

Ruled Surface의 곡률이론을 이용한 새로운 로봇궤적제어기법

김 재 희, 김 상 철(전북대학교 대학원), 유 범 상(전북대학교)
JaeHee Kim, SangChul Kim(graduate School, Chonbuk National University)
BeomSahng Ryuh(Chonbuk National University),

ABSTRACT

This paper presents a new robot trajectory generation method based on the curvature theory of ruled surfaces. Robot trajectory is represented as a ruled surface generated by the TCP (Tool center point) and any one unit vector among the tool frame (usually denoted $\bar{O}, \bar{A}, \bar{N}$). The curvature theory of ruled surfaces provides the robot control algorithm with the motion property parameters. The proposed method eliminates the necessity of approximation technic of either joint or Cartesian interpolation. This technic may give new methodology of precision robot control. Especially this is very efficient when the robot traces an analytical or free form surface if the surface is geometrically modelled.

Key Words : Robot(로봇), Ruled Surface(룰드 서피스), Trajectory(궤적), Planning(계획), Curvature Theory(곡률 이론), Geometric Modeling(기하학적 모델링), Ferguson Curve Model(퍼거슨 곡선)

1. 서론

궤적 계획은 로봇의 연구와 응용에서 가장 중요한 분야의 하나로서 많은 연구의 대상이 되어 왔다²⁾⁹⁾. 일부의 응용분야에서는 기존의 Point-to-point 제어 방식으로 충분하고 일부에는 Continuous path제어 방식이 적절할 것이다. 이상의 두 방식은 이론적으로 보간법이라는 근사법에 근거하는 한계를 지니고 있다. 그러므로 보다 더 정밀한 제어를 위하여 그리고 혹은 자유 곡면이나 해석 곡면으로 주어진 모곡면을 추적하여야 하는 경우에는 Teach pendant 교시방식에 의한 초보적인 프로그래밍에 의하는 경우가 아니면 곡면 상에 데이터 점을 필요한 수만큼 잡고 그 위에서 별도의 보간법을 수행하여 로봇 위치, 방위 데이터를 구하여야 한다. 이때 추적 정밀도는 데이터 점의 개수와 비례한다고 볼 수 있다.

엄밀한 수학적 연속성을 지닌 로봇 궤적의 생성과 제어에서 가장 문제가 되는 부분은 로봇 방위의 연

속적 표현이다. 현재까지 로봇을 비롯한 3차원 공간 기구에서 방위를 표현하는데 사용되는 방법으로는 동차변환행렬(Homogeneous transformation matrix), Quaternion, Euler angle에 의한 matrix 표현 방법등이 있다¹¹⁾. 이러한 방법들은 몇 가지 공통적인 단점들을 지니고 있다. 첫째, 표현법의 높은 잉여도(High redundancy)이다. 공간에서의 운동은 6자유도를 가지므로 완전히 표현하는데 6개의 독립변수 만을 필요로 한다. 방위만은 3개의 독립변수를 필요로 한다. 그런데 방위와 위치를 표현하는 동차변환행렬은 16개의 요소를 가져 10의 잉여도를 보이며 방위 부분만은 9개의 요소로서 6의 잉여도를 보인다. 이는 Euler angle 등도 마찬가지이다. 둘째, 비연속성으로서 한 시점에서의 불연속적인 자료만을 제공한다. 그러므로 근본적으로 연속성을 제공할 수 없으며 정밀 제어에 불가결한 선운동과 각운동의 미분 계수들, 즉 속도, 가속도, 각속도, 각가속도와 상위차의 계수들은 얻을 수 없다. 불가피하게 보간법을 사용

하면 각운동에서는 각속도의 보간치 정도만을 얻을 수 있다.

본 연구에서는 로봇과 그 밖의 3차원 공간 기구들의 위치와 방위를 표현할 수 있는 미분 가능한 방법론을 제시하고 운동의 미분 계수를 수학적 방법으로 구하는 방법을 제시하고자 한다. 이는 엔드이펙터나 제어의 대상이 되는 부분의 방위를 나타내는 단위 벡터가 이루는 궤적이 룰드 서피스(Ruled surface)를 이룬다는 데에서 착안된다. 기구가 곡면을 정밀 추적하는 경우에는 그 곡면에 달라 붙은 룰드 서피스가 형성된다. 이때 기구의 전 궤적은 미분 가능하게 표현되고, 룰드 서피스의 곡률 이론(Curvature theory of ruled surfaces)을 이용한 미분기하적 성질로부터 운동 계수들이 원하는 차수까지 구하여 진다.

본 연구의 이론적인 배경은 룰드 서피스의 곡률 이론에 있다. 룰드 서피스의 곡률이론은 McCarthy et al.¹²⁾ 등에 의하여 기구학에서 선 궤적의 이론적 연구를 목적으로 취급되어 왔으며 이를 로봇의 궤적 생성과 제어에 이용한 것은 Ryuh와 Pennock¹⁶⁾¹⁷⁾ 이다. 이들은 McCarthy 등의 룰드 서피스의 곡률이론¹²⁾과 DoCarmo의 해석 기하적 이론¹⁹⁾을 최초로 로봇 엔드이펙터의 운동 연구에 응용하였다. 룰드 서피스는 직선 선분이 공간 상에서 그리는 궤적으로 정의되는데 로봇의 Tool Center Point (TCP) 위에 정의되는 공구 좌표계(Tool Frame) 중의 한 벡터가 원하는 궤적을 따라 움직일 때 생성되는 룰드 서피스의 곡률이론을 적용하여 기존의 Joint interpolation이나 Cartesian interpolation¹⁴⁾이라는 보간법에 의하지 않는 엄밀한 수학적 방법에 의하여 로봇 운동의 미분적 성질들(속도, 가속도, 각속도, 각가속도 등)을 구할 수 있게 된다. 이러한 제안은 로봇의 정밀 제어를 위한 방법을 제공할 뿐 아니라 추적할 곡면이 해석 곡면이나 자유 곡면으로 모델링 되어 있는 경우에는 불필요한 중간 단계인 보간법을 거치지 않고 주어진 곡면에서 직접 로봇 운동 계수들을 구할 수 있는 방법론을 제공한다.

본 연구에서 로봇의 궤적을 룰드 서피스로서 기하학적으로 모델링¹³⁾⁵⁾⁶⁾¹³⁾¹⁵⁾하는 데는 퍼거슨의 방법을 사용하였다⁴⁾⁸⁾.

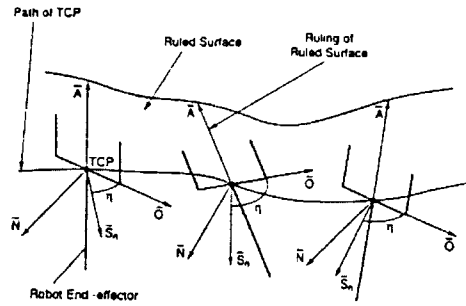


그림 1. 룰드 서피스와 스피각

2. 로봇 궤적의 룰드 서피스의 표현

로봇의 궤적은 엔드 이펙터(End-effector)위의 한 점(Tool center point: TCP)과 그 점 위에서 엔드 이펙터 방위각의 궤적으로 정의할 수 있다. 방위각은 TCP에 부착된 세 개의 서로 직각을 이루는 단위 벡터 \bar{O} , \bar{A} , \bar{N} 으로 표시되는데 이 좌표계를 공구 좌표계(Tool frame)라 부른다(그림 1). 엔드 이펙터의 변위와 방위를 설명하는데 가장 일반적인 방법은 4×4 동차변환행렬의 이용이다. 그러나 서론에서 본 바와 같이 잉여도가 높으며 연속적인 변화를 기술하기에는 부적합하다. 또한 로봇의 궤적 제어의 방법으로써 보간법밖에 사용할 수 없다는 한계의 근본적인 원인 제공을 하고 있다고 볼 수 있다. 로봇(엔드 이펙터)의 연속적인 궤적을 더 효과적으로 나타내는 방법으로는 룰드 서피스를 이용하는 방법이 적당하다. 그림 1에서는 공구 좌표계의 \bar{A} 가 생성하는 룰드 서피스를 보여 주고 있다. 이때 TCP는 룰드 서피스 상의 곡선을 그린다. \bar{A} 를 룰드 서피스의 룰링(Ruling), TCP의 궤적을 디렉트릭스(Directrix)라고 한다. 이렇게 하여 공간 6자유도의 5개 변수를 표현할 수가 있으며 나머지 한 자유도를 표현하기 위하여 스피각(Spin angle)이라는 변수를 정의할 수 있다. 스피각은 그림 1에서 η 로 표시되었는데 TCP상의 단위법선벡터 \bar{S}_n 에서 \bar{O} 까지의 각으로 정의된다. 편의에 따라 \bar{A} 까지의 각으로 정의되어도 무관하며 일반성에 문제가 없다.

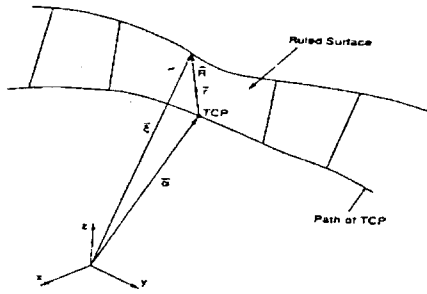


그림 2. 룰드 서피스의 표현

룰드 서피스는 다음과 같이 정의된다.

$$X(\Psi) = \bar{a}(\Psi) + \nu \bar{R}(\Psi) \quad (1)$$

여기에서 ν 는 임의의 실수, Ψ 는 독립변수, $\bar{a}(\Psi)$ 는 디렉트릭스, $\bar{R}(\Psi)$ 는 룰드 서피스의 톨링이다. 공구 좌표계의 어느 단위 벡터가 룰드 서피스의 톨링으로 사용되어도 일반성을 잃지 않는다. 스피ن각, η ,는 다음과 같이 나타난다.

$$\eta = \eta(\Psi) \quad (2)$$

톨링과 함께 공구 좌표계의 방위를 완벽하게 나타내는 스피ن각은 스칼라 양이고, 로봇에 주어진 일의 성격에 따라 정의 될 수 있다.

이상과 같이 룰드 서피스와 이에 덧붙인 스피ن각으로 로봇 엔드 이펙터의 운동을 완전하게 나타낼 수 있다. 따라서 룰드 서피스를 해석적인 함수로 기술할 수 있다면 로봇 궤적 계획에 사용될 수 있으며 룰드 서피스가 완전한 함수로 표현될 수 없는 경우에는 본 논문에 제안된 곡선 생성 기법을 이용하여 룰드 서피스를 표현할 수 있다.

룰드 서피스의 수학적 표현에는 두가지 방법이 가능하다. 첫 번째는 그림 2에서 보는 바와 같이 두 개의 곡선, 즉 디렉트릭스와 톨링 끝 궤적선을 이용하는 방법이다.

$$\bar{\xi}(\Psi) = \bar{a}(\Psi) + \bar{R}(\Psi) \quad (3)$$

두 곡선이 곡선 생성기술에 의해 구해질 때, 두 곡선 사이의 거리(즉, 톨링의 크기)는 각각의 설정점에서를 제외하고 일정하다고 할 수 없다. 만일 톨링이 일정하고 단위 크기를 갖는다면 식(3)은 다음과 같이 일반화(Normalized) 된다.

$$\bar{\xi}^*(\Psi) = \bar{a} + \frac{\bar{\xi} - \bar{a}}{|\bar{\xi} - \bar{a}|} \quad (4)$$

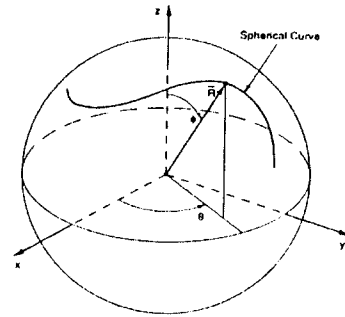


그림 3. 톨링에 의해 생성된 구형커브

두 번째 방법은, 디렉트릭스를 위한 곡선과 톨링을 위한 하나의 구면 곡선(Spherical curve)을 이용하는 것이다. 두 번째 방법이 톨링의 크기가 일정하여 일반화할 필요가 없는 점에 유의하여 본 연구에서는 이 방법을 적용한다. 앞에서 언급했듯이, 공구 좌표계의 단위 벡터가 톨링으로 이용되므로, 톨링은 단위 구면상에 곡선을 생성한다. 구좌표계는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\theta} = (\theta, \phi) \quad (5)$$

톨링의 직각 좌표계 좌표값과 구좌표계의 좌표값의 관계는 다음과 같다.

$$\bar{R} = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \quad (6)$$

식(5)와 (6)에서부터 다음 관계를 얻는다.

$$x = \cos \theta \sin \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \phi \quad (7)$$

이때 두 좌표계 사이의 관계는 다음 4가지 경우가 가능하다.

a) $x=0, y=0$ 일 때, 구좌표계의 θ 는 임의의 값이고 $\phi = 0^\circ$ 또는 180° (8)

b) $x=0, y \neq 0$ 일 때, 구좌표계는 $\theta = \tan^{-1}(y, x), \quad \phi = \tan^{-1}(y/\sin \theta, z)$ (9)

c) $x \neq 0, y=0$ 일 때, 구좌표계는 $\theta = \tan^{-1}(y, x), \quad \phi = \tan^{-1}(x/\cos \theta, z)$ (10)

d) $x \neq 0, y \neq 0$ 일 때, 구좌표계는 식(9)나 식(10)으로부터 얻을 수 있다.

톨링의 구형 곡선 모델링에 있어서, (θ, ϕ) 는 평면 곡선(Planar curve) $\bar{\theta}$ 로 먼저 생성되고 식(6)에 의해서 단위구 상에 표현된다. 평면곡선은 공간상에서 일반 곡선의 z축 성분이 0인 특별한 경우이므로 일

반 곡선에 대한 모델링 기법은 평면 곡선에도 이용될 수 있다.

3. Ferguson 곡선에 의한 룰드 서피스의 표현

로봇 궤적 곡면은 룰드 서피스와 스피ن각에 의하여 표현이 가능하다. 룰드 서피스가 해석적으로 표시되면 이를 즉시 이용할 수 있으나 그렇지 않은 경우에는 자유 곡면으로써 생성하여 주어야 한다. 룰드 서피스는 두 개의 독립 변수가 필요한 일반 자유 곡면과는 달리 한 개의 독립 변수에 의한 두 개의 곡선 생성이 가능하다.

0과 1 사이의 두 점 사이에서 곡선 분할을 고려할 때 곡선 분할상의 임의점의 위치 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{p}(u) = UMS_p; 0 \leq u \leq 1 \quad (11)$$

이때 U는

$$U = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \quad (12)$$

로 나타나고 변환행렬 M과 기하학적 계수 행렬(또는 경계조건) S_p는 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_p = [\bar{p}_0 \ \bar{p}_1 \ \bar{T}_0 \ \bar{T}_1]^T \quad (13)$$

두 끝점, 0과 1에서 \bar{p}_0, \bar{p}_1 은 위치벡터, \bar{T}_0, \bar{T}_1 은 접선벡터를 나타낸다. 퍼거슨 곡선 선분에 적당한 형상을 부여하기 위해 두 끝점에서 접선 벡터의 크기는 곡선 선분의 길이와 같도록 한다.

$$\bar{T}_0 = \frac{|\bar{p}_1 - \bar{p}_0|}{|\bar{p}_0''|} \bar{p}_0'', \quad \bar{T}_1 = \frac{|\bar{p}_1 - \bar{p}_0|}{|\bar{p}_1''|} \bar{p}_1'' \quad (14)$$

\bar{p}_0'', \bar{p}_1'' 은 \bar{p}_0, \bar{p}_1 의 u에 대한 1차 미분항이다.

복합 퍼거슨 곡선은 퍼거슨 곡선 선분들을 각 끝점 들에서 곡률의 연속성이 보장되도록 연결한 집합체이다. N개의 서로 다른 위치 벡터 $\bar{p}_i (i=1, \dots, N)$ 가 있을 때 그 사이 선분의 길이가 균일하다고 한다면, $\bar{p}_i (i=2, \dots, N-1)$ 점에서 곡률을 의미하는 2차 미분항을 같게 하기 위하여는 각 접선 벡터 \bar{T}_i 는 다음과 같은 순환 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} \bar{T}_{i-1} + 4\bar{T}_i + \bar{T}_{i+1} = \\ 3(\bar{p}_{i+1} - \bar{p}_{i-1}); (i=1, \dots, N-2) \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)는 N개의 미지수에 대하여 N-2 개의 방정식을 나타낸다. 접선벡터 \bar{T}_0, \bar{T}_N 가 주어졌다고 가정하면 해를 구할 수 있다^{7,8)}.

로봇 궤적이 N개의 점(Set point)에서 엔드 이펙터상 TCP의 변위와 방위 데이터로써 정의된다면 i 번째 점에서 TCP의 위치 벡터는 다음과 같이 디렉트릭스로 정의된다.

$$\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}(\Psi_i); (i=1, \dots, N) \quad (16)$$

그리고, 공구좌표계의 방향은 행렬로 정의된다.

$$O_i = [\bar{O}(\Psi_i), \bar{A}(\Psi_i), \bar{N}(\Psi_i)]; (i=1, \dots, N) \quad (17)$$

여기에서 서로 직교하는 세 단위 벡터 $\bar{O}(\Psi_i), \bar{A}(\Psi_i), \bar{N}(\Psi_i)$ 은 i 번째 점에서 공구좌표계를 정의한다. 전 절에서와 같이 룰드 서피스를 모델링하기 위해 디렉트릭스의 곡선을 먼저 생성하고, 구면 곡선으로써 롤링을 생성한다. 데이터는 각각의 곡선 선분에 대한 연속적인 중간점, T_i에서 식(16), (17)로부터 얻어진다. 설정점이 곡선 선분의 처음과 끝점이므로, 매개변수 u는 각기 0과 1로 정해진다.

디렉트릭스는 다음 식에 의해 각 선분 별로 생성되고, 경계조건 행렬은 다음과 같다.

$$\bar{\alpha}(u) = UMS_\alpha; 0 \leq u \leq 1 \quad (18)$$

$$S_\alpha = [\bar{\alpha}_0 \ \bar{\alpha}_1 \ \bar{T}_{\alpha 0} \ \bar{T}_{\alpha 1}]^T \quad (19)$$

이때 위치벡터 $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1$ 은 식(16)로부터 얻어지고, 접선 벡터 $\bar{T}_{\alpha 0}, \bar{T}_{\alpha 1}$ 은 식(15)에 의해 결정된다. i 번째 중간점에서 롤링에 대한 데이터는 식(17)의 $\bar{A}(\Psi)$ 에 의해 주어진다. 이 데이터는 직각 좌표계에서 정의된 것이므로, i 번째 중간점에서의 구좌표계 성분은 식(7)~(10)에 의하여 다음과 같이 구하여 진다.

$$\bar{\theta}_i = (\theta_i, \phi_i); (i=1, \dots, N) \quad (20)$$

그리고, $\bar{\theta}$ 는 이차원 평면 곡선으로 다음과 같이 나타나고

$$\bar{\theta}(u) = UMS_\theta; 0 \leq u \leq 1 \quad (21)$$

그 경계조건 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$S_\theta = [\bar{\theta}_0 \ \bar{\theta}_1 \ \bar{T}_{\theta 0} \ \bar{T}_{\theta 1}]^T \quad (22)$$

여기에서 위치벡터 $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1$ 은 식(20)에서 얻어지고, 접선벡터 $\bar{T}_{\theta 0}, \bar{T}_{\theta 1}$ 은 식(15)에 의해 결정된다. 끝으로 평면 곡선의 식(21)을 식(6)에 대입하여 롤링의 구면 곡선을 구할 수 있다.

4. 룰드 서피스의 미분기하적 성질

로봇의 궤적 제어를 위하여는 엔드 이펙터의 위치와 방위뿐만 아니라 속도, 가속도, 각속도, 각가속도 등의 운동계수가 필요하다. 이 계수들은 룰드 서피스의 곡률이론을 써서 구한다. 룰드 서피스에는 그림 3과 같이 Generator trihedron과 Natural trihedron이라는 고유 좌표계가 존재한다. Generator trihedron은 세 개의 단위 직교 벡터로 정의되는데 각기 Generator 벡터, \bar{r} , Central normal 벡터, \bar{t} ,와 Central tangent 벡터, \bar{k} ,로서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{r} = \frac{1}{R} \bar{R}, \quad \bar{t} = \bar{R}', \quad \bar{k} = \bar{r} \times \bar{t} \quad (23)$$

여기에서 $R = |\bar{R}|$ 이고, ' 은 호의 길이 s에 대한 미분을 표시한다. Generator trihedron의 원점은 룰드

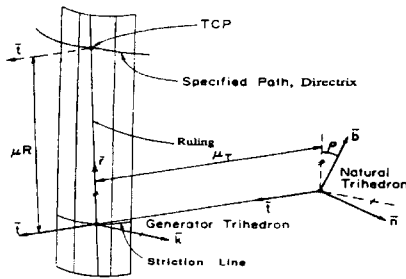


그림 4. Frames of reference

서피스의 Striction point이고 이 궤적은 Striction곡선이다. Striction곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\beta}(s) = \bar{a}(s) - \mu(s)\bar{R}(s) \quad (24)$$

여기서 계수 $\mu(s)$ 는 룰드 서피스의 Striction point로부터 TCP의 위치를 나타내는데 다음과 같이 구한다.

$$\mu(s) = \bar{a}' \cdot \bar{R}' \quad (25)$$

룰링 \bar{R} 은 반드시 단위 벡터가 아니기 때문에 룰드 서피스의 Striction point에서 TCP까지의 거리는 Generator 벡터의 양의 방향으로 μR 이다(그림3). 룰드 서피스에서 Generator trihedron과 Striction곡선은 디렉트릭스의 선택에 따라 변하지 않는 고유의 성질이므로, Generator trihedron과 Striction곡선을 이용하여 로봇 엔드 이펙터의 미분적 운동 계수

를 얻을 수 있다.

Generator trihedron의 1차 각운동 계수는 다음과 같이 얻을 수 있다¹⁰⁾.

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{t} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cot \rho \\ 0 & -\cot \rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{t} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \bar{U}_r \times \begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{t} \\ \bar{k} \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서 ρ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\cot \rho = \frac{\bar{R} \cdot (\bar{R}' \times \bar{R}'')}{(\bar{R}' \cdot \bar{R}')^{3/2}}; \quad (0^\circ \leq \rho \leq 180^\circ) \quad (27)$$

\bar{U}_r 는 Generator trihedron의 Darboux (다부) 벡터인데 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{U}_r = \frac{1}{R} (\cot \rho \bar{r} + \bar{k}) \quad (28)$$

\bar{U}_r 은 시간 종속 운동 (Time-dependent motion)에서의 각속도 벡터와 같은 역할을 하는 시간에 독립적인 운동 계수이므로, Generator trihedron의 Darboux 벡터는 룰드 서피스의 일차 각운동을 설명할 수 있다. 식(24)를 미분하고, 식(23),(24)와 (26)을 대입하면, 룰드 서피스의 Striction point의 1차 위치 변위는 Generator trihedron 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\beta}' = \Gamma \bar{r} + \Delta \bar{k} \quad (29)$$

여기에서 Γ 와 Δ 는 다음과 같이 구한다.

$$\Gamma = \frac{1}{R} (\bar{a}' \cdot \bar{R}) - \mu' R, \quad \Delta = \frac{1}{R} \bar{a}' \cdot (\bar{R} \times \bar{R}') \quad (30)$$

식(27)과 (30)에서 세 함수 $\cot \rho, \Gamma, \Delta$ 를 룰드 서피스의 곡률 함수(Curvature function)라고 부른다¹²⁾.

그림 3에서 보듯이 Generator trihedron이 Striction 곡선을 따라 움직일 때, Central normal 벡터, \bar{t} ,는 Normalia 또는 Central normal surface라고 부르는 또다른 룰드 서피스를 생성한다²⁰⁾. Normalia는 룰드 서피스의 고차 특성을 연구하는데 있어서 중요하며 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{X}_T(s, v) = \bar{\beta}(s) + v\bar{t}(s) \quad (31)$$

Normalia의 각과 위치 변위를 연구하기 위해 사용되는 Natural trihedron은 세 개의 단위 직교 벡터 즉, Central normal 벡터 \bar{t} , Principal normal 벡터 \bar{n} , Binormal 벡터 \bar{b} 로 정의되는데 다음과 같이 구하여 진다.

$$\bar{t} = \bar{R}' = R\bar{r}', \quad \bar{n} = \frac{1}{x} \bar{t}', \quad \bar{b} = \bar{t} \times \bar{n} \quad (32)$$

여기에서 x 는 룰드 서피스의 곡률을 의미하며 다음

과 같이 구한다.

$$x = |\bar{t}'| \quad (33)$$

Natural trihedron의 원점은 Normalia의 Striction point이고 그 궤적은 Normalia의 Striction곡선이며 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\beta}_{\tau(s)} = \bar{\beta}(s) - \mu_{\tau}(s) \bar{t}(s) \quad (34)$$

여기에서

$$\mu_{\tau}(S) = \frac{\bar{\beta}' \cdot \bar{t}'}{\bar{t}' \cdot \bar{t}'} \quad (35)$$

식(35)는 Central normal 벡터의 양의 방향으로 Normalia의 Striction point에서 롤드 서피스의 Striction point까지의 거리를 나타낸다(그림 3). 식(26)과 (29)을 식(35)에 대입하면 μ_{τ} 를 다음과 같이 얻는다.

$$\mu_{\tau} = R \sin^2 \rho (\Delta \cot \rho - \Gamma) \quad (36)$$

Natural trihedron의 1차 각운동 계수는 다음과 같다¹⁰⁾.

$$\frac{d}{dS} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ -x & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \bar{U}_i \times \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \quad (37)$$

여기에서 \bar{U}_i 는 다음과 같이 구한다.

$$\bar{U}_{\tau} = \bar{\tau} \bar{t} + x \bar{b} \quad (38)$$

식(38)은 Natural trihedron의 Darboux 벡터이다. 롤링의 곡률 x 와 Torsion τ 는 다음과 같이 표현된다.

$$x^2 = \frac{(\bar{R}' \times \bar{R}'') \cdot (\bar{R}' \times \bar{R}'')}{(\bar{R}' \times \bar{R}')^3} \quad (39)$$

$$\tau = \frac{\bar{R}'' \cdot (\bar{R}' \times \bar{R}'')}{(\bar{R}' \times \bar{R}'') \cdot (\bar{R}' \times \bar{R}'')}$$

식(39)는 각각 Frenet 공식에서 곡선(Space curve)의 곡률, 비틀림과 유사하다¹⁹⁾²¹⁾. 롤드 서피스의 각운동 연구는 롤링, \bar{R} 에 의해 생성되는 공간곡선에 관한 해석이다. 본 논문에서는 \bar{R} 의 크기가 일정하기 때문에 구 상의 곡선으로 공간곡선을 해석한다. 식(26)과 고차 미분항을 식(39)에 대입하면, 롤링의 곡률과 Torsion은 다음과 같이 표현된다.

$$x = \frac{1}{R} \operatorname{cosec} \rho, \quad \tau = -\rho' \quad (40)$$

식(34)를 미분하고 식(26), (29)과 (36)을 대입하여, Natural trihedron에서 표현되는 Normalia의 Striction point의 일차 운동 계수는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\beta}_{\tau} = \Gamma_i \bar{t} + \Delta \bar{t} \bar{b} \quad (41)$$

여기에서

$$\Gamma_{\tau} = -\mu'_{\tau}, \quad \Delta_{\tau} = \Delta \sin \rho + \Gamma \cos \rho \quad (42)$$

식(40)과 (42)에서 주어진 4개의 함수들은 식(27)과 (30)이 본래의 롤드 서피스를 나타내는 것과 같이 Normalia를 나타낸다¹²⁾.

5. Ferguson 곡선으로 표시된 롤드 서피스의 운동

앞에서 로봇의 궤적은 물량에 의해 생성되는 구면 곡선의 호길이를 의미하는 일반화(Normalized)된 독립변수 s 에 의하여 표시되었다. 그러므로 롤드 서피스의 퍼거슨 곡선 모델에서 독립변수는 u 에 관하여 표현될 수 있다.

$$s(u) = \int_a^u \left| \frac{d\bar{R}(u)}{du} \right| du; \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (43)$$

u 에 대해서 식(6)를 미분하고, 결과를 식(43)에 대입하면,

$$s(u) = \int_a^u \sqrt{\left(\frac{d\phi}{du} \right)^2 + \sin^2 \phi \left(\frac{d\theta}{du} \right)^2} du; \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (44)$$

일반적으로, 독립변수 $s(u)$ 는 식(44)로부터 확정해(Closed-form)로 구할 수 없으며 멱급수 전개를 이용한 근사해를 얻는 것도 어렵다. 그러나 롤드 서피스의 곡률이론을 적용할 때 s 의 미분은 다행히 연쇄법칙(Chain rule)에 의하여 수행할 수 있어 식(44)의 적분을 피할 수 있다.

디렉트릭스, $\bar{a}(u)$,와 평면 곡선, $\bar{\Theta}(u)$,의 s 에 대한 1, 2, 3차 미분 계수를 구하기 위해 임의의 벡터 함수를 $F(u)$ 로 표현하면, $F(u)$ 의 s 에 대한 1, 2, 3차 미분 계수는 다음과 같다.

$$\frac{d\bar{F}}{ds} = \frac{d\bar{F}}{du} \left(\frac{ds}{du} \right)^{-1},$$

$$\frac{d^2\bar{F}}{ds^2} = \frac{d^2\bar{F}}{du^2} \left(\frac{ds}{du} \right)^{-2} - \frac{d\bar{F}}{du} \left(\frac{ds}{du} \right)^{-3} \frac{d^2s}{du^2}, \quad (45)$$

$$\frac{d^3\bar{F}}{ds^3} = \frac{d^3\bar{F}}{du^3} \left(\frac{ds}{du} \right)^{-3} - 3 \frac{d^2\bar{F}}{du^2} \left(\frac{ds}{du} \right)^{-4} \frac{d^2s}{du^2}$$

$$+ 3 \frac{d\bar{F}}{du} \left(\frac{ds}{du} \right)^{-5} \left(\frac{d^2s}{du^2} \right)^2 - \frac{d\bar{F}}{du} \left(\frac{ds}{du} \right)^{-4} \frac{d^3s}{du^3}$$

지금부터 식(45)에서 u 에 대한 벡터함수, $F(u)$,와 변수, s ,의 미분 계수를 구하는 과정을 이야기하고자 한다. 먼저 식(11)로부터 벡터함수 $F(u)$ 를 나타낸다.

$$\bar{F}(u) = UMS_p; \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (46)$$

여기서 U 와 M 은 식(12), (13)으로 주어진다. 벡터함

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{R}}{du} &= \left[-\sin\theta\sin\phi\left(\frac{d\theta}{du}\right) + \cos\theta\cos\phi\left(\frac{d\phi}{du}\right), \cos\theta\sin\phi\left(\frac{d\theta}{du}\right) + \sin\theta\cos\phi\left(\frac{d\phi}{du}\right), -\sin\phi\left(\frac{d\phi}{du}\right) \right] \\
\frac{d^2\bar{R}}{du^2} &= \left[-\sin\theta\sin\phi\left(\frac{d^2\theta}{du^2}\right) + \cos\theta\cos\phi\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right) - 2\sin\theta\cos\phi\left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right) - \cos\theta\sin\phi\left(\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\phi}{du}\right)^2\right), \right. \\
&\quad \left. \cos\theta\sin\phi\left(\frac{d^2\theta}{du^2}\right) + \sin\theta\cos\phi\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right) + 2\cos\theta\cos\phi\left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right) - \sin\theta\sin\phi\left(\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\phi}{du}\right)^2\right), \right. \\
&\quad \left. -\cos\phi\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 - \sin\phi\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right) \right] \\
\frac{d^3\bar{R}}{du^3} &= \left[\sin\theta\sin\phi\left\{-\left(\frac{d^3\theta}{du^3}\right) + 3\left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{du}\right)^3\right\} - 3\sin\theta\cos\phi\left\{\left(\frac{d^2\theta}{du^2}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right) + \left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right)\right\} \right. \\
&\quad \left. - 3\cos\theta\sin\phi\left\{\left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d^2\theta}{du^2}\right) + \left(\frac{d\phi}{du}\right)\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right)\right\} + \cos\theta\cos\phi\left\{\left(\frac{d^3\theta}{du^3}\right) - 3\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2\left(\frac{d\phi}{du}\right) - \left(\frac{d\phi}{du}\right)^3\right\}, \right. \\
&\quad \left. \cos\theta\sin\phi\left\{\left(\frac{d^3\theta}{du^3}\right) - 3\left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 - \left(\frac{d\theta}{du}\right)^3\right\} + 3\cos\theta\cos\phi\left\{\left(\frac{d^2\theta}{du^2}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right) + \left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right)\right\} \right. \\
&\quad \left. - 3\sin\theta\sin\phi\left\{\left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d^2\theta}{du^2}\right) + \left(\frac{d\phi}{du}\right)\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right)\right\} + \sin\theta\cos\phi\left\{\left(\frac{d^3\theta}{du^3}\right) - 3\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2\left(\frac{d\phi}{du}\right) - \left(\frac{d\phi}{du}\right)^3\right\}, \right. \\
&\quad \left. \sin\phi\left\{-\left(\frac{d^3\phi}{du^3}\right) + \left(\frac{d\phi}{du}\right)^3\right\} - 3\cos\phi\left(\frac{d\phi}{du}\right)\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right) \right] \tag{50}
\end{aligned}$$

수가 디렉트릭이면, 경계조건은 식(19)로 주어지고, 벡터 함수가 평면 곡선이면 식(22)로 주어진다. 식(46)의 1, 2, 3차 미분은 다음과 같다.

$$\frac{d\bar{F}}{du} = U_1MS_F, \quad \frac{d^2\bar{F}}{du^2} = U_2MS_F, \quad \frac{d^3\bar{F}}{du^3} = U_3MS_F \tag{47}$$

u에 대한 미분방정식은 다음과 같다.

$$U_1 = [3u^2 \ 2u \ 10], \quad U_2 = [6u \ 200], \quad U_3 = [6 \ 0 \ 0] \tag{48}$$

독립변수, s의 1, 2, 3차 미분 계수는 식(44)를 u에 대해 미분하여 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{du} &= \sqrt{\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 + \sin^2\phi\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2} \\
\frac{d^2s}{du^2} &= \left[\left(\frac{d\phi}{du}\right)\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right) + \frac{1}{2}\sin 2\phi\left(\frac{d\phi}{du}\right)\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \sin^2\phi\left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d^2\theta}{du^2}\right) \right] / \left(\frac{ds}{du}\right) \\
\frac{d^3s}{du^3} &= \left[\left(\frac{d\phi}{du}\right)\left(\frac{d^3\phi}{du^3}\right) + \left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right)^2 + \sin^2\phi\left(\left(\frac{d^2\theta}{du^2}\right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d^3\theta}{du^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right)\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\left(\frac{d\phi}{du}\right)\left(\frac{d\theta}{du}\right)\left(\frac{d^2\theta}{du^2}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \cos 2\phi\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2\left(\frac{d\theta}{du}\right) - \left(\frac{d^2s}{du^2}\right)\left(\frac{ds}{du}\right) \right] / \left(\frac{ds}{du}\right)^2
\end{aligned} \tag{49}$$

θ 와 ϕ 의 미분계수는 식(21)의 평면곡선 $\bar{\theta}$ 를 u에 대하여 미분한 첫번째, 두번째 성분인데 식(47)을 이용하여 구할 수 있다. 그러므로 디렉트릭스 \bar{a} 와 평면곡선 $\bar{\theta}$ 의 s에 대한 1, 2, 3차 미분은 식(47)~(49)을 식(45)에 적용하여 구할 수 있다.

롤링 \bar{R} 의 1, 2, 3차 미분 계수는 식(6)을 u에 대해 미분하여 위 식(50)과 같이 얻어진다. 그러므로 s에 대한 롤링의 1, 2, 3차 미분은 식(49)와 식(50)을 식(45)에 적용하여 구할 수 있다. s에 대한 디렉트릭스와 롤링의 1, 2, 3차 미분은 \bar{a}' , \bar{a}'' , \bar{a}''' 와 \bar{R}' , \bar{R}'' , \bar{R}''' 로 정의한다.

6. 로봇 궤적의 운동

본 절에서는 로봇 엔드 이펙터의 궤적 제어를 위한 운동 계수를 완전하게 구하기 위하여 TCP의 1, 2차 선운동계수와 그 점에서의 엔드 이펙터의 1, 2차 각운동 계수를 구하는 방법에 관하여 살펴 보기로 한다. 현재의 로봇 제어 기술 수준에서는 2차항까지 구하는 것으로 충분하나 필요하면 언제나 고차항을 얻도록 확장할 수 있다. 본 절의 실질적인 목적은 중간계산을 최소한으로 줄여 엔드 이펙터의 각

운동과 TCP의 선운동을 가능하면 간단하게 구하는 것이다. 따라서 모든 식들을 디렉트릭스, \bar{a} , 와 툴링, \bar{R} , 그리고 그 미분 계수들로써 표현하려 한다. 자세한 내용은 이전의 논문¹⁶⁾을 참고하고 본 논문에서는 결과만 간략히 요약하기로 한다.

Generator trihedron의 Generator 벡터, Central 법선 벡터, Central 접선벡터¹⁰⁾¹²⁾를 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{r} = \bar{R}, \quad \bar{t} = \bar{R}', \quad \bar{k} = \bar{R} \times \bar{R}' \quad (51)$$

TCP의 1, 2차 위치 변위는 Generator trihedron의 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{a}' = (\Gamma + \mu')\bar{r} + \mu\bar{t} + \Delta\bar{k} \quad (52)$$

$$\bar{a}'' = (\Gamma' + \mu'' - \mu)\bar{r} + (\Gamma + 2\mu' - \Delta\gamma)\bar{t} + (\Delta' + \mu\gamma)\bar{k}$$

여기에서 각 계수는 다음과 같이 구하여 진다.

$$\mu = \bar{a}' \cdot \bar{R}', \quad \mu' = \bar{a}'' \cdot \bar{R}' + \bar{a}' \cdot \bar{R}'' \quad (53)$$

$$\mu'' = \bar{a}''' \cdot \bar{R}' + 2\bar{a}'' \cdot \bar{R}'' + \bar{a}' \cdot \bar{R}'''$$

$$\Gamma = \bar{a}' \cdot \bar{R} - \mu', \quad \Gamma' = \bar{a}'' \cdot \bar{R} + \mu - \mu''$$

$$\gamma = \bar{R} \cdot (\bar{R}' \times \bar{R}''), \quad \Delta = \bar{a}' \cdot (\bar{R} \times \bar{R}') \quad (54)$$

$$\Delta' = \bar{a}'' \cdot (\bar{R} \times \bar{R}') + \bar{a}' \cdot (\bar{R} \times \bar{R}'')$$

엔드 이펙터의 1, 2차 각변위는 Generator trihedron 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{U}_0 = \Omega\bar{r} + \bar{k}, \quad \bar{U}_0' = \Omega' \bar{r} + (\eta' + \sigma')\bar{t} \quad (55)$$

$$\Omega = \eta' + \sigma' + \cot \rho, \quad \Omega' = \eta'' + \sigma'' - \frac{\rho'}{\sin^2 \rho} \quad (56)$$

$$\cot \rho = \gamma; \quad (0^\circ \leq \rho \leq 180^\circ)$$

$$\rho' = -\sin^2 \rho \{ \bar{R} \cdot (\bar{R}' \times \bar{R}''') \},$$

$$\sigma' = \frac{\Delta'}{\mu} - \frac{\Delta}{\mu} \left(\frac{\Delta\Delta' + \mu\mu'}{\Delta^2 + \mu^2} \right)$$

$$\sigma'' = \frac{\Delta''\mu - \Delta'\mu'}{\mu^2} - \left(\frac{\Delta'\mu - \Delta\mu'}{\mu^2} \right) \left(\frac{\Delta\Delta' + \mu\mu'}{\Delta^2 + \mu^2} \right) - \frac{\Delta}{\mu} \left\{ \frac{(\Delta^2 + \Delta\Delta' + \mu\mu'' + \mu'^2)(\Delta^2 + \mu^2) - 2(\Delta\Delta' + \mu\mu')^2}{(\Delta^2 + \mu^2)^2} \right\}$$

$$\Delta' = \bar{a}''' \cdot (\bar{R} \times \bar{R}') + 2\bar{a}'' \cdot (\bar{R} \times \bar{R}'')$$

$$+ \bar{a}' \cdot (\bar{R}' \times \bar{R}'' + \bar{R} \times \bar{R}''')$$

그리고 η' , η'' 는 스핀각의 1, 2차 미분항이다.

식(54)의 γ 를 식(56)에 사용하여 각 ρ 의 유일한 값을 구할 수 있다. 식(52)의 TCP 1, 2차 위치 변위는 TCP의 선형 속도, 가속도의 일반화된 표현이라 할 수 있다. 또한 식(55)의 엔드 이펙터 1, 2차 각

변위는 엔드 이펙터 각속도, 각가속도의 일반화된 표현이라 할 수 있다. 그런데, 독립변수가 시간이 아닐 때 시간에 따른 특성을 구하기 위해서는 연쇄 법칙을 적용한다. 이 경우 TCP의 선형 속도, 가속도는

$$\bar{V} = \bar{a}'s, \quad \bar{a} = \bar{a}'s + \bar{a}''s^2 \quad (57)$$

여기에서 \bar{a}' , \bar{a}'' 는 식(52)에서 구해진다. 엔드 이펙터의 각속도, 각가속도는 다음과 같이 구한다.

$$\bar{\omega} = \bar{U}_0s, \quad \bar{\omega}' = \bar{U}_0's + \bar{U}_0''s^2 \quad (58)$$

여기에서 \bar{U}_0 , \bar{U}_0'' 는 식(55)에서 주어진다.

7. 응용 예

본 논문에서 제안된 방법을 산업용 로봇의 궤적 계획에 응용하는 예를 보여 준다. 그림 5는 절삭 가공된 반경 225mm 구면의 상단 부분을 보여 준다. 연마 가공등의 마무리 작업을 위하여 로봇 엔드 이펙터에 고정된 공구의 끝단이 곡면에 수직으로 접촉하며 일정한 경로를 정밀 추적하여야 한다. 곡면의 수치 데이터는 선형 절삭 가공 공정의 NC 코드로부터 추출된 CC(Cutter Contact)데이터를 이용한다. 이 때 곡면 위의 경로가 월드 서피스의 디렉트릭스를 형성하고 공구 끝단의 한 방위벡터를 툴링으로 선택한다(본 논문에서는 공구 좌표계의 \bar{A} 를 툴링으로 선택하였다). 공구 좌표계는 월드 서피스의 Generator trihedron에 일치한다. 로봇의 경로가 주어지면 이에 따라 식(16)과 식(17)의 디렉트릭스 데이터와 공구 좌표계 행렬 데이터를 구한다. 본 논문

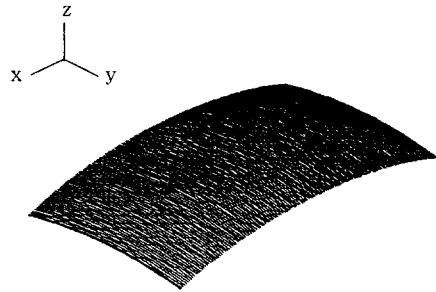


그림 5. 200×100mm의 구면 상단 곡면

에서는 디렉트릭스와 톨링을 퍼거슨 곡선 모델에 기초를 둔 Ferguson utilities⁴⁾라는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 모델링한다. 디렉트릭스와 톨링의 1, 2, 3 차 미분은 연쇄법칙을 이용하여 식(47)~(50)에 의해 구해지고, 식(52)~(55)를 이용하여 TCP의 위치 변위와 엔드 이펙터의 각 변위를 표현하는 다부 벡터를 구한다.

참고문헌

1. Bezier, P., Numerical Control: Mathematics and Applications, John Wiley and Sons, Inc., London, 1972, pp.235.
2. Brady, M., Hollerbach, J. M., Johnson, T. L., Lozano-Perez, T., and Mason, M. T., Robot Motion: Planning and Control, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, Chapter 4, 1982, pp. 585.
3. Clark, J. H., "Parametric Curves, Surfaces, and Volumes in Computer Graphics and Computer-Aided Geometric Design," NASA Ames Research Center, 1987.
4. Choi, B., "NC Machining and CAM Systems," Chung Moon Gak Publications, Korea, 1988.
5. Dewey, B. R., Computer Graphics for Engineers, Harper and Row Publishers, Inc. New York.
6. Farin, G., Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design
7. Faux, I. D., and Pratt, M. J., Computational Geometry for Design and Manufacture, Halsted, New York, 1979.
8. Ferguson, J. C., "Multivariable Curve Interpolation," Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 11, No. 2, April 1964, pp. 221-228.
9. Fu, K. S., Gonzales, R. C., and Lee, C. S. G., Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987, pp. 580.
10. Kirson, Y., "Curvature Theory in Space Kinematics," Doctoral dissertation, University of California, Berkeley, 1975, pp. 140.
11. Litvin, F. L., and Gao, X. C., "Analytical Representation of Trajectory of Manipulators," Trends and Developments in Mechanisms, Machines, and Robotics, The 1988 ASME Design Technology Conferences-20th Biennial Mechanisms Conference, Sept. 25-28, 1988, DE-Vol. 15-3, pp. 481-485, Kissimmee, Florida.
12. McCarthy, J. M., and Roth, B., "The Curvature Theory of Line Trajectories in Spatial Kinematics," ASME JOURNAL OF MECHANICAL DESIGN, Oct., Vol., 103, No. 4, 1981, pp. 718-724.
13. Mortenson, M. E., Geometric Modeling, John Wiley and Sons, New York, 1985, pp. 763.
14. Paul, R. P., "Manipulator Cartesian Path Control, IEEE Trans. Systems, Man., Cybernetics, Vol. SMC-9, No. 11, 1979, pp. 702-711.
15. Rogers, D. F., and Adams, J. A., Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1976, pp. 239.
16. Ryuh, B. S., and Pennock, G. R., "Accurate Motion of a Robot End-Effector using the Curvature Theory of a Ruled Surface," ASME JOURNAL OF MECHANISMS, TRANSMISSIONS, AND AUTOMATION IN DESIGN, Dec., Vol. 110, No. 4, 1988, pp. 383-388.
17. Ryuh, B. S., "Robot Trajectory Planning using the Curvature Theory of Ruled Surfaces," Doctoral dissertation, May 1989, Purdue University, West Lafayette, Indiana, pp. 143
18. Ryuh, B. S., and Pennock, G. R., "Trajectory Planning Using the Ferguson Curve Model and Curvature Theory of Ruled Surface," CIRP Journal of Mechanical Design, Vol. 112, Sep., 1990, pp.377-383.
19. DoCarmo, M. P., 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 503 pp.
20. Guggenheimer, H., 1977, Differential Geometry, Dover Publications, 378 pp.
21. Hsia, L. M., and Yang, A. T., 1981, "On The Principle of Transference in Three-Dimensional Kinematics," ASME Journal of Mechanical Design, July, Vol. 103, No. 3, pp. 652-656.