

직교이방성판 이론에 의한 콘크리트 슬래브의 탄성해석

Elastic Analysis of Reinforced Concrete Slab Using Orthotropic Plate Theory

○정 재 호 정 성 우 윤 순 종
Jung, Jae-Ho Jung, Sung-Woo Yoon, Soon-Jong

ABSTRACT

Two-way concrete slab is often modeled as an orthotropic plate. In the modeling, flexural rigidities of the slab which depend upon the re-bar quantity have to be taken into account. Elastic equivalence technique in which the equilibrium and compatibility of the cross-section of slab satisfied is utilized to determine the flexural rigidities. In the analysis Navier's method is applied on the concrete slab with all edges simply supported under uniform lateral load. In addition to the analysis using orthotropic plate theory, finite element method is also adopted to suggest the finite element modeling and to investigate the applicability of the method. Results obtained by both methods were compared and it is observed that the difference of the results was increased as the ratio of re-bar quantity increased.

Keywords: Two-way Slab, Orthotropic Plate Theory, Finite Element Method, Elastic Equivalence

1. 서론

일반적으로 2방향 슬래브의 휨거동을 정확히 해석한다는 것은 매우 난해한 문제중의 하나이다. 현재까지 널리 쓰이고 있는 2방향 슬래브의 해석 및 설계 방법에는 직접설계법과 등가뼈대법 등이 있으며 이러한 방법들은 콘크리트 슬래브를 두께가 얇고 폭이 넓은 보로 간주하여 해석한다. 이외에도 항복선 방법, 스트립 방법 등의 소성해석과 유한요소법이 있으며, 콘크리트 슬래브를 평판으로 취급하고 해석하는 탄성해석 등이 있다.

-
- 1) *홍익대 대학원 토목공학과 석사과정
 - 2) **정회원, 홍익대 토목공학과 교수

본 연구에서는 콘크리트 슬래브를 두께가 얇은 구조적 직교이방성판으로 간주하고 고전적 직교이방성판 이론에 의해 해석한다.

직교이방성판이란 재료의 역학적 성질이 직교하는 방향으로 서로 다른 판이다. 본 연구의 콘크리트 슬래브는 2방향 슬래브로서 두 가지 이상의 다른 재료로 구성되어 있으며, 각 방향에 대해 휨강성 및 비틀림강성이 다른 경우로서 직교이방성판으로 모델링 할 수 있다.

콘크리트 2방향 슬래브의 경우 서로 직각인 방향에 대해 보강된 철근의 양에 따라 휨강성이 달라진다. 따라서 본 연구에서는 콘크리트를 균질한 재료라고 가정하고 탄성등가법(Elastic Equivalence Method)을 이용하여 각 방향의 휨강성을 구하였다. 이와 같이 구한 휨강성을 이용하여 4변이 단순지지되어 있고 인장철근만 배근된 2방향 콘크리트 슬래브를 고전적 직교이방성판 이론에 의해 해석한다. 또한, 유한요소법에 따라 이 판을 모델링하여 해석하고 그 결과를 직교이방성판 이론에 의한 해석결과와 비교하여 유한요소법에 의한 2방향 슬래브 모델과 사용한 유한요소의 타당성을 검토한다.

2. 직교이방성판 이론에 의한 콘크리트 슬래브의 해석

2.1 직교이방성판의 처짐식

그림 1과 같은 직교이방성판의 휨에 대한 지배미분방정식은 식 (1)과 같다¹⁾.

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (1)$$

여기서, H는 다음과 같이 정의된다²⁾.

$$H = D_x \nu_{yx} + 2D_{xy} \quad (2)$$

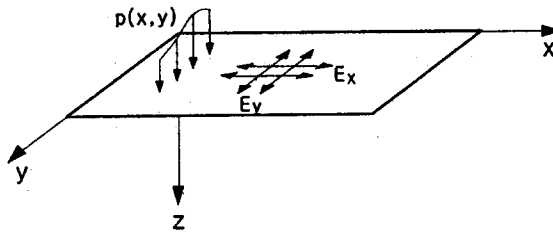


그림 1. 분포하중을 받는 직교이방성판

여기서, D_x 와 D_y 는 재료의 성질방향 x , y 축 방향에서의 휨강성이며 D_{xy} 는 비틀림강성으로서 다음과 같다.

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad (3a)$$

$$D_y = \frac{E_y t^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad (3b)$$

$$D_{xy} = \frac{G_{xy} t^3}{12} \quad (3c)$$

또한 E_x , E_y , G_{xy} 는 재료의 x , y 축 방향에서의 탄성계수와 전단탄성계수이고 ν_{xy} , ν_{yx} 는 각각 재료의 x , y 축 방향에서의 프아송비이며 재료를 직교이방성으로 간주하였으므로 $\nu_{xy}D_y = \nu_{yx}D_x$ 인 관계가 성립하여야 한다. 판의 두께는 t 이고 w 는 판의 z 축 방향의 처짐이며 $p(x, y)$ 는 판의 z 축과 평행하게 작용하는 분포하중이다.

판의 4변이 단순지지되어 있으며 등분포하중을 받는 판의 처짐식은 Navier의 방법을 사용하면 다음 식 (4)와 같다²⁾.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

위 식에서 A_{mn} 은 다음과 같다.

$$A_m = \frac{16p_0}{mn\pi^6 \left\{ D_x \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2H \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_y \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}} \quad (5)$$

여기서, a 와 b 는 각각 판의 길이와 폭이며 p_0 는 판에 작용하는 등분포하중이다.

후버(Huber)는 유효비틀강성, H 를 다음과 같이 제시하였다³⁾.

$$H = \sqrt{D_x D_y} \quad (6)$$

여기서, 위 식이 성립되기 위한 조건은 다음과 같다³⁾.

- 1) 판의 두께는 일정하다.
- 2) 판은 완전 탄성거동을 한다.
- 3) 판의 처짐은 판의 두께에 비해 매우 작다.

직교이방성판을 해석하기 위해서는 D_x , D_y , D_{xy} , ν_{xy} 를 우선적으로 결정해야 한다. 본 연구에서는 D_x , D_y 를 탄성등가법을 적용하여 구하고 식 (6)을 이용하여 유효비틀강성을 구해 처짐식에 적용하였다.

2.2 탄성등가법에 의한 휨강성의 결정

콘크리트 슬래브를 직교이방성판으로 간주하고 탄성등가법을 적용하는데 필요한 가정사항은 다음과 같다³⁾.

- 1) 콘크리트와 철근은 각각 등방성이며 균질하다.
- 2) 철근은 일정한 간격으로 배근되어 있으며 철근과 콘크리트는 일체로 거동한다.
- 3) 휨강성은 각 방향에 대해 일정하게 분포된다.

앞에서 언급한 바와 같이 직교이방성판의 처짐식을 구하기 위해서는 먼저 각 방향에 대한 휨강성이 결정되어야 한다.

콘크리트 슬래브와 등가인 직교이방성판의 휨강성을 결정하기 위해 그림 2와 같이 단위 폭을 갖는 콘크리트 슬래브를 고려하였다.

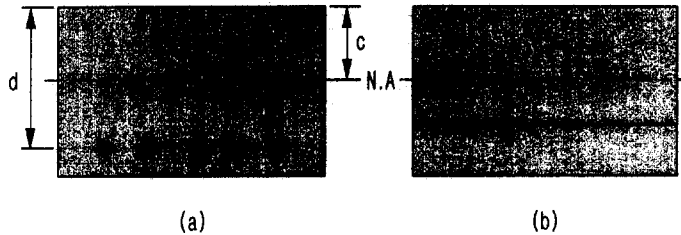


그림 2. 단위 폭을 갖는 콘크리트 슬래브의 단면

위 그림에서 (a)를 환산단면법을 이용하여 철근의 단면을 콘크리트 단면으로 치환한 것이 그림 (b)이다. 또한, c 는 중립축으로부터의 거리이며 d 는 슬래브의 유효높이이다.

콘크리트 슬래브의 중립축에서의 곡률을 κ , 저항모멘트를 M 이라 하고 등가인 직교이방성판의 중립축에서의 곡률을 κ_{eq} , 저항모멘트를 M_{eq} 라고 하면 저항모멘트는 서로 같아야 하므로 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\kappa_{eq} D_{eq} = \kappa \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} \left\{ I_c + \left(\frac{E_s}{E_c} - 1 \right) I_s \right\} \quad (7)$$

또한, 중립축에서의 곡률이 같아야 한다는 조건으로부터 등가휨강성 D_{eq} 를 구하면 다음과 같다³⁾.

$$D_{eq} = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} \left\{ I_c + \left(\frac{E_s}{E_c} - 1 \right) I_s \right\} \quad (8)$$

여기서, E_c , E_s , I_c , I_s 는 각각 콘크리트와 철근의 탄성계수와 중립축에 대한 단면2차모멘트이고 ν_c 는 콘크리트의 프아송비이다.

3. 유한요소법에 의한 콘크리트 슬래브의 해석

콘크리트 슬래브의 유한요소해석에는 상용 구조해석 프로그램 중의 하나인 GTSTRUDL⁴⁾을 이용하였다. 콘크리트 슬래브 모델은 x 축 방향과 y 축 방향으로 주철근이 배근된 2방향 슬래브이고, 4변은 단 순지지되어 있다. 사용된 유한요소는 등분포하중만 재하되었으므로 판의 휨요소(plate bending)중의 하나인 BPHQ(Bending Plate Hybrid Quadrilateral)를 사용하였으며 이 요소의 절점 1에서의 자유도는

다음 그림 3과 같다.

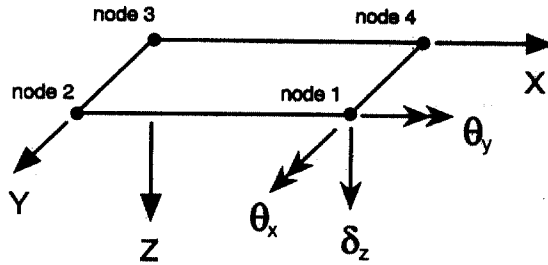


그림 3. GTSTRUDL의 BPHQ요소와 절점 1의 자유도

인장철근의 모델링에서는 3차원 뼈대요소(space frame member)를 사용하였고, 실제 철근이 배근된 위치와 일치시키기 위해 뼈대부재의 편심(member eccentricity)을 고려하였다.

그림 4는 변형전의 콘크리트 슬래브 및 편심되게 배치된 철근의 유한요소 모델이다. 그림 5는 하중 재하 후 처짐이 발생한 모습을 나타낸 것이다.

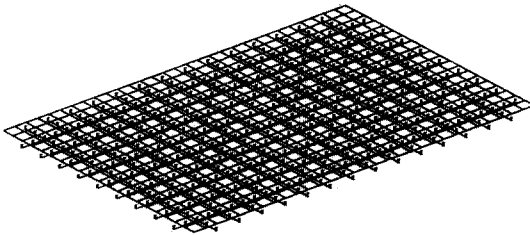


그림 4. 변형 전의 유한요소 모델

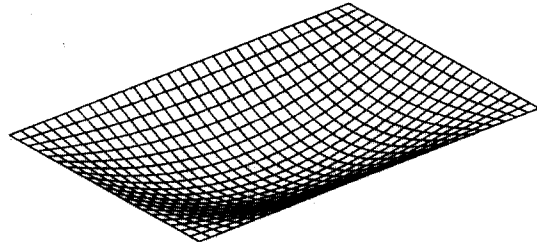


그림 5. 변형 후의 유한요소 모델

4. 결과의 비교

콘크리트 슬래브의 길이와 폭이 각각 450 cm와 300 cm, 두께가 15 cm이며 슬래브의 유효높이 d 는 10 cm이다. 길이 방향 철근량은 단위 폭당 15 cm^2 로 일정하게 하고 폭 방향의 철근량은 24.89 cm^2 , 31.11 cm^2 , 37.33 cm^2 로 변화시키면서 각 경우에 대해서 직교이방성판 이론과 유한요소법을 적용하여 콘크리트 슬래브의 휨해석을 하였다. 유한요소의 모델링에서 한 요소의 크기는 $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$ 이므로 유한요소의 형상비는 1이다. x 축 및 y 축에 따라 한 변은 각 축과 직각 방향의 변위를 구속시키고 다른 한 변은 이 변위를 허용하였다. 또한 4변의 휨변위는 허용하였다. 해석결과로부터 최대처짐과 최대 모멘트를 구했으며 그 결과는 다음 표 1과 같다.

표 1. 콘크리트 슬래브의 최대 처짐과 최대 모멘트 비교

철근량 (cm ² /m)		24.890	31.110	37.330
판 이론	처짐 (cm)	0.414	0.396	0.381
	모멘트 (kg·cm)	1445	1471	1490
유한요소	처짐 (cm)	0.570	0.564	0.558
	모멘트 (kg·cm)	1370	1358	1343
차 (%)	처짐	+37.7	+42.4	+46.5
	모멘트	-5.2	-7.7	-9.9

$E_c = 251,000 \text{ kg/cm}^2$, $E_s = 2,040,000 \text{ kg/cm}^2$

5. 결론

콘크리트 슬래브를 구조적 직교이방성으로 간주하고 탄성등가법을 이용하여 슬래브의 길이와 폭 방향에 대한 휨강성을 구하였으며, 고전적 직교이방성판 이론을 도입하여 휨해석을 하였다. 또한 유한요소법에 따라 콘크리트 슬래브를 모델링하여 해석을 하였으며 그 결과는 표에 나타내었다.

슬래브의 길이 방향으로 배근된 철근량은 일정하게 하고 폭 방향으로 변화를 주었을 때 처짐량의 차이는 유한요소법에 의한 결과가 37.7~46.5% 정도로 컸으며, 최대모멘트의 차이는 유한요소법에 의한 결과가 -5.2~-9.9% 정도로 작게 계산되었다. 따라서 유한요소법을 이용한 해석 결과는 직교이방성판 이론에 의한 결과와 비교할 때 처짐에서는 상당한 차이를 보여 주고 있으며 모멘트의 계산에서는 그 차가 10%이하를 보여주고 있다. 실제의 2방향 슬래브에서는 철근량의 차가 그렇게 크지 않으므로 유한요소법에 의한 응력해석 및 설계는 큰 문제가 없다고 판단되나 철근량의 차가 큰 경우에 대한 유한요소 해석은 상당한 주의가 필요하다고 판단된다.

참고문헌

1. Szilard, R., *Theory and Analysis of Plates - Classical Methods*, Prentice Hall Inc., Englewood, N. J., 1974.
2. Ugural, A. C., *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill Company, New York, 1981.
3. Troitsky, M. S., *Stiffened Plates Bending, Stability and Vibrations*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1976.
4. GTSTRUDL, *GTSTRUDL User's Manual*, Computer Aided Structural Engineering, Georgia Institute of Technology, 1993.