
주조 해석을 위한 3차원 상변화 유한 요소 해석 프로그램 개발

하 성 규* , 조 성 수**

요 지

본 연구에서는 상변화 영역에서 열평형 방정식을 별도로 수식화하지 않고도 잠열의 영향을 고려할 수 있으며, 고상과 액상 그리고 2상 영역에서 동일한 형태의 방정식을 사용할 수 있는 엔탈피법을 이용하였다.

상변화 문제의 엔탈피법을 이용한 유한요소해석을 위하여 8개의 절점을 가지며, 각 절점에서 1개의 자유도를 가지는 3차원 육면체 요소가 개발되었다. 해법의 타당성과 해의 정확도를 검증하기 위하여 엄밀해가 존재하는 상변화 문제를 유한요소법으로 해석하고 그 결과를 비교 검토하였다.

연구 결과, 엔탈피법에 의한 유한요소해는 상변화 영역이 하나의 특정 온도인 경우는 물론 온도 구간으로 나타나는 경우에도 시간 증분과 요소수에 크게 영향을 받지 않고 안정된 해가 됨을 알 수 있었다. 검증된 요소를 이용하여 3차원 상변화 문제에 적용하여 해를 나타내었다.

Key Words : phase change(상변화), latent heat(잠열), enthalpy method(엔탈피법)

1. 서 론

주조제품 제작시 주형 내부에서의 주물의 응고, 물의 용해 혹은 응고, 또는 금속의 용접 등과 같이 어떤 물질이 열을 흡수하거나 방출함에 따라 발생하는 용해나 응고 같은 상변화(phase change)문제는 비정상 상태(unsteady state) 방정식을 해석하여야 한다. 그리고, 비선형의 문제로서 이에 대한 수치적 모델링 및 해석에 많은 관심이 기울어져 왔으며, 수치적 해를 구하기 위하여 여러 가지 방법이 제시되었다.

그런데, 상변화 문제는 고상에서 액상 또는 액상에서 고상으로 될 때, 즉 상의 변화가 생길 때 온도의 변화는 거의 없으나 고상과 액상사이의 열교환을 일으키는 잠열의 영향이 존재하기 때문에 이러한 열교환자로서의 잠열 처리 또한 중요한 문제가 된다.

일반적으로, 물과 같은 순수물질의 경우 용해점과 응고점이 일치하기 때문에 상변화가 하나의 특정 온도에서 일어나기 때문에 상경계면(phase interface)은 그 물질의 용고(용해)점을 기준으로 하나의 면으로 구해질 수 있다. 그리고, 이 경계면을 기준으로 잠열의 영향을 고려할 수 있다. 반면, 합금 등과 같은 비순수물질은 순수물질과 달리 용해점과 응고점

* 한양대학교 기계공학과

** 한양대학교 기계설계학과

이 일치하지 않아 상변화가 특정 온도구간에서 일어나기 때문에 상경계면이 하나의 면이 아닌 두개의 면(고상면, 액상면)으로 나누어지며 용해와 응고가 일어나는 온도사이의 구간은 고상,액상이 모두 존재하는 2상영역(mushy zone)이 된다. 그러므로, 2상 영역에서의 잠열의 영향 고려가 문제가 된다.

Rubinsky⁽¹⁾는 상경계면의 위치를 추적하면서 상경계면에서의 열평형 방정식에 의하여 잠열의 영향을 고려하였다. 그러나, 상경계면을 찾기 위한 알고리즘이 필요할 뿐만 아니라 이 면을 매 순간마다 찾아야 한다는 단점이 있다.

Morgan⁽²⁾는 열용량을 온도와 엔탈피의 구배를 이용하여 구하였다. 그러나, 이 방법은 절점에서의 온도변화가 상변화가 일어나는 온도구간보다 클 경우 잠열의 영향이 무시될 수 있어 시간중분이 충분히 작거나 또는 상변화가 일어나는 구간에서는 요소수가 충분히 많아야 한다는 단점이 있다.

Roose⁽³⁾는 가상열유동법(fictitious heat flow)을 이용하여 상변화 문제를 해석하였다. 그리고, 이 방법을 이용함에 있어 수렴 속도의 증가를 위하여 이완(relaxation)법을 이용하였는데, 만약 이러한 수렴속도 증가를 위한 과정이 사용되지 않을 경우 수치적 불안정성의 위험이 따른다는 문제점이 있다.

본 연구에서는 엔탈피법을 기초로 상변화구간에서 비선형성을 가지는 비열(specific heat)을 온도의 함수이면서 선형성을 가지는 엔탈피로 변형시킴은 물론 유한요소정식화 과정에서 자유도(degree of freedom)가 온도가 아닌 엔탈피로 바꾸는 기법을 이용하여 에너지방정식을 정식화하였다. 특히 이러한 일련의 과정에서 상변화가 한 점의 특정 온도에서는 물론 특정 온도구간에서 일어나더라도 엔탈피에 잠열의 영향을 고려하여 상경계면에서 만족되어야 하는 열평형 조건이 불필요해졌을 뿐만 아니라 상경계면을 추적할 필요가 없다. 그리고, 고상 영역과 액상 영역 그리고, 2상 영역에서 동일한 방정식으로 해를 구할 수 있다.

시간 해법은 Euler-Backward법을 이용하였으며, 한 시간간격(time step)내에서의 수렴성 여부의 확인은 Newton-Raphson법을 이용하였다. 그리고, 요소당 8개의 절점과 각 절점에서 1개의 자유도를 가지는 육면체 요소를 이용하였다.

2. 해석이론

2.1 열전달 이론

본 연구에서 이용한 3차원 비정상 상태(unsteady state) 열전달 문제의 에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^T \mathbf{k} \nabla T + Q \quad (1)$$

여기서, ρ 는 밀도, c 는 비열, Q 는 내부에너지이며, 열전도계수 \mathbf{k} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

식 (1)은 다음과 같은 경계조건을 가질 수 있으며, 이를 Fig. 1에 나타내었다.

1) 영역 S_1 에 작용하는 온도경계조건

$$T = T^*$$

2) 영역 S_2 에 작용하는 열유속경계조건

$$\mathbf{n}^T \mathbf{k} \nabla T = q^*$$

3) 영역 S_3 에 작용하는 대류경계조건

$$\mathbf{n}^T \mathbf{k} \nabla T = h_c (T_\infty - T)$$

열전달 해석의 수치적 모델시 몇 가지 가정을 도입하였다.

○ 각 상에서의 물성치는 일정하다.

ρ : 상수

c_s, c_l : 상수

$k = k_x = k_y = k_z, k_s, k_l$: 상수

○ 상변화 온도구간(phase change temperature range), 즉 2상 영역에서의 온도분포는 선형이다.

○ 액상에서의 대류열전달은 무시한다.

이러한 가정하에서 식 (1)을 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q \quad (2)$$

온도와 엔탈피의 일반적인 관계식은 다음과 같다.

$$H = \int \rho c dT \quad (3)$$

여기서, H 는 단위부피당의 엔탈피를 나타낸다.

식 (3)을 다시 고상, 2상, 액상의 세 영역으로 나누어 나타내면 다음과 같다.

1) $T_1 \leq T < T_s$: 고상 영역

$$H = \rho c_s (T - T_1) \quad (4a)$$

2) $T_s \leq T < T_l$: 2상 영역

$$H = H_s + \rho c^* (T - T_s) \quad (4b)$$

3) $T_l \leq T < T_2$: 액상 영역

$$H = H_l + \rho c_l (T - T_l) \quad (4c)$$

단,

$$H_s = \rho c_s (T - T_1)$$

$$H_l = H_s + \rho c^* (T_l - T_s)$$

$$c^* = \frac{1}{2} (c_s + c_l) + \frac{L}{T_l - T_s}$$

이다. 식 (4a), 식 (4b), 식 (4c)의 관계식을 Fig. 2(b)에 나타내었다.

일반적으로 합금과 같은 비순수 물질은 $\Delta T \neq 0$ 이기 때문에 식 (4b)가 성립이 되나, 순수물질의 경우 대부분이 $\Delta T = 0$ 이기 때문에 식 (4b)의 관계식에서 c^* 는 Dirac-Delta함수로 바꿔줘야 한다.

$$c^* = \frac{1}{2} (c_s + c_l) + L \delta(T - T_m) \quad (4b')$$

순수물질에서의 온도-엔탈피의 관계를 Fig. 2(a)에 나타내었다.

2.2 유한요소 정식화

3차원 비정상 열전달 문제의 유한요소해석을 위하여 요소당 8개의 절점과 각 절점에서 1개의 자유도를 가지는 육면체 요소를 개발하였다.

요소내의 온도 T^e 를 8절점 요소의 형상함수(shape function)^(4,5)를 이용하여 표현하면, 다음과 같다.

$$T^e = \sum_{a=1}^8 N_a T_a \quad (5)$$

여기서, T_a 는 각 절점($a=1,2,\dots,8$)에서의 온도를 나타낸다. N_a 는 각 절점에서의 등매개형 상함수(isoparametric shape function)이며 자연좌표계(natural coordinates; ξ, η, ζ)를 이용하면 다음과 같다.⁽⁴⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \\ N_1 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_2 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & N_4 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_6 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_7 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & N_8 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \quad (6)$$

Green 정리, Galerkin 방법, 그리고 2.1절의 경계조건을 식 (2)에 적용하고 식 (5), 식 (6)를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\rho \int_v c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \dot{T}^e + \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} dv T^e \\ &= \int_{S_2} \mathbf{N}^T q^* dS_2 + T_\infty h_c \int_{S_3} \mathbf{N}^T dS_3 \\ &\quad - h_c \int_{S_3} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS_3 T^e + Q \int_v \mathbf{N}^T dv \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{C}^e \dot{T}^e + \mathbf{K}^e T^e = \mathbf{F}^e \quad (8)$$

단,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^e &= \rho \int_v c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \\ \mathbf{K}^e &= \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} dv + h_c \int_{S_3} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS_3 \\ \mathbf{F}^e &= \int_{S_2} \mathbf{N}^T q^* dS_2 + T_\infty h_c \int_{S_3} \mathbf{N}^T dS_3 + Q \int_v \mathbf{N}^T dv \\ \mathbf{B} &= \nabla \mathbf{N} \end{aligned}$$

이며, \mathbf{C} 는 열용량 행렬(heat capacity matrix), \mathbf{K} 는 열전도 행렬(heat conductivity matrix), \mathbf{F} 는 열흐름 벡터(heat flow vector)이다.

식 (3)의 엔탈피-온도 관계식을 식 (8)의 좌변 첫째 항에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$C^e \dot{T}^e = \tilde{C}^e \dot{H}^e \quad (9)$$

$$\tilde{C}^e = \int_v N^T N dv$$

식 (9)의 관계식으로 식 (8)을 수정하면 다음과 같다.

$$\tilde{C} \dot{H} + K T = F \quad (10)$$

2.3 수치적 방법

임의의 시간증분, t ,에 따라 시간이 증가할 때, 각각의 시간을 ${}^1t, {}^2t, \dots, {}^m t, {}^{m+1}t, \dots$ 로 표시하고, 임의의 시간 ${}^{m+1}t$ 에서 하반복(sub-iteration)은 Newton-Raphson법을 이용한다. 이때 각 단계를 ${}^{m+1}t^1, {}^{m+1}t^2, \dots, {}^{m+1}t^{i-1}, {}^{m+1}t^i, \dots$ 로 나타내자.

식 (10)의 좌변항을 \dot{H}, T 의 함수 h 로 나타내면 다음과 같다.

$$h(\dot{H}, T) = F \quad (11)$$

식 (11)을 Taylor 급수전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^{m+1}h^i &= {}^{m+1}h^{i-1} + \frac{\partial h^{i-1}}{\partial \dot{H}} \Delta {}^{m+1}\dot{H}^i + \frac{\partial h^{i-1}}{\partial T} \Delta {}^{m+1}T^i \\ &= {}^{m+1}F^i \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &{}^{m+1}\tilde{C}^{i-1} \Delta {}^{m+1}\dot{H}^i + {}^{m+1}K^{i-1} \Delta {}^{m+1}T^i \\ &= {}^{m+1}F^i - {}^{m+1}h^{i-1} \\ &= {}^{m+1}R^i \end{aligned} \quad (13)$$

단,

$$\begin{aligned} {}^{m+1}\tilde{C}^{i-1} &= \frac{\partial h^{i-1}}{\partial \dot{H}} \\ {}^{m+1}K^{i-1} &= \frac{\partial h^{i-1}}{\partial T} \end{aligned}$$

이다.

온도와 엔탈피의 관계식, $T = T(H)$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial H} = S &\rightarrow \Delta T = S \Delta H \\ \Delta \dot{H} &= \frac{\Delta H}{\Delta t} \end{aligned} \quad (14)$$

시간해법으로 Euler-Backward법과 식 (14)의 관계식을 이용하면 식 (13)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &{}^{m+1}\tilde{C}^{i-1} \Delta {}^{m+1}\dot{H}^i + {}^{m+1}K^{i-1} S \Delta {}^{m+1}H^i = {}^{m+1}R^i \\ &({}^{m+1}\tilde{C}^{i-1} + {}^{m+1}K^{i-1} S) \Delta {}^{m+1}H^i = {}^{m+1}R^i \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)에 ${}^{m+1}K^{i-1} = {}^{m+1}\tilde{C}^{i-1} + {}^{m+1}K^{i-1} S$ 의 관계식을 적용하면 다음과 같다.

$${}^{m+1}K^{i-1} \Delta {}^{m+1}H^i = {}^{m+1}R^i \quad (16)$$

엔탈피의 변화량 $\Delta {}^{m+1}H^i$ 를 이용하여 엔탈피를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
{}^{m+1}H^i &= {}^{m+1}H^{i-1} + \Delta {}^{m+1}H^i \\
{}^{m+1}\dot{H}^i &= {}^{m+1}\dot{H}^{i-1} + \frac{\Delta {}^{m+1}H^i}{\Delta t}
\end{aligned}
\tag{17}$$

식 (16)에서 알 수 있듯이 온도가 자유도였던 식 (1)이 엔탈피가 자유도인 식으로 바뀌었다. 이런 일련의 반복절차를 Fig. 3에 나타내었다.

3. 프로그램 검증

2절의 이론을 근거로 3차원 상변화 해석용 프로그램을 개발하였다. 이 프로그램을 검증하기 위하여 엄밀해가 존재하는 1차원, 2차원 상변화 문제에 적용하였다. 그리고, 각각의 검증모델로서 엄밀해(exact solution) 또는 기존의 해가 제시되어 있는 문제를 선택하여 해를 구한 뒤 그 결과와 비교하였다.

3.1 1차원 상변화 문제

Pham⁽⁶⁾이 사용한 모델을 이용하여 1차원 상변화 문제에 대한 해를 검토하였다. 모델의 형상과 물성치 그리고 경계조건을 Fig. 4(a)에 도시하였다. Fig. 4(a)와 같은 형상을 가진 초기 0 °C 물체의 $x=0$ m 위치의 면을 -30 °C로 유지하였을 때 액상이었던 물체가 완전히 고상화가 되는데 소요되는 시간, 즉 초기 액상의 물체가 고상화되면서 고상면이 $x=0.074$ m의 위치에 도달하는 시간을 시간중분을 달리하며 각각에 대한 해를 구하였으며, 시간중분 크기가 해에 미치는 영향도 고찰하였다. 그리고, 이 문제를 해석함에 있어서 사용한 요소수는 x, y, z방향 각각에 대하여 (10, 1, 1)개이다. 0.074 m의 물체가 완전히 고상화되는데 소요되는 시간에 대한 엄밀해⁽⁶⁻⁹⁾는 20020초로 기존에 제시된 해^(6,7)와 본 연구에서 얻어진 해를 Table 1에 표시하였다. Table 1에는 각 결과에 대한 오차도 같이 표시하였으며, 본 연구에서 얻어진 해인 D부분은 엄밀해에 대한 오차가 기존에 제시된 해들보다 시간중분의 크기에 커다란 영향이 없음을 알 수 있다. Fig. 4(b)에는 시간에 대한 고상화면의 이동을 엄밀해와 같이 4000초까지 표시하였다.

3.2 2차원 상변화 문제

Tamma⁽¹⁰⁾가 사용한 모델을 이용하여 2차원 상변화 문제를 검증하였다. 형상, 물성치 그리고 경계조건을 Fig. 5(a)에 도시하였다. Fig. 5(a)과 같은 형상을 가진 0 °C 물체의 $x=0$ m 위치의 면과 $y=0$ m 위치의 면을 각각 -45 °C로 유지시킬 때 물체 내부에서의 온도 변화를 검토하기 위하여 $x=1$ m, $y=1$ m인 지점에서의 온도변화를 시간에 따라 구하였다. $x=1$ m, $y=1$ m에서의 온도변화를 기존에 제시된 해⁽¹⁰⁾는 물론 엄밀해^(10,11)도 같이 Fig. 5(b)에 도시하였다. 그리고, 이 문제에서 얻어진 해는 요소수가 x, y, z방향 각각에 대하여 (20, 20, 1)개일 때의 결과이다. 본 연구에서 얻어진 해는 Tamma⁽¹⁰⁾가 몇 가지 방법에 의하여 제시한 값 보다 엄밀해에 근사하며, 일방향의 상변화 열전달은 물론 이방향 상변화 열전달 문제에서도 해가 안정적임을 알 수 있다.

4. 결론

엔탈피법을 이용한 상변화 문제의 유한요소해석인 본 연구에서 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 상변화 문제의 유한요소해석을 위해 8절점을 가지며, 각 절점이 1개의 자유도를 가지는 3차원 육면체 요소를 개발하였다.
- (2) 상변화 온도구간이 하나의 특정 온도일 경우는 물론 특정 온도 구간인 경우에도 안전한 해를 구할 수 있다.
- (3) 본 연구에서 고려한 알고리즘은 시간증분과 요소수에 크게 영향을 받지 않는다.
- (4) 3차원 상변화 문제에 적용하여 고상화 과정을 예측함에 이용할 수 있다.

참고문헌

- (1) Rubinsky, B. and Cravahlo, 1981, "A Finite Element Method for the Solution of One-Dimensional Phase Change Problems," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.24, No.12, pp.1987~1989
- (2) Morgan, K., Lewis, R. W. and Zienkiewicz, O. C., 1975, "An Improved Algorithm for Heat Conduction Problems with Phase Change," Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 12, pp.1191~1195
- (3) Roose, J. and Storrer, O., 1984, "Modelization of Phase Changes by Fictious Heat Flow," Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.20, pp.217~225
- (4) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol. 1, McGraw-Hill Book Co.
- (5) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol. 2, McGraw-Hill Book Co.
- (6) Pham, Q. T., 1986, "The Use of The Lumped Capacitance in The Finite-Element Solution of Heat Conduction Problems with Phase Change," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.29, pp.285~291
- (7) G. Comini, S. Del Giudice and O. Saro, 1990, "A Conservative Algorithm for Multidimensional Conduction Phase Change," Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.29, pp. 969~984
- (8) Voller, V. R. and Cross, M., 1981, "Accurate Solution of Moving Boundary Problems Using The Enthalpy Method," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.24, pp.545 ~556
- (9) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, Oxford
- (10) Tamma, K. K. and Namburu, R. R., 1990, "Recent Advances, Trends and New Perspectives via Enthalpy-Based Finite Element Formulations for Application to Solidification Problems," Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 30, pp.803~820
- (11) Budhia, H. and Krieth, F., 1973, "Heat Transfer with Melting or Freezing in A Wedge," Int. J. of Heat Mass Transfer, Vol.16, pp.195~211.

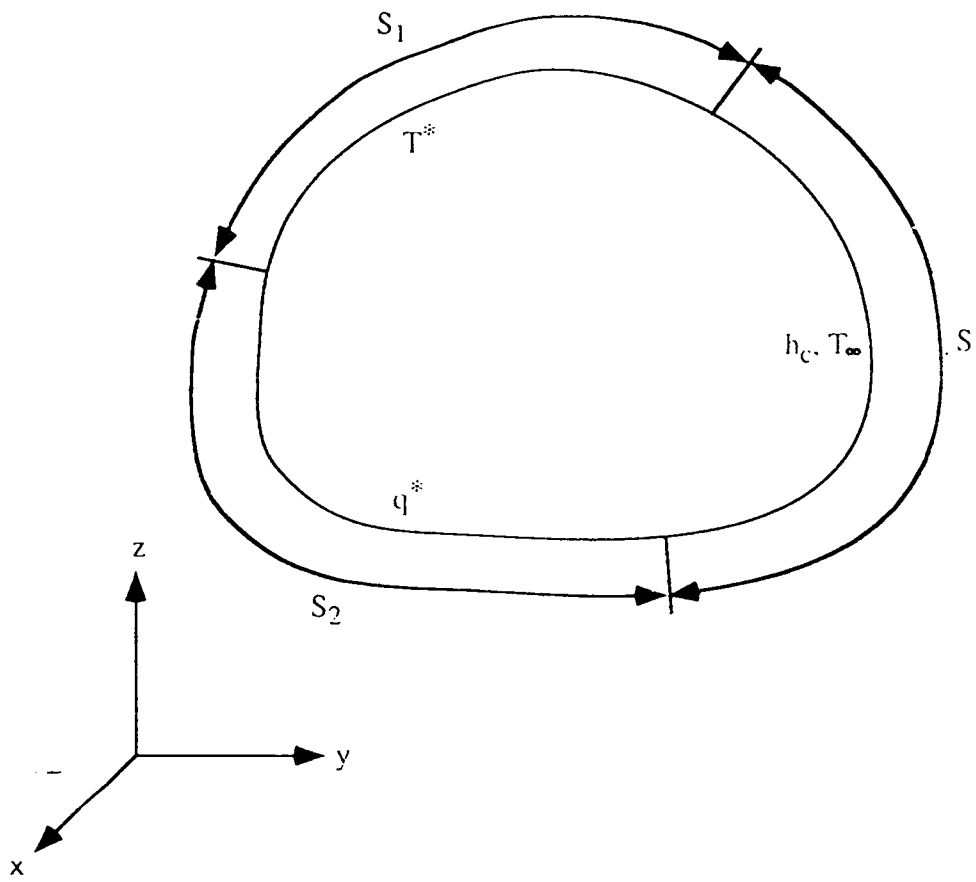


Fig. 1 Three-Dimensional Body under Three Kinds of Heat Transfer Boundary Conditions

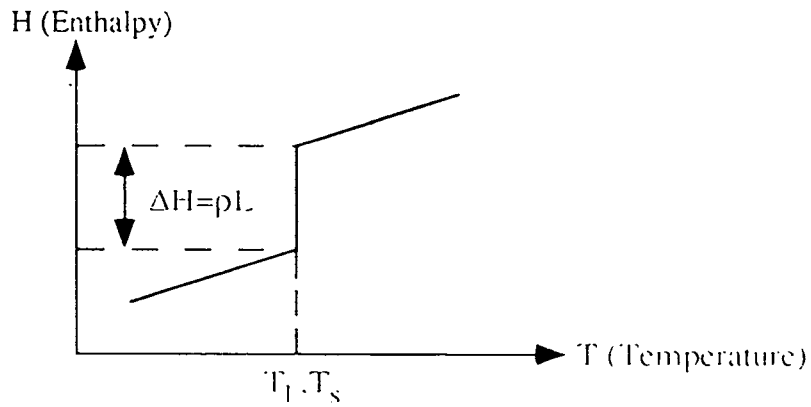


Fig. 2(a) Enthalpy-Temperature Relationship for a Pure Substance
 ($\Delta T = T_l - T_s = \text{zero}$)

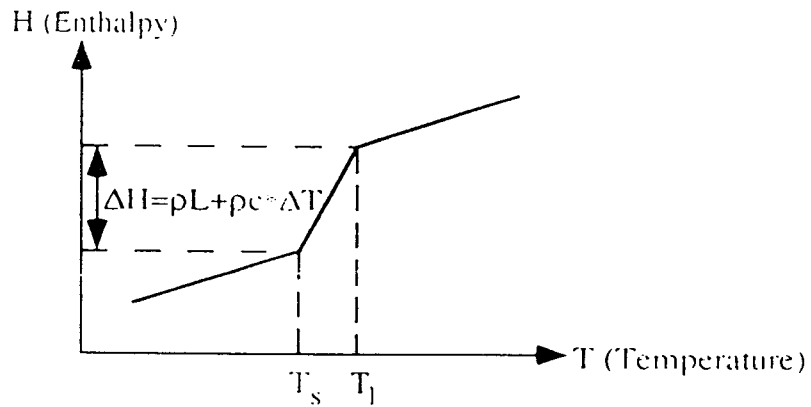


Fig. 2(b) Enthalpy-Temperature Relationship for an Alloy
 ($\Delta T = T_l - T_s \neq \text{zero}$)

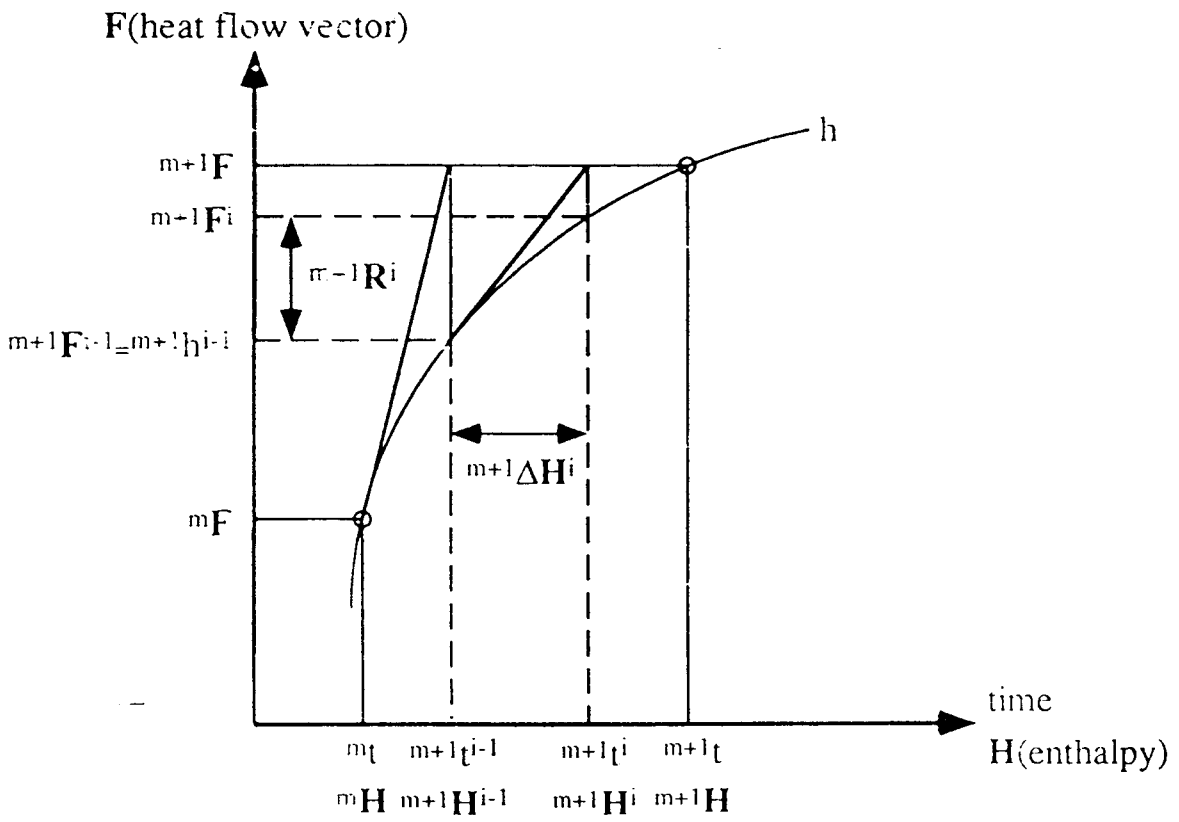
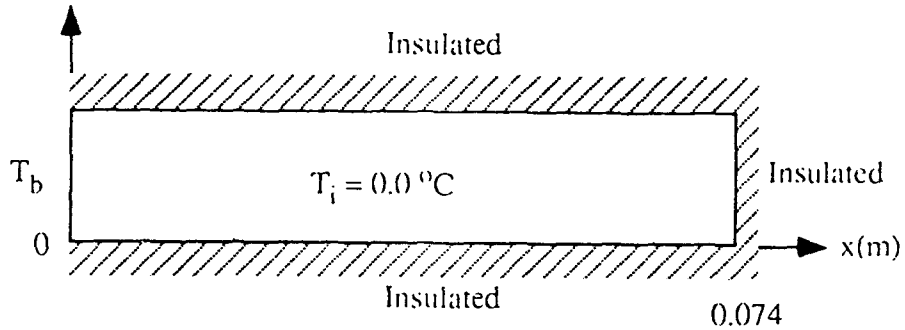


Fig. 3 Newton-Raphson Method



$$T_b = -30.0 \text{ }^\circ\text{C} \quad T_m = T_s = T_l = 0 \text{ }^\circ\text{C} \quad L_v = 2E8 \text{ J/m}^3$$

$$\rho c_s = \rho c_l = 2E6 \text{ J/m}^3 \text{ }^\circ\text{C} \quad k_s = k_l = 1.0 \text{ W/m }^\circ\text{C}$$

Fig. 4(a) Analysis Model for the Solidification of a Liquid Slab using Three-Dimensional Brick Element

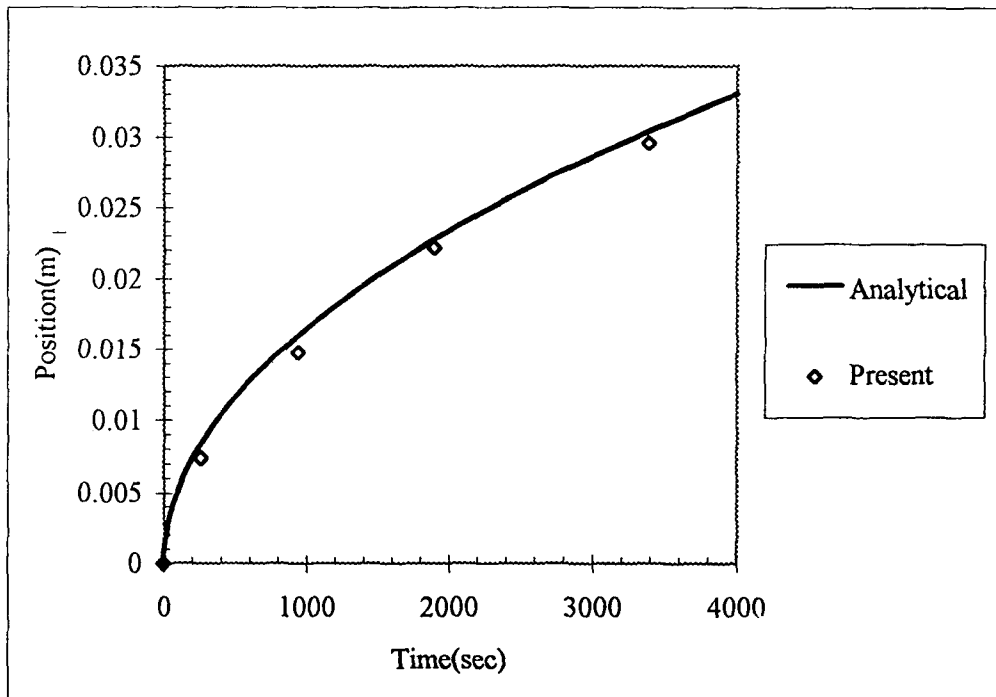
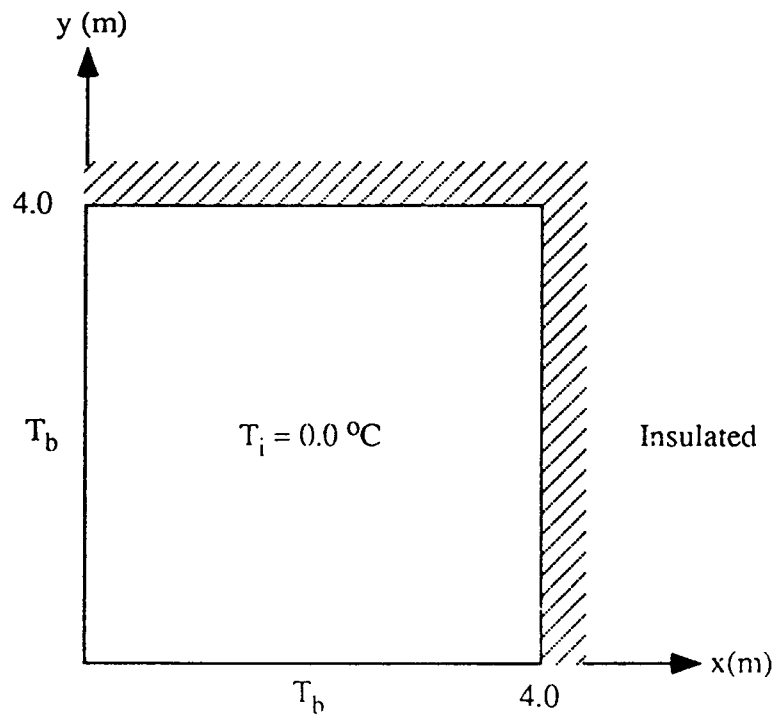


Fig. 4(b) Location of Solidification Front with Time



$$T_b = -45.0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad T_m = T_s = T_l = -0.15 \text{ } ^\circ\text{C} \quad L_v = 70 \text{ J/m}^3$$

$$\rho c_s = \rho c_l = 1 \text{ J/m}^3 \text{ } ^\circ\text{C} \quad k_s = k_l = 1.0 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$$

Fig. 5(a) Computational Model for Two-Dimensional Phase Change Problem using Three-Dimensional Brick Element

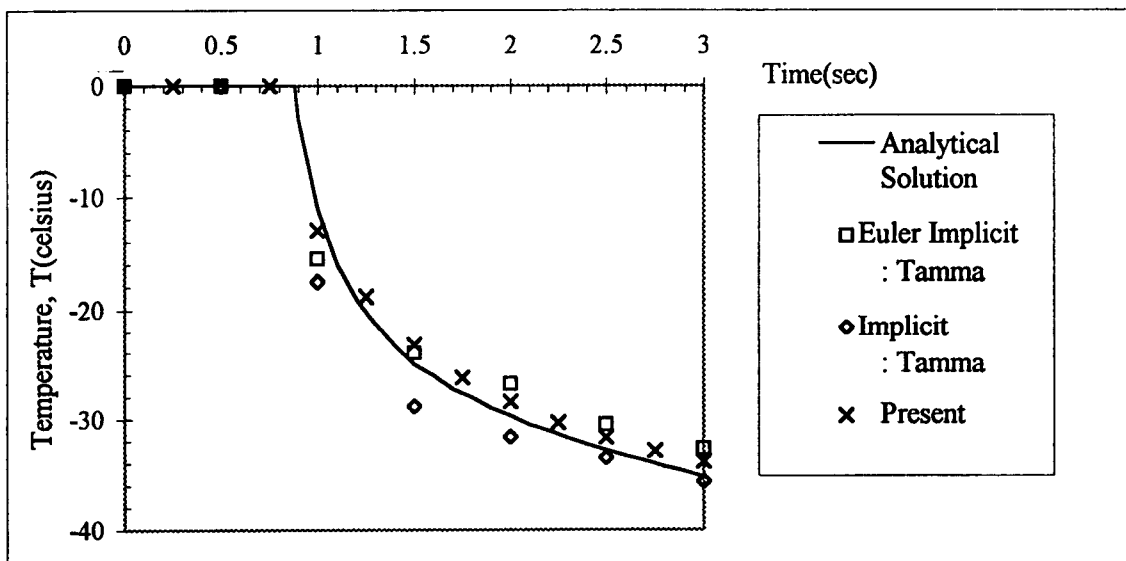


Fig. 5(b) Temperature Variation with Time at $x=1(m)$, $y=1(m)$

Table 1 Results of Finite Element Calculation
(Analytical Solution : 20020 sec.)

Time Step (sec)	Result(sec)					
	A	B	C	D	E	F
2	20125	33994	19869	20026	22651	19925
5	20122	30402	19861	20030	22530	19919
10	20123	24273	19875	20040	22440	19924
20	20126	26500	19880	20060	20860	19938
50	20140	24950	19829	20100	19500	19973
100	20163	22400	19926	20200	19500	19834
200	20062	12000	-	20400	8200	-

Time Step (sec)	Error(%)					
	A	B	C	D	E	F
2	0.52	69.80	0.75	0.03	13.14	0.47
5	0.51	51.86	0.79	0.05	12.54	0.50
10	0.51	21.24	0.72	0.10	12.09	0.48
20	0.53	32.37	0.70	0.20	4.20	0.41
50	0.60	24.63	0.95	0.40	2.60	0.23
100	0.71	11.89	0.47	0.90	2.60	0.93
200	0.21	40.06	-	1.90	59.04	-

A : Finite-Element Method with Lumped Capacitance (Pham)

B : Three-Level Scheme, Linear Element (Pham)

C : Three-Level Scheme, Linear Element and Corrector Step (Comini, Giudice and Saro)

D : Two-Level Scheme, Linear Element (Present Method)

E : Three-Level Scheme, Parabolic Element (Pham)

F : Three-Level Scheme, Parabolic Element and Corrector Step (Comini, Giudice and Saro)