

## 다공평판의 형상최적화에 관한 연구.

김형준\*, 권영석, 박정호(동아대 대학원 기계공학과),  
안찬우, 김현수(동아대학교 기계산업시스템공학부)

### A Study on the Shape Optimal Design of Perforated Plate

H. J. Kim\*, Y. S. Kwon, J. H. Park(Mech. Eng. Dept., DAU),  
C. W. Ahn, H. S. Kim(Mech. & Ind. System Div. Dept., DAU)

#### ABSTRACT

In this study, a shape optimization is performed for circular and elliptical holes to reduce weight of a plate. It is accomplished in reference to the results of topology optimization of the square plate with circular hole. From the results, it is concluded that the stress values of shape optimization of them are satisfied with 100MPa of constraint condition.

**Key Words** : Shape optimization(형상 최적화), Topology optimization(위상 최적화), Circular hole(원형홀), Elliptical hole(타원형홀), Density function method(밀도함수법)

#### 1. 서론

구조물이나 기계부품 등은 용도 및 중량감소를 위한 다수의 개구부가 존재한다. 실제 설계에서는 불연속부가 존재하는 구조물을 대상으로 하기 때문에 개구부를 지닌 판의 정적 및 동적 거동의 이해가 매우 중요하다. 개구부를 지닌 판은 자동차, 항공기, 건축 구조물, 구동차량, 선박 및 토목 구조물 등에 구조적 요소로 광범위하게 사용되고 있다. 원공 구조물을 설계하는 과정에서 일반적으로 원공의 위치와 형상이 구조물의 응력 분포 변화에 끼치는 영향이나 응력집중과의 관계를 고려하지 않고, 시스템을 쉽게 연결할 수 있도록 그 위치와 형상을 임의로 선정하는 경우가 많다. 이런 원공 구조물은 최적 설계 측면에서 치명적인 결함을 주어 원래 모재 강도보다 약 30~40% 정도 강도를 저하시키는 결과를 초래하여, 이를 보완하거나 다시 설계하는 문제가 야기된다.<sup>(1), (2)</sup>

본 연구에서는 보다 효율적이고 가공의 편의성을 고려하여 실제 구조물과 유사한 원형 홀이 존재하는 사각평판에 대하여 밀도함수법을 적용하여 위상최적화를 수행한 결과를 바탕으로 하여 원형 및 타원 홀의 적절한 형상의 변화를 통하여 구조물의 경량화를

수행하였다.

#### 2. 원공이 있는 평판의 구조해석

##### 2.1 유한요소모델

본 연구는 원형 홀이 있는 평판에서 원형 홀의 형상최적화이며, 축의 길이가 100×100 mm이고 두께가 5 mm인 평판에 반지름이 10 mm인 원형 홀과 장축( $a_{dv}$ )의 길이가 10 mm, 장단축의 비( $k_{dv}$ )가 0.5인 타원을 뚫었고, 길이나 넓이에 비해 두께가 얇기 때문에 4절점 쉘요소(Shell element 63)를 사용하였다.

요소는 등방성, 등질성, 선형탄성으로 가정하고, 평판의 유한요소 모델은 Fig. 1, 2에 나타난 바와 같이 Fig. 1에서 원형 홀이 3개인 모델의 절점은 23 041개이고 요소는 7519개로 구성되어 있으며, Fig. 2에서 모델의 절점은 22 876개이고 요소는 7466개로 구성되어 있다.

연결되어 있는 평판에 각각의 홀을 변수로 하여 3개의 평판에서 원형 홀만 있는 경우 변수는 3개이고, 두 개의 원형 홀과 한 개의 타원이 있는 경우에는 원형 홀의 반지름과 장축의 길이, 단축비를 변수로 하여 변수의 개수는 4개이다. 재질은 용접 구조용 열간 압연강인 SMA50A를 사용하였으며 유한요소

모델은 Fig. 1, 2에 표시하였으며 기계적 성질은 Table. 1에 나타나있다.

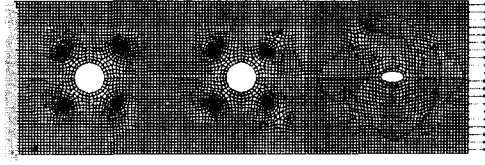


Fig. 1 Initial design domain of cantilever plate with two circular holes and an elliptical hole on distributed force

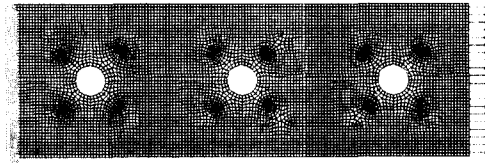


Fig. 2 Initial design domain of cantilever plate with three circular holes on distributed force

Table 1 Material properties of SMA50A

Material property	Value
E(Young' modulus)	211680 MPa
$\nu$ (poisson's ratio)	0.3
$\rho$ (density)	8.1122E-10 kg-s <sup>2</sup> /mm <sup>3</sup>
yeild stress	372 MPa

### 2.1.1 경계조건 및 하중조건

본 연구에서는 단축인장으로 일차시편과 유사한 외팔보 형태이며, 한쪽변을 x, y, z 방향을 모두 고정하고 하중의 크기는 50 MPa으로 하여 분포하중이 작용한다고 가정하였다. 원의 경우 원형 홀의 크기가 평판의 크기를 초과할 수 없으므로 반지름의 범위를 5~45 mm로 하여 해석하였고, 타원의 경우에는 변수가 두 개이므로 장축의 길이는 10~45 mm, 장단축의 비는 0.1~3으로 하여 해석하였다. 본 연구에서 사용된 강의 항복응력은 372 MPa이므로 안전율을 고려하여 최대응력을 100 MPa로 하였다.

## 3. 최적설계

### 3.1 위상최적화

본 연구에서는 강성을 고려한 체적의 최적화 문제를 설계 영역에서 안전율을 고려한 응력을 제한

조건으로, 목적함수인 체적을 최소화하고 설계목표를 만족하는 구조물의 위상을 결정하는 것이다. 최적위상은 주어진 설계 영역에서 재료를 재분배하는 방법으로 얻어지며, 이때 분배된 재료가 설계변수인 밀도이다. 일반적인 연속체 유한요소해석에 대하여 밀도함수를 정식화하면 다음과 같다.<sup>(1)</sup>

$$\text{Min} : F(\rho) = \rho_i A_i t_i \quad (1)$$

$$\text{Subject to} : \sigma_i \leq \sigma_{iw} \quad (2)$$

여기서,  $\rho$ 는 밀도,  $A$ 는 단면적,  $t$ 는 두께,  $\sigma_i$ 는  $i$ 번째 노드의 응력, 그리고  $\sigma_{iw}$ 는  $i$ 번째 노드에서의 안전율을 고려한 최대 허용응력이다.

위상 최적화 설계의 기본적인 이론은 최대의 구조강성(structural rigidity)을 갖도록 재료를 배치하는 것이다. 따라서 해당구조물에 대해 목표질량을 만족하도록 컴플라이언스 지수(compliance index)를 최소화하게 된다. 컴플라이언스 지수는 식 (3)과 같이 계산된다. 각 경우에 대한 컴플라이언스는 식 (2)와 같이 얻어진다.<sup>(7)</sup>

$$S = \sum W_i C_i \quad (3)$$

$$C_i = U_i^T K_i U_i \quad (4)$$

$W_i$  :  $i$ 번째 중량

$C_i$  :  $i$ 번째 컴플라이언스

$U_i$  :  $i$ 번째 변위벡터

$K_i$  :  $i$ 번째 강성행렬

### 3.2 형상최적화

형상최적화 된 모델에 대하여 Fig. 3과 같이 원형 홀 2개와 타원 홀 1개로 구성된 모델을 선정하여 설계변수는 원형반경인  $r_1$ 과  $r_2$ , 및 타원의 장축의 길이  $a_a$ 와 장단축의 비  $k_a$ 를 설계변수로 하고, Ansys 5.7에서 first order method<sup>(4)</sup>을 적용하여 형상최적설계를 수행하였다.

$$\text{Min} : F(\gamma, k_r) = \sum_{i=1}^N A_i \cdot t_i \quad (5)$$

$$\text{Subject to} : \frac{|\sigma_{\max}|}{\sigma_{ul}} - 1 \leq 0 \quad (6)$$

여기서 최소화를 위한 목적함수는 평판의 체적이 고,  $N$ 은 요소의 개수,  $A_i$ 는  $i$ 번째 요소의 면적,  $t_i$ 는  $i$ 번째 요소의 두께이다.  $\sigma_{ul}$ 은 허용응력으로 항복강도에 안전계수 1.5를 고려하여 218.834 MPa로

하였고,  $\sigma_{max}$  는 매 반복하여 최대 Von-Mises 응력이다. 각 설계 변수의 초기값과 상한과 하한은 Table 2와 같다.

Table 2 Range of design variables

D.V	Range	initial	lower	upper
$a_{dv}$		10	10	45
$k_{dv}$		0.5	0.1	3
$r_1$		10	10	45
$r_2$		10	10	45
$r_3$		10	10	45

#### 4. 결과 및 토의

본 연구에서는 가로와 세로비가 다른 직사각형 평판을 완전히 구속하고, 외팔 평판의 오른쪽 끝단에 균일한 분포하중에 대하여 위상최적화를 수행하였다.

위상 최적화 수행결과 분포하중을 가했을 때의 각각의 결과가 Fig. 3, 4와 같다. 초기면적에 50%만 허용하는 제한 조건을 부과하였으며 이때 목적함수인 체적을 최소화 한 구조의 위상을 보여준다. Fig. 5는 표준화된 제한조건의 변화로서 선 해석 범위의 50%를 제한한 제한조건이 최적의 위상을 가짐에 따라 0으로 수렴함을 알 수 있다. Fig. 6은 목적함수인 질량의 변화이며, 초기 질량보다 최적 위상을 가질 때 약 49.5%의 질량이 감소되었음을 보여준다. Fig. 5, 6에서 볼 때 두 모델의 목적함수인 체적의 변화가 거의 일치함을 알 수 있다.

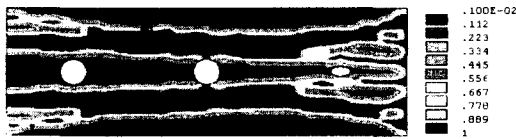


Fig. 3 Optimum topology design of cantilever plate on distributed force and concentrated load

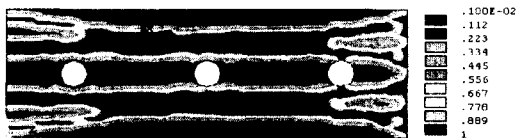


Fig. 4 Optimum topology design of cantilever plate on distributed force

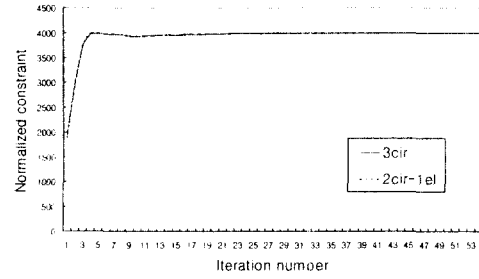


Fig. 5 Variation of constraint

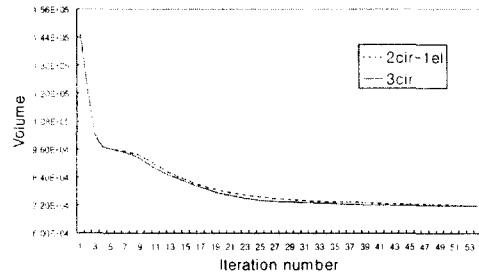


Fig. 6 Variation of objective function

가공 및 구조적 편리성을 고려하여 분포하중이 작용할 때의 위상최적화 결과를 바탕으로, 반경이 10 mm인 원과 장축  $a = 10$  mm, 이심률  $k_{dv} = 10$ 인 타원의 값을 초기치로 하여 형상 최적화한 결과를 Fig. 7, 8, 9에 나타낸다.

Fig. 7은 장축의 길이  $a = 10$  mm인 타원 3개의 경우에 대한 결과로서 장축이 중심선에 수직인 형태로서, 하중이 증가함과 동시에 변위량이 증가함에 따라 점차 원의 형태를 가짐으로써 더욱 안정된 형태가 될 수 있음을 예상할 수 있다. Fig. 8은  $r = 10$  mm인 원형홀 3개를 초기치로 한 결과이다. 3개의 원형홀이 균일한 분포를 나타낸다. Fig. 9은 위상최적화된 토대로 원형 홀 2개와 끝단에 타원 홀로 구성된 형태를 초기치로 형상최적화를 수행한 결과이며, 응력과 변위가 한쪽으로 편중됨으로써 실제로 하중이 가해지는 끝단 부분의 형상변화는 크지 않음을 위상최적화한 결과인 Fig. 3에서 예상할 수 있다.<sup>(5)</sup>

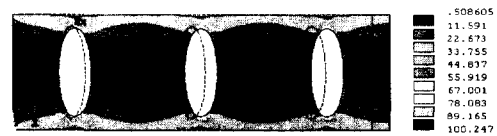


Fig. 7 Shape optimal design of cantilever plate with three elliptical holes

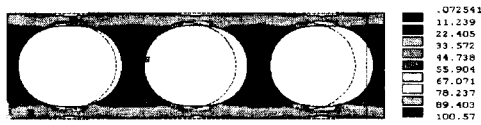


Fig. 8 Shape optimal design of cantilever plate with three circular holes

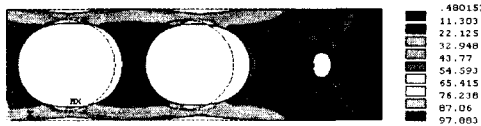


Fig. 9 Shape optimal design of cantilever plate with two circular holes and an elliptical hole

Fig. 10의 결과를 볼 때 반복횟수에 따른 최대응력의 변화량을 나타내며, 반복 횟수가 증가함에 따라 응력의 허용값인 100 MPa에 근접함을 알 수 있다. Fig. 7의 타원 3개의 경우가 장축선단 부분의 응력집중 현상으로 가장 급격한 상승을 보인다. Fig. 8의 균일한 형태의 3개의 원을 배치한 경우가 반복횟수가 증가함에 따라 가장 원만한 상승과 전체적으로 균일한 응력분포 상태를 나타낸다.

위상 최적화된 결과로 볼 때 원형과 타원의 적절한 배치 형태인 Fig. 3의 경우 가장 이상적인 형상으로 예상되었으나, 끝단의 하중에 의한 타원의 형상 변화가 그다지 크지 않음을 알 수 있다.

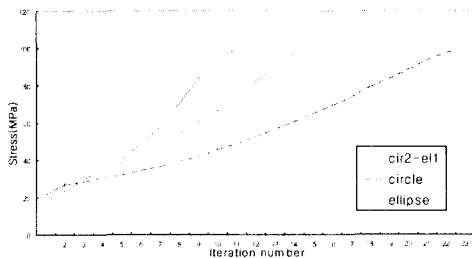


Fig. 10 Variation of stress in shape optimization

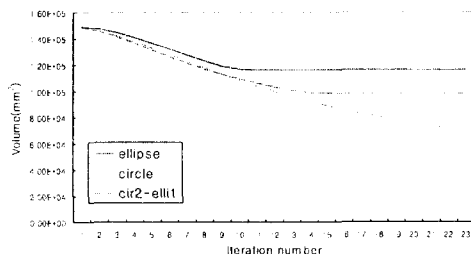


Fig. 11 Variation of volume in shape optimization

Fig. 11은 반복횟수에 따른 체적의 변화를 나타낸다. 전체적으로 35%정도의 체적감소를 보였으며, 균일한 원형 홀 3개로 구성된 구조가 가장 큰 체적 감소를 보였다. 위의 2가지 결과에서 전체적 응력의 분포와 체적감소량을 종합하면 균일한 3개의 홀로 구성된 구조물이 가장 최적 형상임을 알 수 있다.

## 결론

가로 세로 길이가 다른 사각 평판에 대하여 가공의 용이성과 구조적 안정성을 고려한 경량화를 위하여 위상최적화한 결과를 토대로 원형 및 타원 홀로 구성된 초기 모델에 대하여 형상최적화를 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 위상최적화를 통하여 일정한 하중이 가해질 때의 구조물 전체의 위상 분포를 확인함으로써 더욱 효과적인 형상최적화를 수행 할 수 있었다.
2. 형상최적화를 수행한 결과 3가지 모델 모두 응력 제한값인 100MPa을 만족하는 35%정도의 경량화된 형상을 얻을 수 있었다.
3. 원형과 타원홀의 적절한 배치를 통한 최적적인 형상은 최초 타원과 원형홀로 배치한 모델로 예상하였으나, 응력의 분포가 가장 균일하게 분포된 3개의 균일한 형태의 원형 홀임을 알 수 있다.
4. 하중의 형태를 단순인장으로 가정하였으나, 하중의 각도변화에 따른 홀의 형상 변화 및 재질의 밀도와 관련이 깊은 고유진동수 및 동적거동에 대한 해석이 요구된다.

## 참고문헌

1. 전형용, 성낙원, 한근조, "원공의 위치와 형상 변화에 따른 전동차 크로스 빔의 강도해석", 한국정밀공학회지, Vol 16, No 9, September, 1999.
2. 김병수, 서명원, "최적조건법에 의한 위상최적화 연구", 한국자동차공학회논문집, 제 7권, 제 8호, pp. 224~232.
3. 林莊根, 金泰完, "有孔板의 應力集中係數를 最小로 하는 hole 形狀의 最適化", 대한기계학회논문집, 제 9권, 제 3호, pp. 295~300, 1995.
4. Arora, J. S., "Introduction to Optimum Design, New York, McGraw-Hill," Inc., 1989.
5. Walter D. Pilkey, "Peterson's Stress Concentration Factor," John Willey & Sons, Inc., 1997.
6. ANSYS Element Reference Release 5.7, 2001.
7. 정은태, "제한된 배치 설계에서 Topology Optimization의 적용," Proceeding of The Optimal Design 18, November, 1999