

NASTRAN 을 이용한 고유치 문제의 설계 민감도 해석 Design Sensitivity Analysis of Eigen Problem Using NASTRAN

윤광수(영남대 대학원), 이태희(영남대 기계공학부)

Kwang Soo Yoon(Graduate School, Yeungnam Univ.), Tae Hee Lee(Yeungnam Univ.)

ABSTRACT

Design sensitivity analysis of Eigen Problem gives systematic design improvement information for noise and vibration of a system. Based on reliable results from commercial FE code(UAI/NASTRAN), three computational procedures for design sensitivity analysis of eigen problem are suggested. Those methods are finite difference, design sensitivity analysis using external module and design sensitivity analysis running with NASTRAN. To verify the suggested methods, a numerical example is given and these results are compared with the results from UAI/NASTRAN eigen sensitivity option. We can conclude that design sensitivity coefficient of eigen problems can be computed outside of the FE code as easy as inside of the FE code.

Key words : Design Sensitivity Analysis(설계 민감도 해석), Eigen Problem(고유치 문제), UAI/NASTRAN, DMAP(Direct Matrix Abstraction Program)

1. 서론

최근 들어 항공, 선박 및 자동차 등의 분야에서 대두되는 주요 공학적인 관심사는 기존 시스템의 성능 향상 뿐만 아니라 인간공학적 측면에서의 안락감과 편리함의 증대이다. 인간공학적 측면의 일례로서 자동차의 승차감 또는 TV의 음향 성능 등이 신제품 마케팅의 중요한 변수로 작용한다는 것이다. 이러한 문제에 대한 공학적인 구현은 주어진 시스템의 동적 거동(진동 특성)을 정확히 파악하고 해석하는 데서 시작한다. 기존의 동적 해석 도구를 이용하면 시스템의 기하학적 형상이나 물성치의 변경에 따른 진동 특성 변화를 시행 착오의 방법으로 구할 수 있지만, 이런 방법은 체계적인 설계 개선을 위한 정보를 제공하지 못한다.

동 특성 설계 민감도 해석(Design Sensitivity Analysis)은 설계자에게 설계 변수의 변화에 대한 동적 응답 특성의 변화율을 계산하는 것으로 동 특성 설계 개선 정보를 체계적으로 제공한다. 구조물의 동 특성에 대한 민감도 정보는 설계자에게 설계에 대한 유연성과 설계 방향 및 설계 데이터 베이스 구축에 중요한 구실을 한다.

이러한 동 특성 설계 민감도 해석을 신뢰성

을 가진 상용 유한 요소 해석 프로그램의 내외부에서 얻어내는 방법을 제시하고 이 결과들을 유한 차분법과 비교·고찰하였다.

2. 고유치 문제의 설계 민감도 해석

일반적인 구조물의 동 특성 설계 민감도 해석은 고유치 문제(Eigen Problem)의 범주로서 구조물의 고유치(Eigenvalue)와 고유 벡터(Eigenvector)에 대한 민감도 계수를 찾아내는 것으로 귀결된다.^[1,2,3] 다음의 수식은 가장 전형적인 고유치 문제에 대한 설계 민감도 해석이다.

구조물의 보존계 시스템 동 특성 해석은 고유치 문제로서 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{u} = 1 \quad (1)$$

여기서, \mathbf{K} 는 강성 행렬, \mathbf{M} 은 질량 행렬, λ 는 고유치, \mathbf{u} 는 고유 벡터를 나타낸다.

고유치에 대한 설계 변수 x 의 민감도 계수는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \lambda_l}{\partial x} = \mathbf{u}_l^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \lambda_l \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \mathbf{u}_l \quad (2)$$

N 자유도를 갖는 고유치 문제의 고유 벡터에 대한 민감도 계수의 엄밀해는

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial x} = c_l \mathbf{u}_l + \sum_{i=1, i \neq l}^N c_i \mathbf{u}_i \quad (3)$$

$$c_l = -\frac{1}{2} \mathbf{u}_l^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \mathbf{u}_l$$

$$c_i = -\frac{\mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial x} \mathbf{u}_i}{\lambda_i - \lambda_l}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \mathbf{M} - \lambda_l \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}$$

이며, 무한 자유도에 대한 고유치와 고유 벡터를 구하는 것은 불가능하므로 Wang 은 유한개의 모드 정보를 이용하여 민감도 계수를 근사적으로 구하는 방법 중 다음과 같은 양(Explicit)적 방법을 제시하였다.^[4]

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\hat{N}} c_i \mathbf{u}_i + S_R \quad (4)$$

$$S_R = \sum_{j=N+1}^N c_j \mathbf{u}_j$$

여기서, S_R 은 고차 모드의 항이며 이 항을 근사화하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S_{RA} = y_l - h_l \quad (5)$$

$$y_l = \mathbf{K}^{-1} F_l$$

$$h_l = \sum_{j=1}^{\hat{N}} \frac{\mathbf{u}_j^T F_l}{\lambda_j} \mathbf{u}_j$$

$$F_l = -\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial x} \mathbf{u}_l$$

따라서, 고유 벡터에 대한 민감도 계수는 다음처럼 구해진다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial x} \approx \sum_{i=1}^{\hat{N}} c_i \mathbf{u}_i + w_l \quad (6)$$

$$w_l = y_l - h_l$$

참고로, UAI/NASTRAN 민감도 해석 옵션에서는 내부적으로 고유 벡터에 대한 민감도 계수를 계산함에 있어 아래의 알고리즘을 사용한다. 이때 $\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}$ 의 rank 를 줄이기 위해 Nelson 방법을 사용한다.^[5,6]

$$\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} = -[\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}]^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} \mathbf{M} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right] \mathbf{u}_j$$

3. 설계 민감도 해석의 구현

본 연구에서 UAI/NASTRAN 의 해석 결과를 이용하여 고유치 문제에 대한 설계 민감도 계수를 Wang 의 방법으로 구하기 위해 식 (4)와 (6)에서 강성 행렬 및 질량 행렬의 설계 변수에 대한 미분값을 구하는 2 가지 방법과 유한 차분법에 의한 설계 민감도 해석법을 제시한다.

UAI/NASTRAN 에서는 유한 요소 해석 과정에서 생성되는 행렬을 추출할 수 있는 소위 DMAP(Direct Matrix Abstraction Program)이란 언어를 지원하고 있다. DMAP 이란 NASTRAN 을 구동하는 매크로 언어이다. 이를 사용하여 NASTRAN 의 표준 해석 절차를 수정하거나 특수한 기능을 수행하는 사용자 고유의 프로그램을 작성할 수도 있으며 해석을 실험과 연계시킬 수도 있다. 또한 DMAP 은 사용자가 NASTRAN 내부의 흐름을 변경시키거나 필요한 정보를 추출하는 데 이용할 수도 있다. NASTRAN 은 각 해석에 대해서 고유한 Rigid Format 을 지니고 있는데 이것 또한 DMAP 으로 구성되어 있다. 따라서, 사용자가 자신의 임의 알고리즘을 구현하자 할 때 먼저 해석에 대한 Rigid Format 을 이해하고 변경할 부분을 선택, DMAP 을 사용하여 적절하게 수정을 가하면 된다. 본 연구에 사용된 UAI/NASTRAN 버전은 11.8 이다.

3.1 유한 차분

유한 차분(Finite Difference)을 이용하는 방법은 UAI/NASTRAN 입력 데이터 덱(deck)에서 설계 변수를 차분시키고 노말 모드 해석(SOL 3)을 실시하여 각 고유치와 고유 벡터의 차를 구한 후 그 차로써 민감도 계수를 직접 계산하는 것이다. 이 방법은 데이터 덱 수정과 해석 수행에 많은 시간 소모가 있지만 설계 변수의 민감도 계수를 얻어내기에는

가장 간단하다. 그러나 동적 거동해석에서 차분량을 정하는데 어려움이 있으며 시행착오를 통하여 결정을 하여야 한다. 다음은 데이터 텍에서 설계 변수인 두께를 변동시키는 예이다. 여기서 PSHELL은 CQUAD4 요소의 요소 특성(Element Property)을 정의하는 Bulk Data Entry이다.^[7] 이때 차분량은 본 연구에서 10^{-3} 으로 하였으며 중앙 차분(Central Difference)을 사용하였다.

```
PSHELL,1,1,,1001,1,,1
PSHELL,1,1,,099,1,,1
```

3.2 외부 모듈에 의한 민감도 계산

이 방법은 나스트란의 외부에서 유한 요소 해석 결과를 이용하여 독립적으로 민감도 계수를 얻어낸다. 이때, UAI/NASTRAN의 노말 모드(Normal Mode, SOL 3) 해석을 수행하면서 고유치 문제에 대한 설계 민감도 해석에 필요한 정보만을 추출, 외부 프로그램에서 읽어 들여 민감도 계수를 구해낸다. 고유치 문제의 민감도 계수 계산에 필요한 정보인 질량 및 강성 행렬, 고유치와 고유 벡터를 추출하기 위해서 노말 모드 해석 수행 시 다음과 같은 DMAP을 이용한 Rigid Format의 수정이 필요하다. 아래 DMAP 문은 경계 조건이 제거된 질량·강성 행렬, 고유치와 고유 벡터를 파일로 저장하는 문이다.

```
ALTER 159
lamx, ,lama / lamat // *double* $
output4 lamat, ,,,,/*user1*/-1/*full*/formatted* $
output4 phia, ,,,,/*user2*/-1/*full*/formatted* $
output4 kaa, ,,,,/*user3*/-1/*full*/formatted* $
output4 maa, ,,,,/*user4*/-1/*full*/formatted* $
endalter
```

외부 모듈에서는 $\partial \mathbf{K} / \partial x$, $\partial \mathbf{M} / \partial x$ 를 계산할 때 내부적으로 중앙 차분 근사를 수행하였다. 이때, 차분량은 10^{-3} 으로 하였다.

3.3 UAI/NASTRAN 과 연동에 의한 민감도 계산

UAI/NASTRAN은 내부적으로 정적해석(SOL 51)과 노말 모드 해석(SOL 52)에 대한 민감도 옵션을 지원하고 있다. 이 옵션을 사용하면 노말 모드 해석과 민감도 해석이 동시에 일괄적으로 행해진다는 것과 더불어 사용자 알고리즘 구현 시 질량 행

렬과 강성 행렬에 대한 설계 변수의 미분 행렬 사용이 용이하다는 이점이 있다. 하지만, 이 방법은 다른 두 가지 방법에 비해서 UAI/NASTRAN 민감도 옵션에 대한 Rigid Format의 이해를 기저로 하기 때문에 사용자 임의 알고리즘의 구현이 힘들고 또한 UAI/NASTRAN에서 제공하는 DMAP문 이외의 자유로운 데이터 조작에 제약이 있다.

UAI/NASTRAN의 민감도 해석 옵션과 연동하여 사용자 임의 루틴을 작성하는 방법은 일반적으로 다음과 같은 절차를 가진다.

1. 나스트란 민감도 해석에 대한 Rigid Format을 얻어낸다(DIAG 14를 이용).
2. 변경시킬 Rigid Format 문 번호를 선택한다.
3. 기본(default) Rigid Format 내부에 사용자 알고리즘을 DMAP문을 사용하여 구현한다.
4. 나스트란 해석을 실시한다.

다음은 UAI/NASTRAN에서 고유치에 대한 설계 민감도 계수를 얻어내는 DMAP문이다. 이때, UAI/NASTRAN은 내부적으로 $\partial \mathbf{K} / \partial x$, $\partial \mathbf{M} / \partial x$ 를 계산하는 데 있어 전방 차분(Forward Difference) 근사를 한다. 차분량은 기본값(default)으로 10^{-3} 이다.

```
ALTER 173
tabpt tabvar $

ALTER 185
lamx, ,lama / lamt // *double* $
mpy3 phia,maa, /umu/0 $
ema gpect,dkdict,dkelm/dkkg, $
ema gpect,dmdict,dmeim/dmegg,-1/v,y,wtrmass $
$
equiv dkkg,dknn/nompc1/dmegg,dmnn/nompc1 $
cond lbd2,nompc2 $
matred dkkg,pvecnm,gm/dknn,, $
matred dmegg,pvecnm,gm/dmnn,, $
LABEL LBD2 $
equiv dknn,dkff/nospc/dmnn,dmff/nospc $
cond lbd3,nospc $
sce1 usef,dknn,dmnn,,/dkff,,dkxf,dkss,dmff,dmfs, , , , , $
LABEL LBD3 $
equiv dmff,dmaa/noomit/dkff,dkaa/noomit $
cond lbd5,noomit $
matred dmff,pvecao,go/dmaa,, $
matred dkff,pvecao,go/dkaa, //nodr $
LABEL LBD5 $
$
mpy3 phia,dkaa, /bbb/0 $
```

```

mpy3 phia,dmaa,/aaa/0 $
$
prtparm //0/*varno* $
setval //modeid/1 $
$
LABEL LBLsense $
paraml aaa/**dmi*/modeid/modeid/bb $
paraml bbb/**dmi*/modeid/modeid/aa $
paraml umu/**dmi*/modeid/modeid/lw $
paraml lamt/**dmi*/1/modeid/dd $

paramr /**mpy*/tm/bb/dd $
paramr /**sub*/ss/aa/tm $
paramr /**div*/sens/ss/lw $

prtparm //0/*modeid* $
prtparm //0/*sens* $
param /**add*/modeid/modeid/1 $
REPT LBLsense,4 $
ENDALTER

```

4. 적용 예제

제시한 3 가지 민감도 해석 방법을 비교하기 위해서 세 모서리가 고정된 12mm × 30mm 사각형 판(Clamped-Clamped-Clamped-Free)의 두께에 대한 설계 민감도 해석을 실시하였다. 이 유한 요소 해석 모델은 절점의 수가 91 개이며 사각형 요소(CQUAD4) 72 개를 사용하여 LANZCOS 방법으로 5 차 모드까지만 고유치를 추출하였다. 이 판의 두께는 0.1mm, 영률 $196 \times 10^5(N/mm^2)$, 질량 밀도는 $0.0078(kg/mm^3)$, 포와송 비는 0.3 으로 하였으며 해석 모델은 Fig 1 과 같다.

12	11	2	1
24	23	14	13
36	35	26	25
48	47	38	37
60	59	50	49
72	71	62	61

Fig 1. 사각 판의 유한 요소 모델

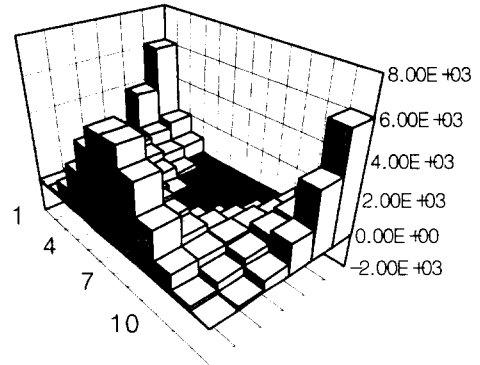


Fig 2. 1 차 모드에 대한 고유치 민감도 계수(FDM)

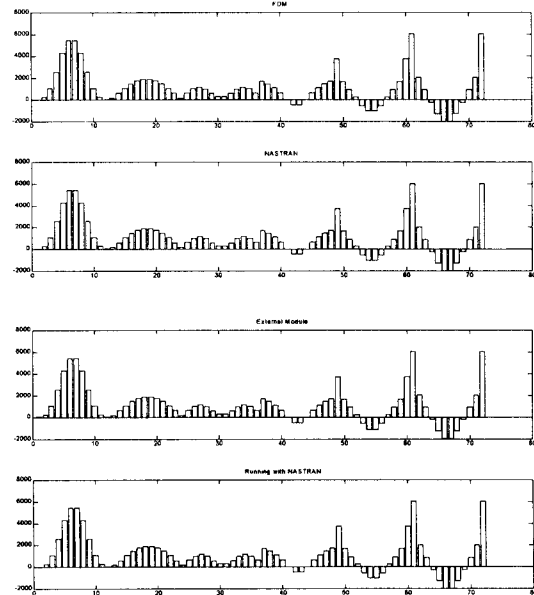


Fig 3. 1 차 모드에 대한 고유치 민감도 계수 비교 (FDM, NASTRAN, 외부 모듈, NASTRAN 과 연동 순)

Fig 2 는 1 차 모드에 대한 고유치 민감도 계수를 보여준다. 유한 차분을 기준으로 제시한 2 가지 방법과 나스트란의 민감도 옵션을 서로 비교해 보면 1 차 모드에서의 민감도 계수가 유한 차분으로 0 인 점을 제외하면 나머지 모드 차수에서 예러가 전체 0.5%내로 매우 정확함을 알 수 있었다. 이때, 1 차 모드에서는 나스트란 민감도 옵션, 나스트란과 연동한 방법, 외부 모듈 순으로 정확한 민감도 계수를 보였다. 하지만 외부 모듈의 방법은 1 차 모드에서도 국지적으로 더 정확한 민감도 수치를 보여주기도 하였으며 3 차 모드 이상에서는 타 방법에 비

해서 정확한 민감도 계수를 보여 주었다. 이는 $\partial K/\partial x$, $\partial M/\partial x$ 의 계산에서 중앙 차분 근사화가 전방 차분보다 더 정확한 것과 관계가 있다고 판단된다. 1차 모드와 2차 모드를 제외한 나머지 모드에서는 외부 모듈, 나스트란 민감도 옵션, 나스트란과 연동한 방법의 순으로 정확한 민감도 계수를 보였다. 따라서 제시한 3가지 방법 모두 설계 변경의 지침으로 사용하기에 수치적인 정확도나 경향에서 무리가 없다.

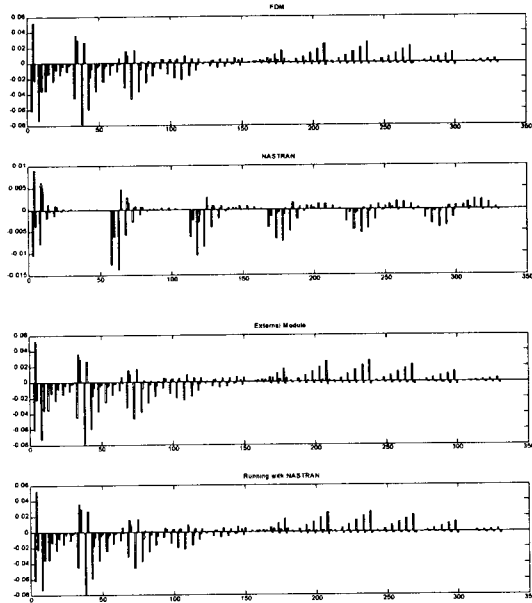


Fig 4. 1 차 모드에 대한 설계 변수 두께 1의 고유 벡터 민감도 계수 비교
(FDM, NASTRAN, 외부 모듈, NASTRAN 과 연동 순)

고유 벡터의 민감도 해석의 경우는 Fig 4에 주어져 있으며 유한 차분을 기준으로 할 때 외부 모듈, 나스트란과 연동한 방법의 결과가 나스트란의 민감도 옵션보다 더 정확한 수치와 경향을 보여줄 수 있다. 이것은 내부 구현 알고리즘과도 연관이 있겠으며 나스트란에서 지원하는 민감도 옵션을 이용하여 고유 벡터에 대한 실제 설계 변경은 무리가 있음을 보여준다.

전체 모드를 고려해 보면 유한 차분법은 차분량의 변동에 따라 큰 민감도 계수의 차이를 보이기 때문에 나머지 방법과 2차, 5차 모드에서는 적절한 비교가 이루어지지 않았다. 하지만, 나스트란과 연동한 방법과 외부 모듈을 사용한 방법은 유한

차분 보다 비교적 안정되게 고유 벡터의 민감도 계수를 보여준다.

위의 결과들로 종합해 볼 때, 본 논문에서 제시한 외부 모듈에 의한 민감도 해석법과 나스트란과 연동에 의한 민감도 해석법은 상용 유한 요소 프로그램의 내외부에서 기존의 상용 프로그램의 해석 결과를 토대로 민감도 계수를 신뢰성 있게 구할 수 있음을 보여주었다.

5. 결론

본 연구를 통하여 상용 유한 요소 해석 프로그램을 이용한 고유치 문제에 대한 설계 민감도 해석 수행의 3가지 방법을 제시하였다. 그 방법은 유한 차분, 외부 모듈 그리고 나스트란과 연동한 방법이다.

본 연구는 상용 유한 요소 해석 프로그램의 내외부에서 설계 민감도 해석 수행의 방법론을 모색하였으며 그 민감도 계수 또한 신뢰성을 가진다. 또한 이 연구는 고유치 문제에 대한 민감도 해석의 수행 뿐 아니라 정적 해석이나 좌굴 해석 등 다양한 민감도 해석에 적용 가능성을 보여준다.

참고 문헌

- Adelman, H. M. and Haftka, R. T., "Sensitivity Analysis of Discrete Structural System," *AIAA Journal*, Vol. 24, 1986, pp. 823-832.
- Fox, R. L. and Kapoor, M. P., "Rate of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 6, 1968, pp. 2436-2429.
- Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov V., "Design Sensitivity Analysis of Structural System," *ACADEMIC Press, INC.*, 1986.
- Wang, B. P., "Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics," *AIAA Journal*, Vol. 29, 1991, pp. 1018-1020.
- Nelson, R. B., "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 14, 1976, pp. 1201-1205.
- Universal Analytics, Inc., *UAI/NASTRAN User's Guide*, 1995.
- Universal Analytics, Inc., *UAI/NASTRAN Reference Guide*, 1995.