

곡률을 가지는 보의 동적 모델링 및 해석

이대형*(금오공과대학교 대학원), 강병식(금오공과대학교 대학원),
홍성욱(금오공과대학교), 박중윤(금오공과대학교)

Dynamic modeling and analysis of curved beams

Dae-Hyung Lee(Graduate School, KNUT), Byoung-Sik Kang(Graduate School, KNUT),
Seong-Wook Hong(KNUT) and Joong-Youn Park(KNUT)

ABSTRACT

This paper deals with in-plane vibration analysis of curved beams. The exact dynamic element method is applied to obtain the dynamic model for curved beams. Numerical examples are provided to validate the proposed modeling and analysis method. The numerical results show that the proposed method is useful for the dynamic analysis of curved beams.

Key Words : Curved beam(곡률을 갖는 보), In-plane vibration(면내 진동), exact dynamic element(엄밀한 동적 요소), Natural frequency(고유 진동수)

1. 서론

곡률을 가지는 보는 기계적 구조물, 토목 구조물, 우주항공산업 등에 널리 사용되고 있다. 예컨대, 미사일 유도 장치의 휘어진 케이블, 교량의 거더(girder), 드럼 브레이크의 브레이크 슈, 터보기계장치 날개의 보강재 등 많은 응용 예를 볼 수 있다. 또한 구조 해석에서 쉘(shell) 구조물의 간략화된 모델로도 사용되어지고 있다.

곡률을 가지는 보에 대한 연구는 19세기부터 시작되었다. 최근 수치계산 방법의 발달에 따라 연구가 다시 활성화되어 Irie^[1] 등은 호의 평면진동 고유진동수에 관한 연구를, Mau와 Williams^[2]는 그린함수를 이용하여 아크진동을 해석하였으며, Perkins^[3]는 탄성 아치(arch)의 평면진동을 공식화한 바 있다. 또, Chidamparam과 Leissa^[4]는 최근 면내(in-plane) 자유진동 해석에 중심선의 영향을 고려하여 해석의 정밀도를 향상시켰다. 그러나 일반적인 형상을 갖는 보의 경우에 대한 해석은 찾기 어렵다.

본 연구에서는 엄밀한 동적 요소 행렬^[5]을 이용

하여 곡률을 가지는 보의 동적 모델링 및 해석하는 방법을 제안하였다. 엄밀한 동적 요소를 유도하기 위해 곡률을 가지는 보 요소의 운동방정식을 공간 좌표에 관한 상태방정식 형태로 표현하였으며 시간에 대해 라플라스 변환을 하여 얻어지는 라플라스 영역의 운동방정식을 다시 공간 좌표에 관하여 라플라스 변환을 적용한 후 단순화하여 이를 역변환하는 과정을 통하여 엄밀한 동특성 행렬을 유도하였다.

제안된 모델링 방법의 검증을 위해 일반적인 균일한 보, 단순한 곡률을 가지는 보 및 두 개의 곡률을 가지는 보 등에 제안된 방법을 적용하였다.

2. 곡률을 가지는 보의 동적 모델링

2.1 운동방정식

곡률을 가지는 보에서는 보 각각의 위치에서마다 축방향 힘과 전단력, 휨 모멘트가 발생한다. 이와 같은 시스템에서 공간좌표에 관한 상태공간 형식으로 운동방정식을 쓰면 다음과 같다.^[6]

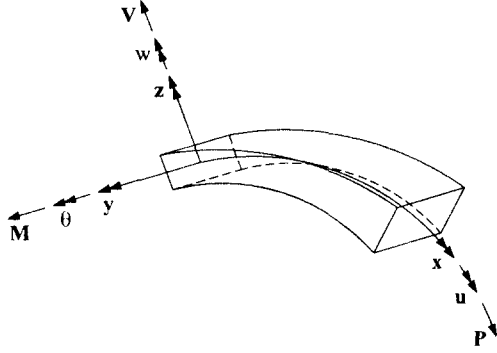


Fig. 1 Coordinates system for curved beam modeling

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{AE} - \frac{M}{ARE} + \frac{w}{R} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta + \frac{u}{R} - \frac{V}{GA_s} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{M}{EI} + \frac{w}{R^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{V}{R} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{P}{R} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V + \rho r_y^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (6)$$

여기에서 u, w, θ 는 축방향 변위, 횡방향 변위, 및 각변위이고, P, V, M 은 축방향 힘, 전단력, 휨모멘트를 나타낸다. 그리고, A 는 단면적, E 는 재료의 탄성 계수, R 은 빔을 따라 도심축에서부터 곡선까지의 곡률반경, G 는 전단계수, A_s 는 등가 전단면, I 는 관성모멘트, ρ 는 단위 길이당 질량, r_y 는 y 축에 대한 횡단면의 선회 반경(radius of gyration)이다. Fig. 1은 운동 방정식 유도에 사용된 좌표계를 보여주고 있다.

2.2 엄밀한 동적 요소 행렬의 유도

식 (1)~(6)을 시간에 대한 라플라스 변환하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \Psi(x, s)}{\partial x} = B(s)\Psi(x, s) \quad (7)$$

여기서,

$$\Psi(x, s) = [u \ w \ \theta \ P \ V \ M]^T$$

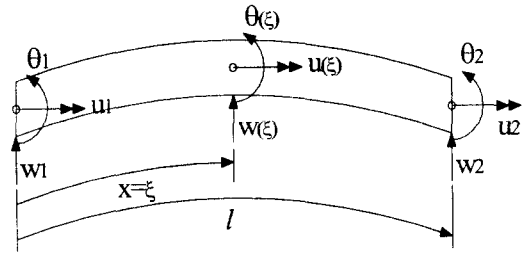


Fig. 2 Coordinates system for curved beam element

$$B(s) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b & 0 & c \\ a & 0 & -1 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -g & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$a = -\frac{1}{R}, \quad b = -\frac{1}{AE}, \quad c = \frac{1}{ARE}, \quad d = \frac{1}{GA_s},$$

$$e = -\frac{1}{R^2}, \quad f = -\frac{1}{EI}, \quad g = -\rho s^2, \quad h = -\rho r_y^2 s^2$$

식 (7)을 다시 공간 좌표 x 에 대하여 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$\hat{\Psi}(\lambda, s) = [\lambda I - B]^{-1} \Psi(0, s) \quad (8)$$

여기서, λ 는 공간 좌표에 관한 라플라스 변수이며, $(\hat{\cdot})$ 은 공간 좌표에 대한 라플라스 변환 결과를 의미한다. 식 (8)을 공간 좌표에 대하여 라플라스 역변환하면 다음과 같아진다.

$$\Psi^*(x, s) = C(x, s)\Psi^*(0, s) \quad (9)$$

식 (9)에 Fig. 2와 같은 경계값을 부가하고 변수를 재배치하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ P(\xi) \\ V(\xi) \\ M(\xi) \end{bmatrix} = D^e(s, \xi) \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u(\xi) \\ w(\xi) \\ \theta(\xi) \end{bmatrix} \quad (10)$$

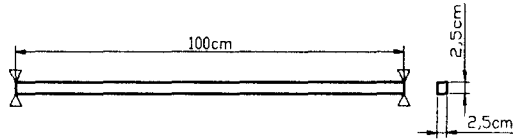


Fig. 3 Model 1: a uniform beam system

Table 1 Comparison of exact and computed natural frequencies

Mode	Exact ^[5] (rad/s)	Proposed Method (rad/s)
1	3.557785e+002	3.557785e+002
2	1.418825e+003	1.418825e+003
3	3.176509e+003	3.176509e+003
4	5.608550e+003	5.608550e+003

식 (10)을 길이 l 인 곡률을 가지는 보 요소에 대해 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = D^e(s, l) \begin{bmatrix} u_{1*} \\ w_{1*} \\ \theta_{1*} \\ u_{2*} \\ w_{2*} \\ \theta_{2*} \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (11)을 이용하여 일반적인 형태의 곡률을 가지는 보를 요소로 구분한 후 이를 조합함으로써 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$F^*(s) = D(s)q^*(s) \quad (12)$$

여기에서 q^* 는 전역 변위 좌표 벡터의 라플라스 변환이며 F^* 는 이 좌표에 대응하는 힘벡터의 라플라스 변환이다. 식 (12)는 주어진 시스템에 대한 라플라스 영역에서의 운동방정식을 나타내게 되며 $D(s)$ 는 시스템의 동특성 행렬을 의미하게 된다.

식 (12)로부터 주어진 시스템에 대한 고유치 문제를 정의할 수 있다.

$$D(s)q^*(s) = 0 \quad (13)$$

고유치는 $D(s)$ 에 대한 행렬식이 0이 된다는

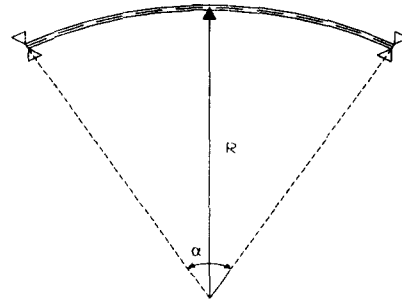


Fig. 4 Model 2: a simply supported curved beam

Table 2 Specifications of numerical model 2

Property	Data
Radius (m)	1
arc segment angle (°)	10, 20, 40
width (m)	0.02
thickness (m)	0.01
Young's modulus (N/m ²)	2.0×10^{11}
Density (kg/m ³)	7.75×10^3

조건식으로부터 구할 수 있다. 계산된 고유치를 식 (13)에 대입하면 고유벡터를 구할 수 있고, 고유벡터를 이용하여 엄밀한 고유함수도 구할 수 있다.

3. 수치예제

3.1 예제 1 : 양단 단순 지지된 균일한 보

본 예제에서는 참고문헌^[5]에서 취급하였던 양단이 단순 지지된 균일한 보이다. Table 1에는 참고문헌에서 제시한 엄밀해 고유진동수와 제안된 방법에 의해 구해진 고유진동수를 비교하였다. 제안된 방법에서는 하나의 요소로 모델링 하였으며, 반경을 무한대(∞)로 놓아 균일 직선보가 되도록 하였다. 제안된 방법으로 구한 고유진동수와 참고문헌의 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

3.2 예제 2 : 일정한 곡률을 가지는 보

여기서는 일정한 곡률을 가지는 보에 대해 참고문헌^[7]에서 제시한 고유진동수와 제안된 방법에 의해 구하여진 고유진동수를 비교하였다. Table 2에는 참고문헌에서 제시한 시스템의 사양을 나타내었고, Table 3에서는 아크각 변화에 따른 고유진동수를 비교하였다. Table 4에 나타낸 것처럼 고유치가 유사하게 나타나고 있지만 각도가 커지면서 참고문헌에서 제시한 고유치보다 제안된 방법으로 구한 고유치가 좀더 크게 나타나고 있고 있음을 알 수 있

다.

3.3 예제 3 : 두 가지 곡률을 가지는 보

본 예제에서는 기존의 문헌에서 취급하지 않았던 두 개의 곡률을 가지는 보 구조물을 제안된 방법으로 풀어보았다. Fig. 5에는 예제에서 다룬 보 구조를 보여주고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 양단은 지지되어 있는 상태이고 동일한 곡률반경을 가지는 두 개의 보가 서로 반대 방향으로 연결되어 있는 형태이다. 본 예제에서는 2개의 요소로 모델링 하였으며 각 요소의 매개변수는 Table 2에 나타난 것과 같은 물성치를 갖는다. Table 4에서 제안된 방법으로 구한 고유진동수를 나타내었다. 곡률 반경의 방향에 따라서도 고유진동수에 변화가 생김을 알 수 있다.

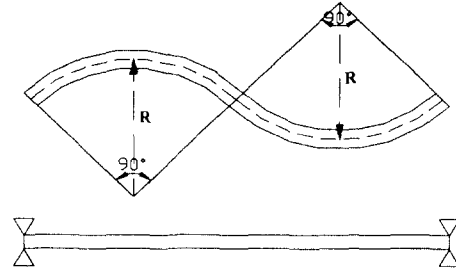


Fig. 5 Model 3: a beam with two curvatures

Table 4 Natural frequencies of model 3

Natural frequency (rad/s)			
mode 1	mode 2	mode 3	mode 4
300.11	429.86	1086.4	2524.5

4. 결론

본 연구에서는 곡률을 가지는 보의 진동 해석을 위하여 엄밀한 동적 요소로 모델링하고 해석하는 방법을 제안하였다. 이를 위해 기존의 단순보에 대해 개발되었던 엄밀한 동적 요소 행렬 유도 과정을 곡률을 가지는 보에 적용할 수 있도록 개편하였다. 4개의 수치예제를 통하여 제안한 방법의 타당성을 검증 하였으며 2개의 예제는 기존의 문헌에서 취급하지 않았던 문제에 대하여 제안한 방법을 사용하였다. 수치예제를 통하여 곡률을 가지는 보뿐만 아니라 단순한 일반적인 보 구조물에도 적용이 될 수 있음을 확인하였다.

Table 3 Comparison of natural frequencies for numerical model 2

Angle(°)	Mode	Reference ¹⁷⁾ (rad/s)	Proposed Method (rad/s)
α = 10	1	1.89831e+4	1.9020e+4
	2	7.5999e+4	7.6036e+4
	3	1.7102e+5	1.7106e+5
α = 20	1	4.7293e+3	4.7660e+3
	2	1.8983e+4	1.9020e+4
	3	4.2740e+4	4.2777e+4

참고문헌

1. T. Irie, G. Yamada and K. Tanaka, "Natural frequencies of in-plane vibration of arcs," *Journal of Applied Mechanics*, 50, pp.449-452, 1983.
2. S.T. Mau and A.N. Williams, "Green's function solution for arch vibration," *Journal of Engineering and Mechanics*, ACSE Vol.114, No.7, pp.1259-1264, 1988.
3. N.C. Perkins, "Planar vibration of an elastic arch: theory and experiment," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.112, No.3, pp.374-379, 1990.
4. P. Chidamparam and A.W. Leissa, "Influence of centerline extensibility on the in-plane free vibrations of loaded circular arches," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.183, No.4, pp.779-795, 1995.
5. S.W. Hong and J.W. Kim, "Modal analysis of multi-span timoshenko beams connected or supported by resilient joints with damping," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.227, No.4, pp.787-806, 1999.
6. D. Pilkey, *Formulas for stress, strain, and structural matrices*, John Wiley & Sons INC.
7. L.W. Chen and G.S. Shen, "Vibration and buckling of initially stressed curved beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.215, No.3, pp.511-526, 1998.