

# 자유도 저감을 이용한 자동차 배기시스템의 벨로우즈 진동해석 모델

김대현\*(경희대 대학원 기계공학과), 최명진\*\*(경희대 기계산업시스템공학부)

## A Vibration Analysis Model for Bellows Using Reduced Degree Of Freedom in the Vehicle Exhaust System

D. H. Kim(Mech. Eng. Dept., KHU), M. J. Choi(Mech. And Indust. System Eng. Dept., KHU)

### ABSTRACT

In this paper, a simplified vibration analysis model for bellows was presented to avoid excessive effort required for shell model. To reduce degree of freedom, bellows was modelled using one dimensional beam element. The equivalent mass and stiffness matrices were obtained based upon Guyan reduction process. The results were compared with the confirmed results, which were in good agreement.

**Key Words** : Bellows(벨로우즈), Equivalent Stiffness Matrix(등가강성행렬), Vibration Analysis(진동해석), Exhaust System(배기시스템), Non-Structural Node(비구조적 절점), FEM(유한요소해석), Guyan Reduction(구약 저감법)

### 1. 서론

수송 기계용 배기시스템이나 산업 기계용 배관시스템 등에서 쓰이고 있는 벨로우즈(Bellows)는 주로 진동, 소음이나 열변형을 흡수할 목적으로 사용되고 있다. 특히 자동차 배기시스템(Exhaust system)에서 벨로우즈는 파워 플랜트계 및 엔진 공회전(Idle)시 관성력의 불균형이나 토크 변동에 의해 발생하는 진동 및 소음을 저감시키고, 주행 중에 노면으로부터 발생하는 진동을 흡수하여 승차감 향상은 물론 배기시스템의 내구성을 향상시키는데 사용되고 있다.

벨로우즈는 여러 개의 파형(Convolution)을 갖는 유연한 셸(Flexible shell) 구조로 이루어져 있으며, 형상에 따라서 통상 U형, S형, Multi-Ply형, ㄱ형으로 나눌 수 있다. 이중 자동차 배기시스템용으로는 U형이 많이 쓰이고 있다.

이러한 구조는 모델링시 많은 요소로 Meshing 하게 되므로 전체 시스템에서 벨로우즈와 같은 작은 부분에 의해서 전체의 해석시간이 길어지며, 시스템의 디자인 변경의 영향을 연구할 때나, 많은 시뮬레이션을 시행함에 있어 Shell 모델은 계산량과 해석시간을 증대시키는 부정적인 역할을 하게 된다.

벨로우즈는 해석시 대표적인 EJMA(Expansion Joint Manufacturers Association)<sup>[14]</sup>에 기술된 간이식을 통하여 해석이 이루어지거나 이를 수정한 이론을 바탕으로 해석되어 왔다. 그러나 EJMA의 Formulae는 축하중에 대한 stress와 stiffness에서 대략 20%안에서 정확도를 보였으며, 비틀림에 대한 언급은 되지 않았다.<sup>[1]</sup>

자동차 배기시스템 해석에 대한 최근 연구동향<sup>[2~12]</sup>을 살펴보면 벨로우즈에 대한 유한요소모델개발에 많은 관심이 집중되고 있다. 1964년 Anderson<sup>[8,9]</sup>의 논문에서 처음으로 Shell Model을 단순한 Beam Model 로 등가 시킴으로써 해결방안을 제시하였다. 김봉수<sup>[10]</sup>와 허덕재<sup>[4]</sup>는 벨로우즈의 모델링시 스프링 요소는 타당하지 않다는 것을 밝혔으며, 이장명<sup>[11]</sup>은 Timoshenko보의 특성방정식을 이용하여 관성주파수대에서 전단수정계수를 고려하여 등가 beam의 해석을 실시하였다. 이영신<sup>[1]</sup>은 축방향과 횡방향 강성 및 수정계수를 고려하여 기본 고유진동수를 예측할 수 있는 간이식을 제안하였다.

Morishita와 Jakubauskas<sup>[2,7]</sup>는 Mass and Rotary inertia의 영향을 고려한 beam model로 단순화하여 유한요소 해석을 실시하였다. 또한, 고병갑<sup>[6]</sup>등은 원

추대요소(Conical shell)를 비축대칭으로 확장한 모델을 사용하였고, 김윤영<sup>[12]</sup>등은 강성의 방향을 고려한 직교 이방성 쉘(Orthotropic shell)로 모델링을 시도하기도 하였다.

본 논문에서는 벨로우즈와 동일한 동역학적 특성을 갖는 등가 보를 구성하기 위한 등가질량행렬(Equivalent mass Matrix)과 등가강성행렬(Equivalent stiffness Matrix)을 자유도 저감 개념을 적용한 상용 유한요소프로그램을 이용하여 구하고, 알맞은 보 이론을 적용하여 행렬들과 비교하여 구조적 물성치를 추출한다. 이것을 이용하여 벨로우즈의 고유진동수를 해석함으로써 동역학적으로 단순화된 해석 방법을 제시하고자 한다. 이 결과를 참고문헌상의 값들과 비교함으로써 검증은 시도하였다.

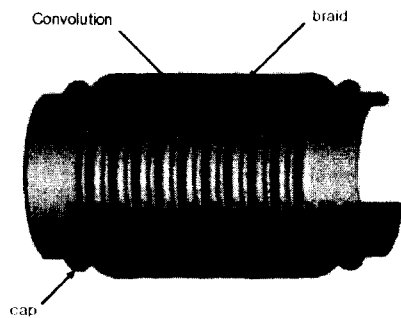


Fig. 1 Bellows in the Exhaust system

## 2. 벨로우즈 동적 모델링

### 2.1 벨로우즈의 구성

본 연구에서 사용된 벨로우즈는 크게 Cap, Braid, 주름(Convolution)부분의 3부분으로 구성되어 있으며, 전체 그림과 내부 상세 그림이 각각 Fig. 1과 2에 나타나 있다. 모델링시 Cap과 Braid에 대해서는 고려하지 않았다. 특히 braid는 비선형적인 거동<sup>[11]</sup>을 보이므로 본 논문에서는 탄성영역 내에서 선형적인 거동을 보이는 Convolution 부분만을 고려하여 해석을 실시하였다.

### 2.2 해석모델의 구성

벨로우즈를 동역학적으로 단순된 등가 모델을 구성한다. 다시 말해서 변형에너지와 운동에너지가 같은 모델을 구성하는 것이다. 이를 위해서는 다음과 같은 특성이 고려되어야 한다.

① 전체의 Mass가 같고, Kinetic Energy가 같아야 한다. 즉,  $[\dot{x}]^T [M] [\dot{x}] = [\dot{x}']^T [M'] [\dot{x}]$  이

성립해야 한다.

② Mass Center가 같아야 한다.

③ Potential Energy가 같아야 한다.

즉,  $[x]^T [K] [x] = [x']^T [K'] [x']$

여기서  $[x]$ 는 요소 분할된 경우의 절점 변위이고,  $[x']$ 는 자유도 저감법을 이용하여 모델의 자유도를 줄였을 때의 절점 변위이다.

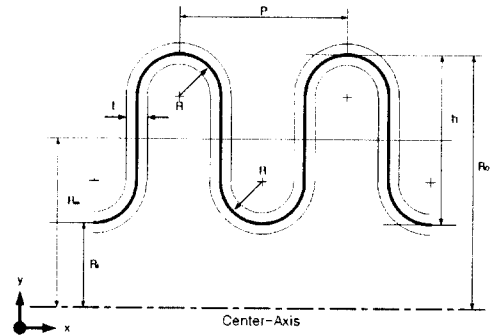


Fig. 2 U-shaped Convolution of bellows

### 2.3 등가강성행렬의 구성

벨로우즈의 등가강성행렬들을 추출하기 위하여 자유도 저감개념을 이용하였다. 이 개념은 벨로우즈 모델에서 비독립적(종속적)인 자유도를 하나의 독립적인 자유도로 나타냄으로써 계산되는 자유도의 개수를 줄이는 방법을 말한다. 그러므로 독립 자유도가 결정되면 종속적 자유도의 거동도 알 수 있다.

이 방법을 적용하기 위하여 Fig. 3과 같은 Shell로 모델링된 벨로우즈에서 Convolution의 단면에 비구조적 절점(Non-Structural Node)을 단면 중심에 선정하고, 비구조적 절점들은 중심에 Rigid bar로써 연결한다.

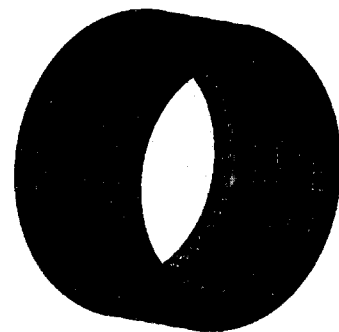


Fig. 3 Shell Model for Non-structural Node

이 점은 보 이론에 적용하기 위한 끝단 절점이 된다. 여기서 적용하기 위한 보이론으로는 벨로우즈가 길이에 비해 반경이 크고 전단력을 고려할 때 Extended Timoshenko Beam 이론이 타당하다고 판단된다.

독립 자유도(비구조적 절점)의 거동은 Guyan Reduction<sup>[13]</sup> 으로 알려진 자유도 저감법을 이용하여 종속 자유도를 소거함으로써 구할 수 있다. 적용된 이론은 다음과 같다.

$$[M][\ddot{x}] + [K][x] = [0] \quad (1)$$

식(1)와 같은 진동방정식을 고려할 때 전체 자유도를, 소거하고자 하는 종속 자유도계를  $X_a$ 라 하고, 보존하고자 하는 해석 자유도(독립 자유도) 계를  $X_b$ 으로 하여, 두 부분으로 나누면 전체방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_a \\ \ddot{X}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} = [0] \quad (2)$$

위 식을 전개하면,

$$M_{aa} \ddot{X}_a + M_{ab} \ddot{X}_b + K_{aa} X_a + K_{ab} X_b = 0 \quad (3)$$

이 때, 위의 식에서 두 자유도  $X_a$ 와  $X_b$ 사이의 관계에는 관성항이 영향을 미치지 않는다고 가정하며, 다음과 같이 된다.

$$K_{aa} X_a + K_{ab} X_b = 0 \quad (4)$$

$X_a$ 에 대해서 풀면,

$$X_a = -K_{aa}^{-1} K_{ab} X_b \quad (5)$$

따라서,

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{aa}^{-1} K_{ab} \\ I \end{bmatrix} X_b \\ &= \begin{bmatrix} R_{ab} \\ I \end{bmatrix} X_b = R X_b \end{aligned} \quad (6)$$

계의 정. 동적 에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{X}^T M \dot{X}, \quad U = \frac{1}{2} X^T K X \quad (7)$$

식(14)를 식 (15)에 대입하면,

$$T = \frac{1}{2} \dot{X}_b^T M^R \dot{X}_b, \quad U = \frac{1}{2} X_b^T K^R X_b \quad (8)$$

여기서,

$$M^R = R^T M R, \quad K^R = R^T K R \quad (9)$$

식(16)을 Lagrange의 운동방정식에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$M^R \ddot{X}_b + K^R X_b = [0] \quad (10)$$

여기서는 등가강성행렬들을 추출하기 위하여 상용 유한요소프로그램인 MSC/NASTRAN<sup>[13]</sup>의 DMAP Command를 이용하여 구하였다.

이와 같이 Guyan Reduction<sup>[13]</sup>을 이용하여 추출된 비구조적 절점의 등가강성행렬과 Extended Timoshenko Beam의 이론<sup>[17]</sup>(Fig. 4, 5)에서의 강성행렬을 직접 비교함으로써 등가된 보의 구조적 물성치(Property)를 구할 수 있으며, 구해진 물성치를 빔에 대한 유한요소 모델에 대입해서 해석을 실시한다. 여기서 지면상 beam 이론에 대한 내용은 생략하였다.

이러한 과정을 통해서 Shell 모델로 구성된 벨로우즈를 간단한 방법을 통해서 1차원 빔 모델로 해석할 수 있게 된다.

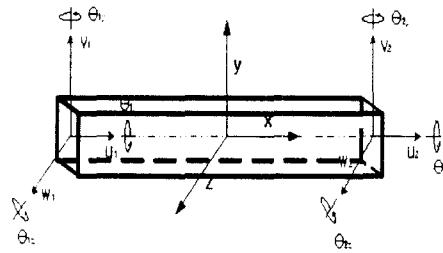


Fig. 4 Equivalent Extended Timoshenko Beam Model

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{L^3(1+\psi_x)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2(1+\psi_x)} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\psi_y)} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2(1+\psi_y)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GK}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2(1+\psi_x)} & 0 & \frac{(4+\psi_x)EI_x}{L(1+\psi_x)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\psi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\psi_y)EI_y}{L(1+\psi_y)} \end{bmatrix}$$

$$\psi_x = \frac{12EI_{xy}}{GA_{xy}L^2}, \quad \psi_y = \frac{12EI_{yx}}{GA_{yx}L^2}$$

Fig. 5 Stiffness Matrix for Extended Timoshenko Beam

### 3. 결과 및 검증

해석모델을 검증을 위해서, 본 연구에서의 Beam 모델과 참고문헌<sup>[3]</sup>의 모델을 기준으로 비교검증을 실시하였다. 벨로우즈의 재료는 SUS304를 사용하였다.

Convolution 증가에 따른 축방향 모드와 횡방향 모드의 고유진동수 변화에 대해 참고문헌<sup>[3]</sup>과 비교한 결과를 Fig. 6, 7에 표시하였다.

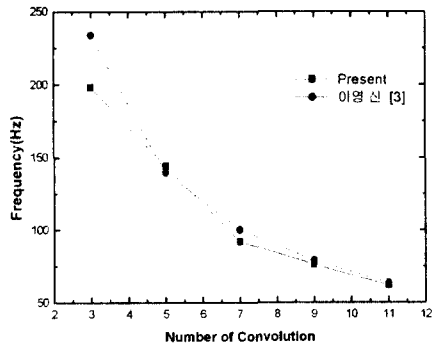


Fig. 6 Natural Frequency according to Number of Convolution(Axial Mode)

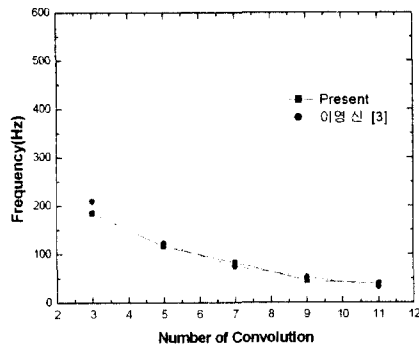


Fig. 7 Natural Frequency according to Number of Convolution(Lateral Mode)

위 결과에서처럼 오차는 수용할 수 있는 범위에 있으며, 참고문헌과의 비교 결과에서 알 수 있듯이 convolution 증가할 수록 고유진동수 변화는 일치하는 경향을 보인다. 또한 길이가 늘어날수록 빔 이론이 잘 적용됨을 알 수 있다.

따라서 본 논문에서 제안된 해석 모델은 유용하다는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 벨로우즈의 진동해석을 위하여 복잡한 shell 모델에서 자유도 저감법을 사용하여 등가 강성행렬을 추출하고, 이를 이용해 구조적 물성치를 계산하여 간단한 1차원 beam 모델을 구성하였다.

이는 기존의 문헌들에서 나타난 것처럼 복잡한

수식의 전개를 통한 모델을 구성 후 등가 빔을 구성하는 것보다 그 신뢰성이 검증된 상용유한요소 프로그램을 이용한 일련의 등가 빔 구성 방법이 효율적이고 간단한 방법임을 알 수 있었다. 또한 참고문헌과의 고유진동수 비교를 통해 매우 근접한 결과를 얻을 수 있었다.

이 결과를 이용하여 산업 플랜트에서의 배관계나 자동차 배기시스템의 전체에 적용할 경우 모델링에 있어서의 간편함과 해석시간의 단축을 동시에 가져올 수 있을 것으로 판단된다.

#### 참고문헌

1. G.I.Bromann, A.P.Jönsson, M.P.Hermann, "Determining dynamic Characteristics of bellows by manipulated beam finite element of commercial software", *International Journal of Pressure Vessels and Piping* Vol. 77, pp. 445~453, 2000
2. Morishita. M., Lkahata. N., Kitamura. S., "Simplified Dynamic Analysis Methods for Metallic Bellows Expansion Joints", *Transaction of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol.113, pp.504~510, 1991
3. 이영신, 윤기석, "벨로우즈의 고유진동수 해석 및 간편식 개발에 관한 연구", *한국자동차공학회 춘계학술대회*, pp.456~461, 1994
4. 허덕재, 김병곤, 최석환, "CAE를 이용한 대형배기계의 구조적 특성에 관한 연구", *한국자동차공학회 춘계학술대회*, pp.413~432, 1994
5. 강신범, "자동차 배기계용 벨로우즈의 최적장착 위치 및 스프링 상수 결정", *한양대학교 석사학위 논문*, 1996
6. 고병갑, 박경진, "벨로우즈에 대한 유한요소해석 프로그램 및 간편식의 개발과 형상최적설계", *대한기계학회논문집(A) 제21권 제8호*, pp.1195~1208, 1997
7. V.F.Jakubauskas and D.S.Weaver, "Transverse vibrations of bellows expansion joints. Part II:Beam model development and Experimental verification", *Journal of Fluids and Structures*, 1998
8. Andersson WF., "Analysis of stresses in bellows - Part I design criteria and test results", *Atomic International*. NAA-SR-4527, United States Atomic Energy Commission, 1964
9. Andersson WF., "Analysis of stresses in bellows - Part II mathematical", *Atomic International*. NAA-SR-4527, United States Atomic Energy Commission, 1965

10. 김봉수, 강성중, "엔진 배기계 Idling 진동특성 연구", 한국자동차공학회 추계학술대회, pp.497~505, 1992
11. 이장명, 박성태, 김상호, "배기계 모델링 검증을 위한 주파수 응답 함수의 응용", 한국소음진동학회지 제7권 제6호, pp.1049~1058, 1997
12. Y.Y.Kim, J.M.Lee 外 5人, "A Simple and Effective Modelling Technique For Car Exhaust System", FISISTA 97, COPYRIGHT 1996 CSAT. Czech Republic.
13. MSC/NASTRAN Handbook for Numerical Methods, Louis Komzsik, The Macneal Schwendler Corporation, 1990
14. EJMA, 1993, "Standards of the Expansion Joint Manf. Assoc.", 6th edition, Tarrytown, NY
15. R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA Journal, Vol.3, no.2, pp.380, 1965
16. 이봉훈, "유한요소법핸드북", 동화기술, 1991
17. 유용석, "복합재료 회전익의 정·동적 거동에 관한 연구", 경희대학교 박사학위논문, 2001. 2