \text{ tesin}\varphi_{A_1}$$

또한, 위의 결과를 변형시켜보면 체적공식을 사면체의 길이와 각만으로도 나타낼 수가 있다.
즉,

$S_2 = \frac{1}{2} bc\sin\beta,\ S_3 = \frac{1}{2} ab\sin\alpha$, 그리고 $S_4 = \frac{1}{2} ac\sin\gamma$ 일 때, 체적 V는 다음과 같다.

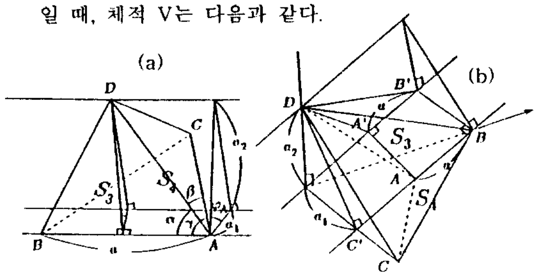

Fig.12 A Obtaining Method of Vector Space Volume by Taking Tetrahedral cosine Rule

$$V = \begin{cases} \frac{2}{3} S_3 S_4 \frac{1}{a} \text{ tesin}\varphi_{A_1} = \frac{1}{6} abc\sin\gamma\sin\alpha \text{ tesin}\varphi_{A_1} \\ \frac{2}{3} S_2 S_3 \frac{1}{b} \text{ tesin}\varphi_{A_2} = \frac{1}{6} abc\sin\alpha\sin\beta \text{ tesin}\varphi_{A_2} \\ \frac{2}{3} S_4 S_2 \frac{1}{c} \text{ tesin}\varphi_{A_3} = \frac{1}{6} abc\sin\beta\sin\gamma \text{ tesin}\varphi_{A_3} \end{cases}$$

3. 결 언

이제까지 증명한 것과 도출한 여러 공식들을 삼각형과 사면체를 비교해서 요약을 하면 다음과 같다.

1) 각과 길이가 주어질 때 面積 S는
$S = \frac{1}{2} ab\sin\alpha$ 으로 표현할수 있다.

2) 양각 α, β와 길이 c, a 주어질 때,
$b = c\cos\alpha + a\cos\beta$ 으로 표현할수 있다.

3) 두 길이 c, b 와 각 a가 주어질 때,
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ 으로 표현할수 있다.

같은 방법으로 사면체에 대하여 적용하면,

4) Vector space에서의 사면체 체적은 다음과 같이 표현된다.

$$V = \frac{2}{3} S_3 S_4 \frac{1}{a} \text{ tecos}\varphi_{A_1} = \frac{1}{6} abc\sin\alpha\sin\gamma \text{ tesin}\varphi_{A_1}$$

단, φ_{A_1}은 $\triangle ABD$ 즉 S_3와 $\triangle ABC$ 즉 S_4가 이루는 이면각이다.

5) 세개의 이면각 $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$와 면적 S_1, S_2, S_3로 주어질 때
$S_4 = S_1 \text{ tecos}\varphi_B + S_2 \text{ tecos}\varphi_C + S_3 \text{ tecos}\varphi_A$
으로 표현된다.

6) 한개의 꼭지점에서 이면각 $\varphi_{D_1}, \varphi_{D_2}, \varphi_{D_3}$로 주어질 때,

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2 \text{ tecos}\varphi_{D_1} - 2S_2S_3 \text{ tecos}\varphi_{D_2} - 2S_3S_1 \text{ tecos}\varphi_{D_3}$$

으로 표현된다.

參考文獻

(1) Dennis G. Zill and Michael R. Cullen, *Advanced Engineering Mathematics*

에 의해서도 구할수 있으나 본연구에서 제시한 *tetra-cosine rule*을 적용하여 구하면 보다 단순하고도 간편하게에도 얻을 수 있다.

Fig.9에서와 같이 $\overline{AC'}=1$ 로 놓고 각각의 길이를 계산하면 $\overline{C'B'}=|\sin\alpha|$ 이고 $\overline{AB'}=|\cos\alpha|$이므로 $\overline{B'D'}=\overline{AB'}|\tan\gamma|=|\cos\alpha\tan\gamma|$가 된다.
또한,

$$\overline{D'A}=\frac{\overline{AB'}}{|\cos\gamma|}=\left|\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right| \text{ 이고,}$$

$$\overline{C'D'}^2=1+\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)^2-2\left|\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right|\cos\beta$$

이 성립된다. 위의 결과를 가지고 Fig.10과 같은 △B'C'D'만을 분리해서 " cos θ 제2정리" 이용하면 다음과 같이 됨을 알수있다.

$$\cos\varphi_A=\frac{\overline{B'D'}^2+\overline{B'C'}^2-\overline{C'D'}^2}{2\overline{B'D'}\,\overline{B'C'}}$$

$$=\frac{(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha\tan\gamma)^2-1-\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)^2+2\left|\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right|\cos\beta}{2|\sin\alpha\cos\alpha\tan\gamma|}$$

$$=\frac{(\sin\alpha\cos\gamma)^2+(\cos\alpha\sin\gamma)^2-(\cos\gamma)^2+2|\cos\alpha\cos\gamma|\cos\beta}{2|\sin\alpha\sin\gamma\cos\alpha\cos\gamma|}$$

$$=\frac{-(\cos\gamma\cos\alpha)^2-(\cos\alpha\cos\gamma)^2+2|\cos\alpha\cos\gamma|\cos\beta}{2|\cos\alpha\cos\gamma\sin\alpha\sin\gamma|}$$

$$=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{|\sin\alpha\sin\gamma|}$$

이다.
그런데$0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$,이므로 $\sin\alpha>0$, $\sin\beta>0$, $\sin\gamma>0$이다. 또한, φ_A는 사면체의 이면각을 나타내므로 $0<\varphi_A<\pi$ 이므로.

$$\cos\varphi_A=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{|\sin\alpha\sin\gamma|}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

가 성립된다. 위 결과 값을 가지고 사면체의 이면각 φ_A의 $\cos\theta$ 값, 즉 tecosφ_A로 나타내면 다음과 같이 주어진다. Fig.11에서

$\triangle DBC=S_1$, $\triangle DAC=S_2$, $\triangle DBA=S_3$ 라 두면

$$S_3S_1\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3}\rightarrow\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3}=\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}$$

$$S_1S_2\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1}\rightarrow\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$S_2S_3\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2}\rightarrow\ \mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

이 성립된다.
요약하면 "tetrahedral cosφ_A 제 2정리"는,

$$S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_1S_2\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{D1}-2S_2S_3\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{D2}-2S_3S_1\,\mathrm{tecos}\,\varphi_{D3}$$ 으로 주어 진다.

단, 여기서

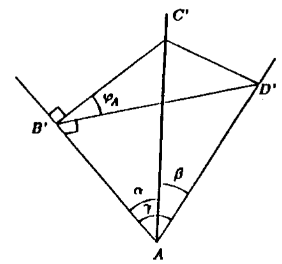

Fig.9 A Obtaining Method of Dihedral Angles

$$\mathrm{tecos}\,\varphi_{D_1}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\mathrm{tecos}\,\varphi_{D_2}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\mathrm{tecos}\,\varphi_{D_3}=\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}.$$

을 의미한다.

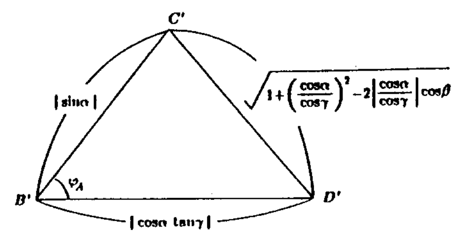

Fig.10 A Obtaining Method of Dihedral Angles by Taking Tetrahedral cosine Rule

3. Vector Space에서의 사면체 체적의 적용

Vector space에서의 **四面體 體積** V는

$$V=\begin{cases}\frac{2}{3}S_3S_4\frac{1}{a}\ \mathrm{tesin}\,\varphi_{A_1}\\ \frac{2}{3}S_2S_3\frac{1}{b}\ \mathrm{tesin}\,\varphi_{A_2}\\ \frac{2}{3}S_2S_4\frac{1}{c}\ \mathrm{tesin}\,\varphi_{A_3}\end{cases}$$

와 같이 표현할 수 있다.
여기서, ($\mathrm{tecos}^2\varphi_A+\mathrm{tesin}^2\varphi_A=1$)이다. 이를 *tetra-cosine rule*을 적용하여 **證明**하면 다음과 같다.

< 증명 >
Fig.12(a)에서

$$\mathrm{tesin}\,\varphi_{A_1}=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=\frac{\frac{1}{2}aa_2}{\frac{1}{2}a\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \text{ 이고}$$

여기서,