韓國精密工學會 2001年度 秋季學術大會論文集 pp.747~750 KSPE 01F183

등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 대수 응력특이성에 관한 연구

김우진*(경남대 대학원 기계설계학과), 김진광(경남대 대학원 기계설계학과),
조상봉(경남대 기계자동화공학부)

A Study on Logarithmic Stress Singularities for V-notched Cracks in Isotropic Dissimilar Materials

W. J. Kim, J. K. Kim, S. B. Cho

ABSTRACT

Using complex potentials and the concept of repeated roots for general solutions, logarithmic stress singularities and coefficient vectors for v-notched cracks in isotropic dissimilar materials are evaluated and demonstrated to have no influence on the logarithmic stress singularities.

Key Words : logarithmic stress singularity(대수 응력특이성), isotropic dissimilar materials(등방성 이종재료), V-notched cracks(V-노치 균열)

1. 서론

많은 공학자에게 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성 문제는 관심의 대상이다. Bogy[1,2]가 처음으로 이종재료 내의 V-노치 균열 문제에 대한 응력특이성에 관하여 연구하였다. 그 후 많은 연구자들, 예를 들면, Hein과 Erodogan[3], Carpenter와 Byers[4] 등이 문제에 관하여 연구하였고, 관심은 멱응력특이성에 맞추어져 있었다. Bogy[1,2]의 논문에서 대수 응력특이성에 관한 것이 약간 언급되어 있다. 멱대수 응력특이성에 관해서는 Dempsey와 Sinclair[5,6]에 의해 연구 발표된 바 있고, 대수 응력특이성은 멱대수 응력특이성의 한 예에 불과한 경우라고 지적하고 있다. 그 후, Dempsey[7]가 V-노치 균열의 표면에 표면력이 작용하지 않는 경우(동차형 경계조건)조차도 멱대수 응력특이성이 존재하는 구체적 예를 발표한 바 있다. 응력특이성 해석에는 몇 가지 방법이 이용되며 각 방법은 장단점을 가지고 있다. 멜린 변환법(Mellin transform method)은 우수한 방법이나 복잡하고 어렵다. 에어리의 응력함수법(Airy stress function method)은 간단하나 복소응력특이성을 취급하기 곤란하다. 복소포텐셜법(Complex potential method)은 간단하면서도 복소응력특이성을 취급할 수 있다. Bogy[1,2] 및 Hein과 Erodogen[3]은 멜린변환법을, Carpenter와 Byers[4]는 복소포텐셜법을, Dempsey와 Sinclair[5,6]는 에어리의 응력함수법을 각각 사용하였다.

본 논문에서는 복소포텐셜법을 사용하여 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 대수 응력특이성(logarithmic stress singularity)을 일반해에 대한 개념을 도입하여 이론적으로 구하고 상용수치해석 프로그램의 하나인 메스메티카(mathematica)를 이용하여 계수벡터를 구하여 대수 응력특이성의 영향이 없다는 것을 밝히고자 한다.

2. 기초이론

등방균질재료의 2차원 탄성문제에서 체적력이 없다면, 응력과 변위는 복소 포텐셜 $\phi_j(z)$와 $\psi_j(z)$로 표현할 수 있다.[8] 그림 1에서와 같은 V-노치 균열문제는 경계조건과 연속조건으로부터 다음과 같은 비제차형 연립방정식을 얻을 수 있고,[8] V-노치 균열

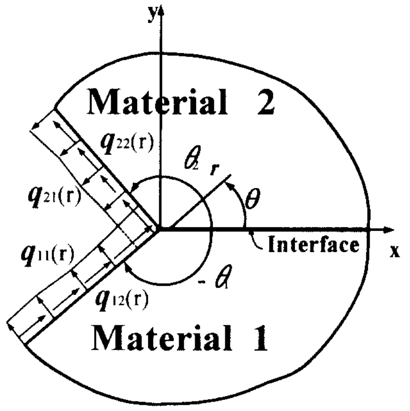

Fig. 1 V-notched crack in isotropic dissimilar materials

면에 표면력이 없는 경우에는 $\{f\}=\{0\}$인 제차형 연립방정식이 얻어진다.

$$[B(\lambda)]\{A\}=\{f\} \tag{1}$$

여기서

$$\begin{aligned}\{A\}= &\ [Re[A_1]\ Im[A_1]\ Re[B_1]\ Im[B_1] \\ &\ Re[A_2]\ Im[A_2]\ Re[B_2]\ Im[B_2]]^T\end{aligned} \tag{2}$$

$$\{f\}=[q_{11}(r)\ q_{12}(r)\ 0\ 0\ 0\ 0\ q_{21}(r)\ q_{22}(r)]^T \tag{3}$$

$$[B(\lambda)] = \begin{bmatrix} [t_1] & [0] \\ [s_1] & -[s_2] \\ [u_1] & -[u_2] \\ [0] & [t_2] \end{bmatrix} \tag{4}$$

이다.

Fig. 1에서와 같은 등방성 이종재료일 경우에 식 (4)는 다음과 같이 표현된다.

$$[t_j] = \begin{bmatrix} d_{j1} & d_{j2} & d_{j3} & d_{j4} \\ d_{j5} & d_{j6} & d_{j7} & d_{j8} \end{bmatrix}$$

여기서

$$d_{j1}=\lambda(\lambda+1)\cos[(\lambda-1)(e_j)]$$
$$d_{j2}=-\lambda(\lambda+1)\sin[(\lambda-1)(e_j)]$$
$$d_{j3}=\lambda\cos[(\lambda+1)(e_j)]$$
$$d_{j4}=-\lambda\sin[(\lambda+1)(e_j)]$$
$$d_{j5}=\lambda(\lambda-1)\sin[(\lambda-1)(e_j)]$$
$$d_{j6}=\lambda(\lambda-1)\cos[(\lambda-1)(e_j)]$$
$$d_{j7}=\lambda\sin[(\lambda+1)(e_j)]$$
$$d_{j8}=\lambda\cos[(\lambda+1)(e_j)]$$

이고, $e_1=-\theta_1$, $e_2=\theta_2$이다.

$$[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[s_j]=\begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

이고, 또한

$$[u_j]=\begin{bmatrix} \frac{x_j-\lambda}{2\mu_j} & 0 & -\frac{1}{2\mu_j} & 0 \\ 0 & \frac{x_{j+\lambda}}{2\mu_j} & 0 & \frac{1}{2\mu_j} \end{bmatrix}$$

이다.

식 (1)의 비제차형 연립방정식의 일반해는 제차형 연립방정식의 해와 특수해(particular solution)의 합으로 이루어진다.

제차연립방정식이 비 자명해를 가질 조건은 식 (1)의 행렬 $[B]$의 행렬식이 영(0)인 경우이며 이 행렬식을 특성다항식이라 부르고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$|B(\lambda)|=D(\lambda)=0 \tag{5}$$

이 특성다항식은 단근들과 중복근을 가질 수 있고 비제차연립방정식으로부터 특수해를 구할 수 있다. 이들 해가 이종재료간 V-노치 균열에 대한 고유치가 되고, 이들 고유치가 중복근이라면 복소 포텐셜 $\phi_j(z)$와 $\psi_j(z)$는 재 고려되어야 한다. 중복근에 대한 부가 복소 포텐셜은 복소 포텐셜을 λ로 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.[8]

$$\widehat{\phi_j(z)} = \widehat{A_j}z^{\lambda}\ln z \tag{6}$$

$$\widehat{\psi_j(z)} = \widehat{B_j}z^{\lambda}\ln z \tag{7}$$

여기서, $\widehat{A_j}$와 $\widehat{B_j}$는 복소수이다.

식 (6)과 (7)을 등방균질재료의 응력식과 변위식에 대입하여 정리하면 이중근에 대한 대수 응력특이성의 응력과 변위를 구할 수 있다. 대수 응력특이성의 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \widehat{\sigma_{jrr}} \\ \widehat{\sigma_{j\theta\theta}} \\ \widehat{\sigma_{jr\theta}} \end{Bmatrix} = r^{\lambda-1}\{\lambda \ln r[R] + \lambda\theta[T] + [K]\}\{\widehat{A}\} \quad (8)$$

여기서

$$[R] = \begin{bmatrix} (3-\lambda)Cm & (\lambda-3)Sm & -Cp & Sp \\ (\lambda+1)Cm & -(\lambda+1)Sm & Cp & -Sp \\ (\lambda-1)Sm & (\lambda-1)Cm & Sp & Cp \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} (\lambda-3)Sm & (\lambda-3)Cm & Sp & Cp \\ -(\lambda+1)Sm & -(\lambda+1)Cm & -Sp & -Cp \\ (\lambda-1)Cm & (1-\lambda)Sm & Sp & -Cp \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} (3-2\lambda)Cm & (2\lambda-3)Sm & Cp & -Sp \\ (2\lambda+1)Cm & -(2\lambda+1)Sm & Cp & -Sp \\ (2\lambda-1)Sm & (2\lambda-1)Cm & Sp & Cp \end{bmatrix}$$

이고, $Cm = \cos[(\lambda-1)\theta]$, $Cp = \cos[(\lambda+1)\theta]$, $Sm = \sin[(\lambda-1)\theta]$, $Sp = \sin[(\lambda+1)\theta]$ 이다.

2. 중복근에 대한 계수벡터

제차연립방정식의 특성다항식 (5)는 단근들과 중복근을 가질 수 있다. 그러나 본 논문에서는 특성다항식이 단근들을 가지고 비제차연립방정식의 특수해가 이 단근들 중의 하나와 같은 근을 가지는 중복근에 대한 계수벡터를 구하고자 한다. 이와 같이 식 (1)의 일반해가 중복근을 가진다면 복소 포텐셜은 $\phi_j(z)$와 $\widehat{\phi_j(z)}$ 의 더한 것과 $\psi_j(z)$와 $\widehat{\psi_j(z)}$ 더한 것을 사용하여야 한다. 이들 복소 포텐셜에 대한 응력과 변위는 대수 응력특이성을 가진다. 이 응력과 변위를 등방성 이종재료간 V-노치 균열문제의 경계조건과 연속조건에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$r^{\lambda-1}\ln r[B]\{\widehat{A}\} + r^{\lambda-1}[G]\{\widehat{A}\} + r^{\lambda-1}[B]\{A\} = \{f\} \quad (9)$$

여기서

$$\{\widehat{A}\} = \begin{matrix} [Re[\widehat{A}_1] \; Im[\widehat{A}_1] \; Re[\widehat{B}_1] \; Im[\widehat{B}_1] \\ Re[\widehat{A}_2] \; Im[\widehat{A}_2] \; Re[\widehat{B}_2] \; Im[\widehat{B}_2]]^T \end{matrix} \quad (10)$$

이고, 행렬 $[B]$는 식 (4)의 행렬과 같으며

$$[G] = \frac{d[B]}{d\lambda} \quad (11)$$

이다. 식 (9)로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$[B]\{\widehat{A}\} = 0 \quad (12)$$

$$[G]\{\widehat{A}\} + [B]\{A\} = \{f\} \quad (13)$$

$$\{\widehat{A}\} = [G]^{-1}\{\widehat{A}\} - [G]^{-1}[B]\{A\} \quad (14)$$

위 식으로 계수벡터 $\{A\}$와 $\{\widehat{A}\}$을 구할 수 있다.

4. 수치해석 결과 및 검토

식 (1)의 비제차연립방정식의 고유치는 무수히 많지만 이들 고유치 중에서 λ=1의 중복근을 갖는 경우에 대한 고유벡터를 구하고자 한다. 즉, Fig. 1에서 보면 균열의 표면에 작용하는 표면력($q_{11}(r)$, $q_{12}(r)$, $q_{21}(r)$, $q_{22}(r)$)이 위치 r의 함수가 아닌 상수로서 일정한 값을 가지는 경우가 이에 해당한다. 이와 같이 표면력이 일정한 경우에 대하여 상용 수치해석 프로그램인 메스메티카(mathematica)를 이용하여 계수벡터를 구하고자 한다.

Fig. 1에서 보는 바와 같은 V-노치 균열의 쐐기 각도와 재료물성치를 여러 가지로 바꾸어 가면서 식 (12) ~ (13)으로 부터 평면변형률상태에 대한 계수벡터를 구하였다.

한 예로서 V-노치 균열의 쐐기각도 $\theta_1 = -180^o$, $\theta_2 = 90^o$이고 재료의 물성치가 Table. 1과 같은 등방성 이종재료를 선정하여 식 (12) ~ (13)으로 부터 평면변형률상태에 대한 계수벡터를 구하여 Table. 2에 나타내었다.

본 수치해석 결과의 신뢰성을 검토하기 위하여 Table. 2의 계수벡터를 식 (9)에 대입하여 만족하는지를 검토하였다. Table. 2의 계수벡터가 식 (9)를 만족한다는 것은 모든 주어진 경계조건 및 연속조건을 만족하는 계수벡터가 구해진 것을 의미한다.

그리고, Table. 2의 계수벡터값 $\widehat{A}$을 식 (8)에 대입하여 그 결과식을 분석해보면 대수 응력특이성을 나타내는 로그항($\ln[r]$)의 계수가 영(0)이 되어 전체 응력값에 전혀 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

Table. 1 Properties of materials

Material	1	2
Poisson's ratio	0.4	0.3
Modulus of Elasticity	1.4 MPa	6.5 MPa
Shear Modulus	0.5 MPa	2.5 MPa

Table. 2 Eigenvectors for the eigenvalue, $\lambda = 1$

Eigenvector ($\{A\}$)		Eigenvector($\{\widehat{A}\}$)	
	Value		Value
$Re[A_1]$	$0.391667\ q_{11}$-$0.195477\ q_{12}$ $+0.0583333\ q_{21}$-$0.195477\ q_{22}$	$Re[\widehat{A}_1]$	0
$Im[A_1]$	$0.0145833\ q_{11}$-$0.33333\ q_{12}$ $-0.0291667\ q_{21}+0.116667\ q_{22}$	$Im[\widehat{A}_1]$	$0.116667\ q_{12}+0.116667\ q_{22}$
$Re[B_1]$	$0.216667\ q_{11}$-$0.342085\ q_{12}$ $-0.116667\ q_{21}$-$0.342085\ q_{22}$	$Re[\widehat{B}_1]$	0
$Im[B_1]$	$0.883333\ q_{12}$-$0.116667\ q_{22}$	$Im[\widehat{B}_1]$	0
$Re[A_2]$	$0.25\ q_{11}+0.20944\ q_{12}$ $+0.25\ q_{21}+0.20944\ q_{22}$	$Re[\widehat{A}_2]$	0
$Im[A_2]$	$0.0625\ q_{11}$-$0.125\ q_{21}+0.5\ q_{22}$	$Im[\widehat{A}_2]$	$0.5\ q_{12}+0.5\ q_{22}$
$Re[B_2]$	$0.5\ q_{11}$-$1.15192\ q_{12}$ $-0.5\ q_{21}$-$1.15192\ q_{22}$	$Re[\widehat{B}_2]$	0
$Im[B_2]$	$0.5\ q_{12}$-$0.5\ q_{22}$	$Im[\widehat{B}_2]$	0

이종재 V-노치 균열의 쐐기각도와 재료물성치를 여러 가지로 바꾸었을 때도 마찬가지로 로그항($\ln[r]$)의 계수가 영(0)이 되어 다른 조건에서도 대수 응력특이성의 영향이 없다는 것을 알 수 있었다.

5. 결론

등방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제에서 균열 표면에 일정한 표면력이 작용하는 경우에는 대수 응력특이성이 발생하는 것으로 알려져 있다. 그런데, 대수 응력특이성을 가지는 계수벡터를 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

등방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제에서 균열 표면에 일정한 표면력이 작용하는 경우에 대수 응력특이성을 나타내는 계수가 영이 되어 대수 응력특이성을 가지는 응력이 발생하지 않는다는 것을 알았다,

참고문헌

1. Bogy, D. B., "On the Problem of Edge-bonded Elastic Quarter-planes Loaded at the Boundary", Int. J. Solids Structures, Vol. 6, pp.1287~1313, 1970
2. Bogy, D. B., "Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Tractions", J. Applied Mechanics, Vol. 38, pp.377~386, 1971.
3. Hein V. L., and Erdogan F., "Stress Singularities in a Two-material Wedge", Int. J. Fract. Mechanics, Vol. 7, pp.317~330, 1971.
4. Carpenter, W. C. and Byers, C., "A Path Independent Intergral for Computing Stress Intensities for V-notched Cracks in a Bi-material", Int. J. Fract, Vol., 35, pp.245~268, 1987.
5. Dempsey, J. P. and Sinclair G. B. "On the stress Singularities in the plane Elasticity of the Composite Wedge", Journal of Elasticity, Vol 9, pp.373~391, 1979.
6. Dempsey, J. P. and Sinclair G. B. "On the Singularities Behavior at the Vertex of a Bi-material Wedge", Journal of Elasticity, Vol 11, pp.317~327, 1981.
7. Dempsey J. P., J. Adhesive Sci. Technl., 9, pp.253~265, 1995.
8. Cho, S. B., and Carpenter, W. C., "The Complex potential Approach to power-Logarithmic Stress Singularities for V-Notched Cracks in a Bi-Material", KSME Int. J., Vol. 13, No. 1, pp.19~25, 1999.