

변동하중을 받는 기계요소의 정·동적 허용안전계수를 고려한 신뢰성

Reliability of Machine Elements Based on Static and Dynamic Factor of Allowable Safety under Fluctuating Load

양성모, 강희용(전북대), 김강희(전북대 대학원)
Sung-Mo Yang, Hee-Yong Kang(Chonbuk National Univ),
Kang-Hee Kim(Graduate School, Chonbuk National Univ)

Abstract

It is common to assume identical allowable safety factors in static strength, defined by mean stress and in fatigue, defined by stress amplitude. Under the load with asymmetrical cycles the safety factor is not the same. In this paper, with the consideration of unequal allowable safety factors a general method for estimating fatigue reliability of a machine element under a combined state of stress is derived based on the theory proposed by Prof. Kececioglu and a normal distribution. The calculation of fatigue reliability for limited life is discussed with example.

1. 서론

기계설계에 있어서 기존의 정적인 하중과 균일한 강도를 유지하는 단순함 보다는 사실적이고 실제적인 하중상태를 고려한 보다 정확하고 복잡한 설계개념을 시도하고 있다. 따라서 강도계산의 불확실성을 보완하고, 보다 정확한 설계를 위해서 단순히 적당한 안전계수를 곱하여 설계하는 방법보다는 구체적이고 실제적인 방법에 의한 접근이 시도되었으며, 이것은 확률론적이고 통계적인 설계 기법을 통해서 가능해지고 있다.¹⁾

확률론적 설계는 변화가 많은 설계환경을 수학적으로 모델링하기 위해서 여러하중과 강도의 특성등을 통계적인 기법을 이용하여 분석하며, 이러한 확률론적인 접근 방법을 통해서 기계요소에 대한 신뢰성을 평가할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 기계요소설계에 있어서, 일반적으로 서로 다른 동적·정적허용 안전계수를 이용하여²⁾³⁾⁴⁾ 기계요소에 적용할 수 있는 보다 정확한 신뢰성 평가식을 제시하고자 한다. 단, 피로한도를 고려하기에 충분한 누적 사이클을 가지고 있으며, 강도와 응력에 대한 모든 변수들은 정규분포를 갖는다고 가정한다.

2. 변동응력을 받는 기계요소의 신뢰성

잘 알려진 바와 같이 피로문제에의 계산은 일반적으로 등가응력에 의해 환산될 수 있다. 여기서는 Soderberg 선도를 이용하여 등가응력 L_e (동적 성분의 크기와 등가응력 L_m (정적성분)의 크기를 계산, 신뢰성을 평가하고자 한다. Soderberg 선도는 Fig.1에서와 같다. 위의 그림에서 등가응력 L_m , L_e 는 직선 $r=L_e/L_m$ 이 피로한도 응력곡선과 만나는 점점의 중, 횡좌표이다. 따라서, 등가응력 $L=(L_e^2+L_m^2)^{1/2}$ 또는 기계요소의 하중 특성 선도 OP 위에 있는 L_{im} 으로 표시할 수 있다.

응력과 강도의 불규칙변화의 성향을 고려한 신뢰성 평가를 위하여, 응력의 2차분포 $f_L(L)$ 와 강도분포 $f_S(S^*, S^*, r)$ 를 고려한다. (Fig.2) r 의 불규칙 변화의 영향이 작다고 가정하여, 기계요소의 신뢰성은(Fig.3) $r = \mu_L/\mu_L$ 의 하중특성선도 위에 있는 $f_S(S_T)$ 의 분포와 $f_L(L)$ 의 분포로부터 찾을 수 있다. 응력과 강도분포가 정규분포 라고 가정하여, 응력과 강도의 표준편차와 평균을

계산한다. μ_L, μ_{S_T} 와 σ_L, σ_{S_T} 는 평균과 표준편차에 대한 Taylor식 전개로 구한다.

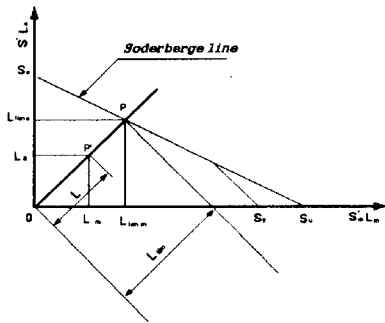


Fig.1 Principle of fatigue calculation

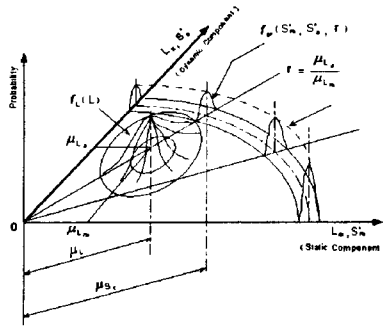


Fig.2 Strength and stress distribution of a machine element subjected to fluctuating load

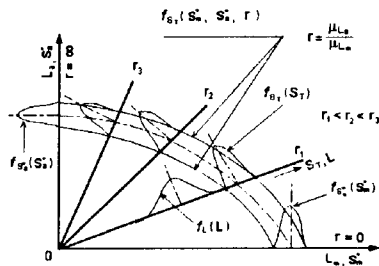


Fig.3 Fatigue - stress distribution

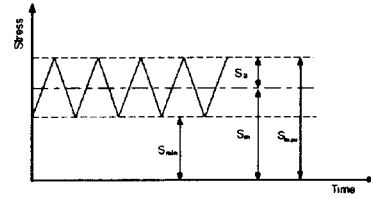


Fig.4 Stress asymmetrical cycles

3. 강도분포와 허용안전계수

편진반복응력 사이클의 최대값에서 최소값까지의 변화는 Fig.4에 나타나있다. 정적강도에 영향을 미치는 계수(응력집중, 과부하등)의 영향을 다음과 같이 고려한다.

$$K_{cm} = K_1 K_2 \dots K_n \quad (0 < K_{cm} \leq 1)$$

$$S_{ef} = K_{cm} \times [(S_u) \text{ 또는 } (S_p)] \quad (1)$$

윗식의 평균과 표준편차는

$$\mu_{S_e} = \mu_{K_1} \mu_{K_2} \dots \mu_{K_n} \mu_{S_u} = \mu_{K_{cm}} \mu_{S_u}$$

$$\sigma_{S_e} = \left\{ \sigma^2_{K_1} \left(\frac{\partial S_{ef}}{\partial K_1} \right)^2 + \dots + \sigma^2_{K_n} \left(\frac{\partial S_{ef}}{\partial K_n} \right)^2 + \sigma^2_{S_u} \left(\frac{\partial S_{ef}}{\partial S_u} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (2)$$

실제정적강도안전계수 (m)을 구하면,

$$m = \frac{\mu_{S_e}}{S_m} \quad (3)$$

안전성 있는 설계를 하기 위해서는, 실제 안전계수는 허용안전계수보다 커야한다. 따라서, 정적강도에서 실제 정적강도안전계수 (m)은 정적강도 허용안전계수 ($[m]$)보다 크다.

$$m = \frac{\mu_{S_e}}{S_m} \geq [m] \quad (4)$$

위의 두안전계수의 상대적인 비 α 는

$$\alpha = \frac{m}{[m]} = \frac{\mu_{S_e}}{([m]S_m)} = \frac{\mu_{[S_e]}}{S_m} \geq 1 \quad (5)$$

정적안전강도 $\mu_{[S_e]}$ 는,

$$\mu_{[S_e]} = \frac{\mu_{S_e}}{[m]} \quad (6)$$

정적강도 수정계수에서와 마찬가지로 동적강도 수정계수도 동적성분계수(응력집중, 컷수영향, 표면조도등)들의 곱으로써 정의한다.

$$K_{ed} = K'_1 K'_2 \dots K'_n$$

$$S_e = K_{ed} \times (S'_e) \quad (0 < K_{ed} \leq 1) \quad (7)$$

윗식의 평균과 표준편차는

$$\mu_{S_e} = \mu_{K_1} \mu_{K_2} \dots \mu_{K_n} \mu_{S_e} = \mu_{K_n} \mu_{S_e}$$

$$\sigma_{S_e} = \left\{ \sigma^2_{K_1} \left(\frac{\partial S_e}{\partial K_1} \right)^2 + \dots + \sigma^2_{K_n} \left(\frac{\partial S_e}{\partial K_n} \right)^2 + \sigma^2_{S_e} \left(\frac{\partial S_e}{\partial S_e} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (8)$$

편진반복응력 사이클에서의 실제동적강도안전계수 (a)는

$$a = \frac{\mu_{S_e}}{S_a} \quad (9)$$

실제 동적강도안전계수 (a)은 허용동적강도안전계수 ([a]) 보다 크다.

$$a = \frac{\mu_{S_e}}{S_a} \geq [a] \quad (10)$$

위의 두 안전계수의 상대적인 비 β는

$$\beta = \frac{a}{[a]} = \frac{\mu_{S_e}}{S_a [a]} = \frac{\mu_{[S_e]}}{S_a} \geq 1 \quad (11)$$

$$\mu_{[S_e]} = \frac{\mu_{S_e}}{[a]} \quad (12)$$

조합된 강도수정계수를 K*라하면 Fig.5에서 보는 바와같이 안전강도분포 $f_{S_r}(S_r)$ 는 임의의 r값에 대하여, 표준시편 시험분포 $f_{S_e}(S_e)$ 로부터 구할수 있다. 정적강도 허용안전계수 [m]와 동적강도 허용안전계수 [a]의 표준화된 일반적 형태는 없으나, 재료 특성들과 하중관계를 고려하여 허용안전계수의 최저 경계가 존재하는 경우에 동적·정적허용안전계수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁵⁾⁶⁾

- [a] ≥ 1.25 ... 대칭응력에서의 피로강도
- [m] ≥ 2.50 ... 극한강도에서의 정적강도
- [m] > 2.50 $\frac{S_y}{S_u}$... 항복강도에서의 정적강도

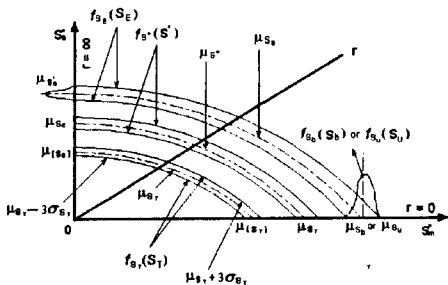


Fig.5 Determination of strength distribution

4. 정적·동적허용 안전계수를 고려한 신뢰성

허용안전계수 [F]에 대한 안전강도 S_r 는

$$S_r^2 = \left[\frac{S_m}{[m]} \right]^2 + \left[\frac{S_e}{[a]} \right]^2$$

윗식의 평균 μ_{S_r} 는

$$\mu_{S_r} = \left(\frac{\mu_{S_m}^2}{[m]^2} + \frac{\mu_{S_e}^2}{[a]^2} \right)^{1/2}$$

식(6), (12)로부터,

$$\frac{\mu_{S_m}}{[m]} = \mu_{[S_m]}, \quad \frac{\mu_{S_e}}{[a]} = \mu_{[S_e]}$$

μ_{S_r} 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mu_{S_r} = (\mu^2_{[S_m]} + \mu^2_{[S_e]})^{1/2}$$

표준편차는

$$\sigma_{S_r} = \left\{ \sigma^2_{[S_m]} \left(\frac{\partial S_r}{\partial [S_m]} \right)^2 + \sigma^2_{[S_e]} \left(\frac{\partial S_r}{\partial [S_e]} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

따라서, 신뢰성 R은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R &= \Pr(S_T > L) = \Pr(S_T - L > 0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(Z)}{\sigma \sqrt{\frac{\mu_{S_r} - \mu_L}{\sigma^2_{S_r} + \sigma^2_L}}} dZ \\ &= 1 - \Phi \left(- \frac{\mu_{S_r} - \mu_L}{(\sigma^2_{S_r} + \sigma^2_L)^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

5. 계산 및 고찰

기계요소설계의 많은 문제들에서 하중을 받는 축은 일반적으로 정적비틀림모멘트와 동적굽힘모멘트가 함께 작용한다. 예를들면, Fig.6에서 기어축은 각각 그 끝이 동일한 두 기어에 의해 고정되어 있다. 힘은 중앙기어를 통해 양쪽기어에 전달되고, 굽힘모멘트 선도와 임계점(A)에서 응력은 Fig.6에서 나타난바와 같다. 이 요소의 신뢰성을 계산하기 위하여 굽힘 모멘트 선도와 부품의 기하학적 형상을 고려하여 가장 위험한 횡단면을 찾는다. 가장 위험한 횡단면은 k-k이고 임계점은 A이다. 따라서, A점에 작용하는 수직응력은 굽힘모멘트 식을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$S_z = \frac{16P}{\pi d^3} \left(\frac{r_1}{r_2} L_1 - L_2 \right)$$

비틀림모멘트는 다음과 같다.

$$r_{xz} = \frac{8P r_1}{\pi d^3}$$

d는 k-k단면 축의 지름이다. 이 경우 수

직응력의 정적성분은 $S_m = 0$ 이고, 동적성분 $S_o = S_a$ 이다. 전단응력의 정적성분은 $\tau_m = \tau_{ax}$ 이고, 동적성분 $\tau_o = 0$ 이다. 가해지는 힘이 불규칙적으로 변동한다고 가정, 힘 P의 평균과 표준편차를 각각, μ_p 와 σ_p 로 나타낸다. 따라서 S_a 와 τ_{ax} 는 확률변수로 다룰수 있다.

$$\mu_{S_a} = \frac{16\mu_p}{\pi(\mu_d)^3} \left(\frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} \mu_{L_1} - \mu_{L_2} \right)$$

$$\sigma_{S_a} = \left\{ \sigma_p^2 \left(\frac{\partial S_a}{\partial P} \right)_\mu^2 + \sigma_d^2 \left(\frac{\partial S_a}{\partial d} \right)_\mu^2 + \sigma_{r_1}^2 \left(\frac{\partial S_a}{\partial r_1} \right)_\mu^2 + \sigma_{r_2}^2 \left(\frac{\partial S_a}{\partial r_2} \right)_\mu^2 + \sigma_{L_1}^2 \left(\frac{\partial S_a}{\partial L_1} \right)_\mu^2 + \sigma_{L_2}^2 \left(\frac{\partial S_a}{\partial L_2} \right)_\mu^2 \right\}^{1/2}$$

$$\mu_{\tau_m} = \frac{8\mu_p \mu_{r_1}}{\pi \mu_d^3}$$

$$\sigma_{\tau_m} = \left\{ \sigma_p^2 \left(\frac{\partial \tau_m}{\partial P} \right)_\mu^2 + \sigma_{r_1}^2 \left(\frac{\partial \tau_m}{\partial r_1} \right)_\mu^2 + \sigma_d^2 \left(\frac{\partial \tau_m}{\partial d} \right)_\mu^2 \right\}^{1/2}$$

비틀림에너지 이론에 따라 실제 축에 정적성분과 동적성분의 등가응력은 다음과 같다.¹¹

$$L_o = S_o, \quad L_m = \left(S_m^2 + 3(\epsilon \tau_m)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{3} \epsilon \tau_m$$

ϵ 은 전단응력과 수직응력 사이의 응력 형태 차이에 대한영향 계수이다.(이 경우에 수직응력은 동적이고 전단응력은 정적이다.) 집중응력, 하중조건, 작동환경, 표면조도 등과 같은 다양한 계수들의 영향을 고려한다.

$$L_m = K_{sm} \sqrt{3} \epsilon \tau_m,$$

$$r = \frac{\mu_{L_o}}{\mu_{L_m}}, \quad L_o = K_{so} S_o L = (L_m^2 + L_o^2)^{1/2}$$

$$\mu_L = (\mu_{L_m}^2 + \mu_{L_o}^2)^{1/2}$$

$$\sigma_L = \left\{ \sigma_{L_m}^2 \left(\frac{\partial L}{\partial L_m} \right)_\mu^2 + \sigma_{L_o}^2 \left(\frac{\partial L}{\partial L_o} \right)_\mu^2 \right\}^{1/2}$$

K_{sm} , K_{so} 와 ϵ 는 상수로 가정한다. 실제 피로한도응력분포는 크기, 표면조도, 온도, 환경조건 등과 같은 계수들의 영향을 고려, 선택 재료의 Soderberg 선도를 기초로 찾아낸다.

강도분포는 $r = \mu_{L_o} / \mu_{L_m}$ 선을 이용하여 선도 위에서 결정하고, 등가응력 L과 안전강도 S_T 가 정규분포라는 가정하에 기계요소 의 신뢰성을 계산한다.

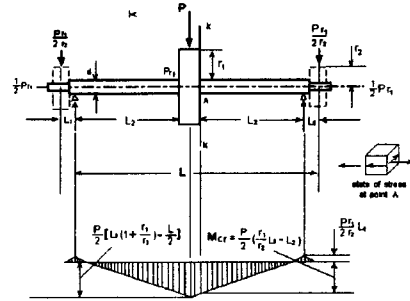


Fig.6 Gear shaft and the load imposed on it

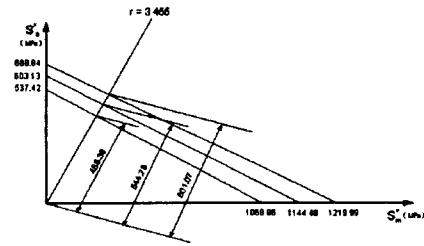


Fig.7 Determinating parameters of strength distribution based on modified Goodman line when distribution data known are not complete

<예제 1> 정적·동적허용안전계수가 같을 경우 신뢰성평가

Fig.6에 표현된 기계요소는 다음과 같은 크기를 갖고 있다. $L=0.272m$, $L_1=0.02m$,

$$L_2=0.11m, \quad r_1=0.054m, \quad r_2=0.027m$$

$d=0.01647 \pm 0.00043m$, 하중 $P=784 \pm 147N$ 이다.

뜨임과 담금질이 된 1045강의 극한강도와 피로한도는 다음과 같다.(Fig.7)

$$S_u = 1144.48 \pm 75.514(Mpa)$$

$$S_e = 603.13 \pm 65.707(Mpa)$$

선택한 재료의 강도분포는 Fig.7과 같고, $\epsilon=0.7$ 이다. 동적강도 수정계수 (K_{sm})와 정적강도 수정계수 (K_{so})의 값은 $K_{sm} = 0.91$, $K_{so} = 0.4$ 이다. 피로한도 응력에 대한 동적허용안전계수와 정적허용안전계수가 $[F] = 1.5$ 로 같을 경우의 신뢰성을 평가한다.

여기서, L, L_1, L_2, r_1 와 r_2 는 상수이고 P 와 d 는 확률변수이다.

$$\mu_P = 784N ; \sigma_P = 49N$$

$$\mu_d = 0.01647m ; \sigma_d = 0.000143m$$

$$\mu_{S_s} = \frac{16 \times 784}{\pi \times 0.01646^3} \left(0.11 - \frac{0.054}{0.027} \times 0.02 \right) = 62.67Mpa$$

$$\sigma_{S_s} = \left\{ 49^2 \left(\frac{16}{\pi \times 0.01646^3} \times \left(0.11 - \frac{0.054}{0.027} \times 0.002 \right) \right)^2 + 0.000143^2 \left(\frac{16 \times 784}{\pi \times 0.01646^4} (-3) \times \left(0.11 - 0.02 \times \frac{0.054}{0.027} \right) \right)^2 \right\}^{1/2} = 5.7Mpa$$

$$\mu_{r_m} = \frac{8 \times 784 \times 0.054}{\pi \times 0.01647^3} = 24.17Mpa$$

$$\sigma_{r_m} = \left\{ 49^2 \left(\frac{8 \times 0.054}{\pi \times 0.01647^3} \right)^2 + 0.000143^2 \left(\frac{784 \times 0.054}{0.01647^4} (-3) \frac{8}{\pi} \right)^2 \right\}^{1/2} = 1.634Mpa$$

$$L_m = 1.2 \times 1.3 \times 0.7 r_m = 1.891 r_m$$

$$L_a = 1.8 \times 1.4 S_a = 2.52 S_a$$

$$\mu_L = \left\{ (1.891 \times 24.17)^2 + (2.52 \times 62.67)^2 \right\}^{1/2} = 164Mpa$$

$$\sigma_L = \left\{ \frac{(1.891^2 \times 1.634^2 + 2.52^2 \times 5.7^2 \times 3.455^2)}{(1 + 3.455^2)} \right\}^{1/2} = 13.82Mpa$$

$$r = \frac{2.52 \times 62.67}{1.891 \times 24.17} = 3.455$$

$r=3.455$ 에서 강도의 평균과 표준편차를 구한다. $K_{sa} = 0.4$, $K_{sm} = 0.91$ 이므로,

$$\mu_{S_s} = 0.4 \times 603.13 = 241.252Mpa$$

$$\mu_{S_m} = 0.91 \times 1144.48 = 1041.477Mpa \text{ 이고,}$$

$$[F] = [a] = [m] = 1.25 \text{ 이므로,}$$

$$\mu_{[S_s]} = 193.0 Mpa, \mu_{[S_m]} = 833.5450 Mpa$$

따라서 $r=3.455$ 에서

$$S_{T \max} = 200.821Mpa, S_{T \min} = 175.835Mpa$$

위의 평균과 표준편차는

$$\mu_{S_T} = \frac{(200.821 + 175.835)}{2} = 188.328 Mpa$$

$$\sigma_{S_T} = \frac{(200.821 - 175.835)}{6} = 4.165Mpa$$

동적·정적허용안전계수가 같을 때 신뢰성 R은 식(13)로부터

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(z) dz}{\frac{\lambda \mu_{S_s} - \mu_L}{(\lambda \sigma_{S_s}^2 + \sigma_L^2)^{1/2}}}$$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(z) dz}{\frac{188.328 - 164}{(13.82^2 + 4.165^2)^{1/2}}} = 95.4\%$$

이므로 참고문헌[1]의 신뢰성식과 본논문에서 유도한 신뢰성식으로 계산한 결과는 동일함을 알수 있어 본논문의 타당성을 고찰할 수 있다.

<예제2> 정적·동적허용안전계수가 다를 경우 신뢰성 평가

기계부품에서는 정적허용안전계수와 동적허용안전계수가 다르고, 같은 하중에서는 정적허용안전계수가 더 크므로 정적허용안전계수와 동적허용안전계수가 $[m]=2.5$, $[a]=1.25$ 로 다를 때²⁾³⁾⁴⁾

<예제1>에서의 신뢰성을 평가한다.

(Fig.6, Fig.7참조)

μ_{S_s} , μ_{S_m} 의 값은 <예제1>로부터

$$\mu_{S_s} = 241.252Mpa, \mu_{S_m} = 1041.477Mpa$$

$$\mu_{[S_s]} = \frac{\mu_{S_m}}{[m]}, \mu_{[S_m]} = \frac{\mu_{S_s}}{[a]} \text{로부터}$$

$$\mu_{[S_s]} = 193.0Mpa, \mu_{[S_m]} = 416.6Mpa$$

따라서, $r=3.455$ 에서

$$S_{T \max} = 200.821Mpa, S_{T \min} = 175.835Mpa$$

$$\mu_{S_T} = \frac{(195.5 + 159.7)}{2} = 177.6Mpa$$

$$\sigma_{S_T} = \frac{(195.5 - 159.7)}{6} = 5.96Mpa$$

$$\mu_{S_T} = 177.6Mpa, \sigma_{S_T} = 5.96Mpa$$

동적, 정적허용안전계수가 다른 경우 평균과 표준편차는 $\mu_{S_T} = 177.6Mpa$, $\sigma_{S_T} = 5.96Mpa$ 이므로, 신뢰성 R은

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(z) dz}{\frac{177.6 - 164}{(13.82^2 + 5.96^2)^{1/2}}} = 81.6\%$$

이와 같이 서로다른 정적·동적허용안전계수를 동시에 고려하면 신뢰성이 81.6%로 떨어지므로 동적상태의 하중을 받는 부품의 신뢰성 저하를 예측할 수 있다.

6.결론

기계요소에 대한 수명예측과 평가를 보다 정확하고, 간단하게 하기 위하여, 동적·정적허용안전계수가 서로 같지 않다는 사실을 고려한 신뢰성 평가식을 새로이 정립하였다. 그리고 동적·정적허용안전계수가 서로 같을 경우 신뢰성 계산값과 비교하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

1. 높은 정밀도의 기계요소 설계를 할 경우의

신뢰성 평가에 있어서 동적·정적허용안전 계수가 다르다는 사실을 고려하여 신뢰성을 평가하여야 보다 안전하고 믿을수 있는 신뢰성을 평가할 수 있다.

2.동적·정적허용안전계수로부터, 신뢰성을 계산할수 있는 확률분포의 일반식을 이끌었으며, 기계요소 설계에 있어 간단하게 신뢰성을 평가할 수 있게하였다.

참 고 문 헌

- 1.Chang, C. H., "A General Method for Estimating Reliability of Machine Elements Subjected to Fluctuating Load." ASME J-ournal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design. APR. 1983. 150-159.
- 2.Horger, O. G., Ed., Metals Engineering Design, ASME Handbook, 2nd Ed., McGrawHill, NY, 1965.
- 3.Briggs, C. W., Ed., Steel Castings Handbook, 4th Ed., Steel Founder's Society of America, Rocky River, OH, 1970.
- 4.Shiegly, J. E., and Mischke, C. R., Ed., Standard Handbook of Machine Design, McGraw-Hill, NY, 1986.
- 5.Avakov, V., "Probabilistic Strength Design Based on Lognormal Distribution." ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design. APR. 1983. 160-162.
- 6.Serensen, S. V., et al., Load Carrying Capacity and Stress Analysis of Machine Elements, 3rd Ed., Mashino stroenie, Moscow, Publ. House,1975.