

유사등방성 이종재 접합계면 균열의 에너지해방률에 대한 연구

이원욱*(경남대 대학원 기계설계학과), 김진광(경남대 대학원 기계설계학과)
조상봉(경남대 기계자동화공학부)

A Study on Energy Release Rate for Interface Cracks in Pseudo-isotropic Dissimilar Materials

W. W. Lee, J. K. Kim and S. B. Cho

ABSTRACT

The stress intensity factor for an interface crack in dissimilar materials has been obtained by many researchers. But research of the energy release rate for an interface crack in pseudo-isotropic dissimilar materials is insufficient yet. In this paper, the energy release rate for cracks in pseudo-isotropic dissimilar materials was obtained using eigenfunction expansion method and also analyzed numerically using the reciprocal work contour integral method. The results were verified by comparing with other worker's results.

Key Words : Stress intensity factor (응력강도계수), Pseudo-isotropic (유사등방성), Energy release rate (에너지해방률), Reciprocal work contour integral method (상반일 경로 적분법)

1. 서론

본 논문에서는 이방성 재료의 특수한 경우에 해당하는 유사등방성 재료에 대한 복소응력함수를 이항 윌리엄 형태(two-term William's type)⁽¹⁾로 가정하여 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 응력강도계수와 에너지 해방률 및 관계를 고유함수 전개법으로 유도하고 상반일 경로 적분법(RWCIM)⁽²⁾을 이용하여 수치해석하고 비교 검토하고자 한다.

2. 유사등방성 재료의 특성방정식

체적력이 없는 경우의 평형방정식을 만족하는 에어리(Airy)의 응력함수와 이방성 재료에 대한 평면응력상태의 일반화된 후크의 법칙(Hooke's law)⁽³⁾을 적합방정식에 대입하여 지배미분방정식을 얻고, 2차원 탄성문제의 유사등방성 이종재 계면균열에 대한 복소응력함수를 이항(two-term) 윌리엄형태로 가정하여 지배미분방정식에 대입하면 다음과 같은 특성방정식을 얻는다.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{66}\mu + a_{22} = 0 \quad (1)$$

이방성 재료의 특수한 경우인 직교이방성 재료의 경우 식(1)은 다음과 같이 나타낸다.

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0 \quad (2)$$

식(2)의 특성방정식을 만족하는 근은 복소수만을 가지며 다음과 같다.

$$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \mu_3 = \overline{\mu_1}, \mu_4 = \overline{\mu_2} \quad (3)$$

식(5)에서 α_i 와 β_i ($i=1,2$)는 실수이고 근 μ_i 는 복소변수 $z_i = x + \mu_i y$ 의 관계를 가지고 있다. 직교이방성재료의 특수한 경우에 해당하는 유사등방성 재료(pseudo-isotropic material)는 특성방정식의 근이 중복근으로 $\mu_1 = \mu_2$ 이고 순허근($\alpha_i = 0$)이 되는 경우이다. 따라서 중복근이 되기 위해서 유사등방성재료의 전단탄성계수는 다음의 관계가 있어야 한다.

$$G_{12} = \frac{E_{11}}{\{2(\nu_{12} + \sqrt{E_{11}/E_{22}})\}} \quad (4)$$

유사등방성재료는 특성방정식의 근이 순허수인 중근이고 더욱이 $\beta_1 = \beta_2 = 1$ 이면 등방성재료

(isotropic material)가 된다. 특성방정식(2)의 근이 중 복근이므로 복소응력함수의 형태를 다음과 같이 가정해야 한다.⁽¹⁾

$$U(z) = 2Re\{F_1(z_1) + \overline{z_1}F_2(z_1)\} \quad (5)$$

여기서

$$F_1(z_1) = A_1 z_1^{\lambda+1} + B_1 z_1^{\lambda+1} \quad (6)$$

$$F_2(z_1) = A_2 z_1^\lambda + B_2 z_1^\lambda \quad (7)$$

3. 유사등방성 이종재료의 응력특이성지수와 고유벡터 유도

응력과 변위를 복소응력함수로 나타내기 위하여 복소응력함수(5)를 에어리(Airy)의 응력함수에 대입하여 응력장을 구하고 구한 응력을 일반화된 후크의 법칙에 대입하여 변위장을 구한 후 극좌표계로 변환하여 접합계면 균열에서의 경계조건과 연속조건으로부터 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \overline{B_{11}} \\ \overline{B_{12}} \end{Bmatrix} = -e^{-2\pi i} [U_1]^{-1} [S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{B_{21}} \\ \overline{B_{22}} \end{Bmatrix} = -e^{2\pi i} [U_2]^{-1} [S_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$[S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} + [U_1] \begin{Bmatrix} \overline{B_{11}} \\ \overline{B_{12}} \end{Bmatrix} = [S_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} + [U_2] \begin{Bmatrix} \overline{B_{21}} \\ \overline{B_{22}} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$[R_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} + [T_1] \begin{Bmatrix} \overline{B_{11}} \\ \overline{B_{12}} \end{Bmatrix} = [R_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \overline{B_{21}} \\ \overline{B_{22}} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기서

$$[S_j] = \begin{bmatrix} (\lambda+1) & (\lambda+1) \\ \mu_n(\lambda+1) & \mu_n(\lambda-1) \end{bmatrix}, [U_j] = \begin{bmatrix} -(\lambda+1) & (\lambda+1) \\ \mu_n(\lambda+1) & \mu_n(\lambda-1) \end{bmatrix}$$

$$[R_j] = \begin{bmatrix} p_n(\lambda+1) & p_n\lambda + p_n \\ q_n(\lambda+1) & q_n\lambda + q_n \end{bmatrix}, [T_j] = \begin{bmatrix} \overline{p_n}(\lambda+1) & \overline{p_n}\lambda + \overline{p_n} \\ \overline{q_n}(\lambda+1) & \overline{q_n}\lambda + \overline{q_n} \end{bmatrix}$$

식(8)과 (9)를 식(10)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(1 - e^{-2\pi i}) [S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = (1 - e^{2\pi i}) [S_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

식(12)가 성립하기 위해서는 양변이 0이거나 상수이어야 한다. 먼저 양변이 0가 되는 경우에는 $(1 - e^{-2\pi i})$ 와 $(1 - e^{2\pi i})$ 이 0가 되어야 한다. 이러한 조건으로부터 $\lambda = 0, 1, 2, \dots, \infty$ 가 된다. 하지만 $\lambda = 0, 1$ 의 경우 병진운동과 회전운동을 나타내므로 제외하여야 한다.

양변이 상수인 경우에 식(12)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} D_{11}(\lambda) & D_{12}(\lambda) \\ D_{21}(\lambda) & D_{22}(\lambda) \end{bmatrix} [S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서

$$D_{11}(\lambda) = (G_1 - G_2)(1 - e^{-2\pi i}), D_{12}(\lambda) = (H_1 + H_2)(1 + e^{-2\pi i})$$

$$D_{21}(\lambda) = (I_1 + I_2)(1 + e^{-2\pi i}), D_{22}(\lambda) = (J_1 - J_2)(1 - e^{-2\pi i})$$

또한

$$G_j = \frac{p_{j1} + p_{j2}}{2}, H_j = \frac{p_{j1} - p_{j2}}{2\mu_n}$$

$$I_j = \frac{q_{j1} + q_{j2}}{2}, J_j = \frac{q_{j1} - q_{j2}}{2\mu_n}$$

이다. 식(13)이 자명해를 가질 조건은 식(13)의 첫 번째 행렬의 행렬식이 0가 되어야 한다. 따라서 식(13)의 첫 번째 행렬의 행렬식을 구하고 근의 공식에 대입하여 고유치 λ 를 구하면 아래와 같다.

$$\lambda = (n - \frac{1}{2}) + i\epsilon \quad (n=1,2,3, \dots, \infty) \quad (14)$$

여기서

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{Q}{P} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{P}\right)^2 - 1} \right\}$$

또한

$$P = (H_1 + H_2)(I_1 + I_2) - (G_1 - G_2)(J_1 - J_2)$$

$$Q = (H_1 + H_2)(I_1 + I_2) + (G_1 - G_2)(J_1 - J_2)$$

식(14)에서 $n=1$ 일 때 $\lambda = 0.5 + i\epsilon$ 이 되고 이 고유치가 균열선단에서 응력을 무한대로 발산시키는데 지배적인 영향을 미친다. 이 때의 고유치가 응력 특이성지수를 나타낸다.

균열선단에서의 응력을 무한대로 발산시키는 응력특이성을 가진 복소수 고유치 $0.5 + i\epsilon$ 에 대한 고유벡터를 구하기 위하여 식(14)을 식(13)에 대입하여 하나의 식으로 만든 후 모든 고유벡터에 대하여 A_{11} 의 비로 나타내기 위해 각각의 고유벡터를 구하여 복소수계수 ζ 의 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \overline{B}_{j1} \\ \overline{B}_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{(1-i)\pi i} \left\{ \frac{(\lambda+1) + (\lambda-1)\eta\mu_n}{\mu_n} \right\} \\ -e^{(1-i)\pi i} \left\{ \frac{(\lambda+1) + (\lambda+1)\eta\mu_n}{\mu_n} \right\} \\ -e^{(1+i)\pi i} \left\{ \frac{(\lambda+1) - (\lambda-1)\eta\mu_n}{\mu_n} \right\} \\ e^{(1+i)\pi i} \left\{ \frac{(\lambda+1) - (\lambda+1)\eta\mu_n}{\mu_n} \right\} \end{Bmatrix} \zeta \quad (15)$$

여기서

$$\eta = i\eta_{II} = \frac{D_{12}(\epsilon)}{D_{11}(\epsilon)} = \frac{D_{22}(\epsilon)}{D_{21}(\epsilon)}$$

$$\zeta = \zeta_I + i\zeta_{II} = \frac{\mu_{11}}{e^{-\pi i} \{ (\lambda+1) + (\lambda-1)\eta\mu_{11} \}} A_{11}$$

4. 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 에너지 해방률의 유도

응력강도계수와 함께 파괴역학적 강도평가 파괴 메커니즘의 하나인 에너지해방률(energy release rate)은 다음과 같다.

$$G^* = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} (\sigma_{yy}(x)\delta_y(\Delta a - x) + \tau_{xy}(x)\delta_x(\Delta a - x)) dx \quad (16)$$

식(16)에서 균열이 진전하기 전의 응력성분과 균열이 Δa 만큼 진전한 후의 상대변위를 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\eta_{II}} \sigma_{1yy} + i\tau_{1xy} = \frac{K_2 - iK_1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos(\epsilon \ln \frac{r}{l}) + i \sin(\epsilon \ln \frac{r}{l}) \right\} \quad (17)$$

$$\eta_{II} \delta_y + i\delta_x = \frac{2\sqrt{r}H(K_2 - iK_1)(1 - i2\epsilon)}{(1 + 4\epsilon^2) \cosh(\pi\epsilon)\sqrt{2\pi}} \left(\frac{r}{l} \right)^{\epsilon} \quad (18)$$

여기서, $H = 2(\alpha_{211}\beta_{21} + \alpha_{111}\beta_{11})$, l 은 균열길이를 나타내며 K_1 과 K_2 는 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 응력강도계수로서 다음과 같다.

$$K_1 = 8\sqrt{2\pi} \cosh(\pi\epsilon) \left[\left\{ \left(\frac{3}{4} - \epsilon^2 \right) \cos(\epsilon \ln l) - 2\epsilon \sin(\epsilon \ln l) \right\} \zeta_I - \left\{ 2\epsilon \cos(\epsilon \ln l) + \left(\frac{3}{4} - \epsilon^2 \right) \sin(\epsilon \ln l) \right\} \zeta_{II} \right]$$

$$K_2 = 8\sqrt{2\pi} \cosh(\pi\epsilon) \left[\left\{ \left(\frac{3}{4} - \epsilon^2 \right) \cos(\epsilon \ln l) - 2\epsilon \sin(\epsilon \ln l) \right\} \zeta_{II} + \left\{ 2\epsilon \cos(\epsilon \ln l) + \left(\frac{3}{4} - \epsilon^2 \right) \sin(\epsilon \ln l) \right\} \zeta_I \right]$$

식(17)와(18)을 이용하여 식(16)의 유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 에너지 해방률을 구하면 다음과 같다.

$$G^* = \frac{K_i^2 H}{4 \cosh^2(\pi\epsilon)} \quad (19)$$

여기서 $K_i = \sqrt{K_2^2 + K_1^2}$ 이다.

5. 수치해석을 통한 검증 및 고찰

유사등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 응력강도계수는 베티(Betti)의 상반정리를 기초로 한 상반일 경로 적분법(RWCIM)을 이용한 프로그램에 유한요소 프로그램인 ANSYS의 해석결과값을 입력자료로 하여 응력특이성을 나타내는 고유치 $\lambda = 0.5 + i\epsilon$ 에 대한 고유벡터인 식(15)을 수치 해석하여 구하고, 이를 이용하여 에너지해방률의 G^* 를 구하였다.

해석모델은 편축균열로 Fig.1과 같으며, 사용된 요소는 8절점 등매개변수요소(isoparametric element)

를 사용하여 균열의 길이(a)가 변하는 경우와 재료비(n)가 변하는 경우의 두 가지에 대한 응력강도계수와 에너지해방률을 구하였다. 그리고 본 논문에서 사용된 무차원화된 에너지해방률 G_i^* 는 다음과 같다.

$$G_i^* = \frac{F_i^2}{4 \cosh^2(\pi\epsilon)} \times \frac{H}{a_{111} + a_{211}} \quad (20)$$

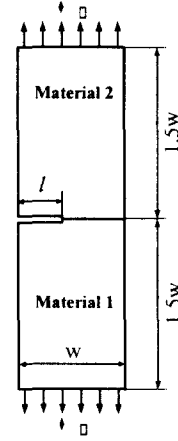


Fig.1 A single edge interface crack in a finite dissimilar plate.

Table 1 Material properties of isotropic materials

Material Properties	Material 1	Material 2
E (MPa)	30	60
G ₁₂ (MPa)	11.5384	23.077
ν ₁₂	0.3	0.3

Table 2 Non-dimensional stress intensity factors for the single-edge interface crack in a finite dissimilar plate. ($F_i = K_i / \sigma_0 \sqrt{\pi l}$, plane stress)

E2/E1	l / w			
	0.4		0.6	
	BEM's Result	Present Result	BEM's Result	Present Result
2.0	2.117	2.115	4.044	4.038
4.0	2.130	2.128	4.064	4.058
10.0	2.146	2.145	4.085	4.084

Table 3 Material properties of Pseudo-isotropic materials (plane stress)

Material Properties	Material 1	Material 2
E ₁₁₁ (GPa)	60	n × E ₁₁₁
E ₁₂₂ (GPa)	30	n × E ₁₂₂
ν ₁₂	0.3	0.3

Table 4. Non-dimensional stress intensity factor and energy release rate vs. crack length and material properties ratio for pseudo-isotropic dissimilar materials.

n (E211/E111)	Crack length (l)									
	0.3		0.4		0.5		0.6		0.7	
	F_i	G_i^*	F_i	G_i^*	F_i	G_i^*	F_i	G_i^*	F_i	G_i^*
2	1.91209	2.13644	2.42327	3.43145	3.23312	6.10827	4.60609	12.3976	7.24143	30.6423
10	1.99334	2.11716	2.50948	3.35552	3.33690	5.93306	4.74592	12.0014	7.45656	29.6257
30	2.02714	2.11158	2.54430	3.32642	3.37793	5.86328	4.80016	11.8399	7.53918	29.2070
50	2.03537	2.11041	2.55268	3.31951	3.38774	5.84659	4.81299	11.8008	7.55867	29.1053
70	2.03909	2.10994	2.55644	3.31642	3.39211	5.83900	4.81872	11.7832	7.56736	29.0595
90	2.04120	2.10966	2.55859	3.31470	3.39460	5.83473	4.82198	11.7732	7.57224	29.0331

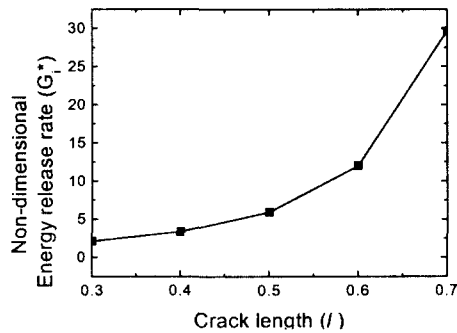


fig. 2 Non dimensional energy release rate vs. crack length for single-edge interface crack in pseudo-isometric dissimilar materials.

여기서, $F_i = K_i / \sigma_0 \sqrt{\pi l}$ 이며 무차원 응력강도계수를 나타낸다.

본 수치해석의 신뢰성을 위하여 유사등방성재료의 특수한 경우인 등방성재료의 물성치를 이용하여 이중재 접합계면 균열에 대한 무차원 응력강도계수 F_i 를 균열길이(l)와 재료비(n)가 변화할 경우에 대해서 수치 해석하였으며 그 결과를 Table.2에 나타내었다. 그리고 이 때 사용된 등방성재료의 물성치는 Table.1과 같다.

Table 2에서 기존의 경계요소법에 의한 결과⁽⁴⁾와 비교적 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

유사등방성 이중재 접합계면 균열에 대한 에너지해방률 G^* 를 구하기 위해 선정된 재료의 물성치는 Table 3과 같다. 여기서 n 은 1재료에 대한 2재료의 탄성계수비이다.

fig. 2는 재료비 $n=10$ 으로 고정하고 균열의 길이를 0.3에서 0.7까지 변화시켰을 때의 무차원화된 에너지해방률 G_i^* 의 변화를 나타낸 것이다.

table 4는 재료비 n 과 균열길이 l 을 변화시키면서 유사등방성 이중재 접합계면 균열에 대한 무차원화된 응력강도계수와 에너지 해방률을 나타낸 것이다. 재료비 n 이 증가할수록 응력강도계수는 증가하나 에너지 해방률은 감소하는 것을 알 수 있다. 그리고 균열길이 l 이 증가할수록 무차원 응력강도계수와 에너지해방률은 모두 증가하고 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

(1) 유사등방성 이중재 접합계면균열의 에너지해방률을 유도하였고, 재료물성치를 등방성화하여 기존의 접합계면 균열에 대한 무차원 응력강도계수와 비교한 결과 잘 일치함을 알 수 있었다.

(2) 유사등방성 이중재 접합계면 균열에 대한 여러가지 조건에 대한 에너지해방률을 수치 해석한 예를 보였다.

참고문헌

1. 김진광, 조상봉, 1999, "유사등방성과 이방성 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관한 연구", 한국정밀학회, 제16권 제10호, pp.152~163
2. 조상봉, 정휘원 김진광, 2000, "상반일 경로 적분법을 이용한 이중재 접합계면 균열의 응력강도계수 결정", 한국정밀학회, 제17권 제5호, pp.180~185
3. Lekhnitskii. S. G, 1963, Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day, Inc.
4. Yuuki, R. and Cho, S. B., "Efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface crack in dissimilar materials", Engng. Frac. Mech, Vol.34, pp.179~188, 1989.