

이상 유동에서의 음파 전달 특성 연구

이 성재, 김 경두, 장 원표
한국 원자력 연구소 열유동 연구팀
대전 유성구 덕진동 150 번지

장 근식
한국 과학기술원 항공 우주 공학과
대전 유성구 구성동 373-1

요 약

이상 유동에서의 음파 전달 현상을 비평형, 비균질 이상 유동 방정식에 의하여 이론적으로 유도하였다. 개발된 방법은 二相 계면에서의 압력 불연속성을 표면 장력 방정식에 의하여 해결하였으며, 이로 인하여 이상 유동 지배 방정식의 不良 설정된 초기치 문제(III-posed initial value problem)가 완전한 쌍곡형 편 미분 방정식群(Complete hyperbolic partial differential equation system)으로 만들어졌다. 새로이 개발된 방정식의 고유값인 음파의 속도는 실험 결과와 정확히 일치한다.

1. 서 론

이상 유동에서 음파의 전달 현상 연구는 여러 분야에서 실험적으로 많이 수행되어져 왔고, 이론적으로는 탄성 역학 이론에 근거하여 수행되어왔으나 지금까지 비균질 비평형 이상 유동 방정식의 고유 값에 의한 음파 전달 연구는 특성 방정식의 고유해가 복소수(Complex variable)를 포함하고 있어 만족할만한 결과를 얻을 수 없었다. 일 차원 이상 유동 해석을 위하여 쓰여지는 지배 방정식은 질량, 운동량 그리고 에너지 보존 방정식 이며, 이들이 각각의 상에 적용되어 모두 6 개의 기본 방정식으로 이루어져 있다. 기존의 이상 유동 방정식은 不良 설정된 초기치 문제이기 때문에 음파의 속도를 나타내는 이들 방정식의 고유값을 해석적인 방법으로 구할 수 없으며, 유동 형태에 따라서는 수치해석 시 불안정성이 발생할 수 있다[1,2,3]. 이러한 원인은 액체,기체의 압력은 동일하고 속도는 서로 불연속적인 값을 지니고 있기 때문이다[4]. 본 논문에서는 이러한 각상의 경계면에서 발생하는 불연속적인 운동량 변화를 표면 물리에 근거하여 해결하였으며 이로 인하여 기존의 이상 유동 방정식이 완전한 쌍곡형으로 변화되었다.

2. 완전한 쌍곡형 二相 流動 계통(Complete Hyperbolic Two-phase Flow System)

二相 유동 지배 방정식은 액체, 기체 각상에 질량, 운동량 그리고 에너지 보존 방정식을 적용하고 순간적으로 공간에 따라 평균한 형태의 방정식[5]을 사용하며 일반적으로 다음 과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial(\rho_k \alpha_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial x} = \phi_c \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k^2)}{\partial x} + \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial x} + (p_u - p_k) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \phi_m \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k s_k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_k \rho_k v_k s_k)}{\partial x} = \phi_e \tag{3}$$

여기서 ϕ_c 는 경계면에서 교환되는 질량의 Source 항이고, ϕ_m 은 운동량 교환으로 인한 것, 그리고 ϕ_e 는 에너지에 대한 것이다. 하 첨자 k 는 각상을 나타내고 i 는 계면에서의 물리량을, 독립변수 α, ρ

p , s 그리고 v 는 각각의 기포율, 밀도, 압력, 엔탈피 그리고 유동 속도를 나타낸다. 각각의 압력 차이를 무시한 기존의 방정식은 쌍곡형 성질(Hyperbolicity)을 만족하지 못하는데, 그 주요 원인으로 고려되는 것은 각각의 상이 동일한 압력에 서로 다른 2 개의 속도를 가지므로 역학적인 불균형(Mechanical non-equilibrium) 때문이다.

이러한 부적절한 경계면의 가정을 제거하기 위하여 본 논문에서는 Young 에 의하여 정립된 표면장력 방정식을 이용하였다. 다음의 식은 표면장력 방정식을 이상 유동에 적합하게 변형시킨 식이며 여기서 δ 는 통계 물리 역학 측면에서 고려하고 있는 표면장력이 존재하는 얇은 두께를 나타낸다 [6,7,8]. f 와 c 는 경계면의 곡률과 형상에 관련된 상수이다.

$$p_G - p_L = \left(\frac{c\sigma}{\delta}\right) \cdot \left(\frac{f \cdot \delta}{c}\right) \quad (4)$$

여기서 위의 식은 최적 설계의 개념으로부터 유래한 것으로, 오른쪽의 첫째 항 $c\sigma/\delta$ 은 “Lagrangian multiplier” 에 상응하는 변수이고 두 번째 항 $f\delta/c$ 은 “slack variable” 에 해당된다[9]. 위의 식을 이상 유동 운동량 방정식에 적용하기 위하여 기포율과 계면의 관계를 이용하여야 하는데 지금까지는 이들의 관계식은 계면의 형상에 의한 관계식으로 Ishii 에 의하여 정립되었으며 일반적으로 $\beta_f \partial \alpha_i = \partial \alpha_k$ 와 같이 표현될 수 있다[10]. 여기서 β_f 는 유동 형상 함수이며 기포율, 밀도, 온도, 그리고 기포의 형상 등에 의하여 결정되는 변수이다. 그러나 기포율과 계면의 크기는 위에서 언급한 식과 같이 정확한 선형적인 관계가 성립되지 않고 기포의 충돌이나 뭉침 또는 계면의 두께에 의하여 다음과 같이 표현되어야 완전한 관계식이 성립된다.

$$\beta_f \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} + \gamma = 0 \quad (5)$$

여기서 γ 는 위에서 언급한 대로 slack variable 로 취급되며 정의는 $\gamma \equiv f\delta/c (\partial \alpha_k / \partial x)$ 로 된다. 위의 식을 이용하여 계면에서의 불연속성을 해결하기 위해 식 (4)의 압력 항을 $p_2 - p_1 = (p_2 - p_G) + (p_G - p_L) + (p_L - p_1)$ 로 나누고 오른쪽의 첫째 항 $c\sigma/\delta$ 을 P_G, P_L 로 분리하여 표현하면 다음과 같이 나타낸다.

$$E_k \equiv (p_k - p_i) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = P_k \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial x} - \beta_f \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \right) \quad (6)$$

여기서 새로이 소개되는 항인 E_k 는 표면장력의 크기에 관련되는 값으로 압력의 단위를 가지는 항 P_k 와 괄호의 아주 작은 값의 곱으로 나타내어진다. 이 값은 실제로 다른 운동량에 비하여 상대적으로 아주 적어 해석 결과에는 별다른 영향이 없으나 방정식 자체의 특성을 바꾼다는 측면에서는 상당히 중요한 역할을 한다.

3. 음파 전달 특성 방정식에 의한 연구

지금까지의 설명을 종합하여 비평형, 비균질 이상 유동 방정식을 정리 하면 다음과 같다.

(질량 방정식)

$$\rho_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \frac{\alpha_k \partial \phi}{C_k^2 \partial t} + \rho_k v_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} + \frac{\alpha_k v_k \partial \phi}{C_k^2 \partial x} + \rho_k \alpha_k \frac{\partial v_k}{\partial x} = \phi, \quad (7)$$

(운동량 방정식)

$$\alpha_k \rho_k \frac{\partial v_k}{\partial t} + \alpha_k \frac{\partial \phi}{\partial x} + \alpha_k \rho_k v_k \frac{\partial v_k}{\partial x} + E_k = \phi_m \quad (8)$$

(엔트로피 방정식)

$$\alpha_k \rho_k \frac{\partial s_k}{\partial t} + \alpha_k \rho_k v_k \frac{\partial s_k}{\partial x} = \phi_s \quad (9)$$

여기서 C_i, C_k 은 각각의 독립적인 음파의 속도로 정의 된다. 二相 유동 방정식의 고유 방정식을 구하고 그에 대한 고유치(Eigenvalue)를 찾기 위해서 식(7)-(9)을 다음과 같이 행렬 형태로 간략히 나타내면 다음과 같다.

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = C \quad (10)$$

여기서 C Vector 는 Source vector 이며, Vector U 는 기포율, 압력, 각상의 에너지 및 속도 그리고 계면으로 이루어져 있다. 행렬 A,B 는 시간 및 공간 미분 치에 대한 계수 행렬을 나타낸다. 식 (10)의 새로운 계수 행렬 $G(A^{-1}B)$ 가 방정식의 특성을 결정하게 되는데, P_b, P_g 에 따라 5 가지 종류의 실수 고유치와 Eigenvector 가 존재함을 발견 할 수 있었다. 이들 5 가지는 아래의 표 1 과 같다.

4. 새로 도입된 상수의 수학적 성질

이상 유동 방정식 계통의 특성 방정식의 형태는 다음과 같이 6 차의 다항식으로 나타낼 수 있다

$$P_6(\lambda) = (\lambda - v_g)(\lambda - v_l)P_4(\lambda) \quad (11)$$

여기서 $P_4(\lambda)$ 는 질량과 운동량 방정식으로부터 나오는 4 차의 다항식으로 다음과 같다.

$$P_4(\lambda) = (\lambda - v_g)^2(\lambda - v_l)^2 - K_1(\lambda - v_g)^2 - K_2(\lambda - v_l)^2 + K_3 \quad (12)$$

여기서 K_1, K_2, K_3 는 물성치의 함수로 표시된다. 식(12)에서 알 수 있듯이 특성 방정식의 해는 P_b, P_g 에 의하여 실수 또는 허수 값으로 구별된다. 앞 절에서 보였듯이 P_b, P_g 의 값 가운데 현재까지는 오직 5 가지 조합의 경우에만 실수의 해석적인 값이 존재하고 그 이외의 값에 대하여는 수치적으로만 실수 값을 가지는 영역을 찾았다. 식(12)의 해가 실수를 가질때 $\lambda_{1,2} = v_l \pm \lambda_1, \lambda_{3,4} = v_g \pm \lambda_2$ 와 같은 형태로 나오는데 이러한 해는 v_g, v_l 에 대하여 대칭이므로 $\lambda_1 = v_g + \lambda_g$ 와 $\lambda_2 = v_l + \lambda_l$ 의 경우에 대해서 수치적인 방법으로 실수 해의 영역을 그림(1)에 나타내었다. 실수 영역을 찾기 위해서 수치적으로 구한 방법은 어떠한 특정 유동(압력: 0.36Mpa, 기포율:0.5, $v_g=20, v_l=10$ m/s)에 대하여 P_b, P_g 각각의 값에 해가 존재하는지를 확인하는 방법으로 수행하였다. 특히 실수 영역과 허수 영역이 겹치는 부분은 Chaos 현상의 하나인 Fractal 현상이 나타났다. 그림 1에서 점 “.” 부분은 고유 값이 모두 실수인 구역이고 점 “○” 구역은 중근과 실근이 동시에 존재하고, 점 “■”은 중근만 존재하는 구역이고 나머지 하얀구역은 해가 존재하지 않는 영역을 나타내고 있다.

5. 결 과

새로 개발된 이상 유동 방정식의 특성치 5 가지 경우의 물리적 의미를 관찰하면 우선 $\lambda_{1,2}$ 는 엔트로피의 전달 속도며 나머지 $\lambda_{3,4,5,6}$ 은 압력파의 전달 속도를 의미하는데 이 값들은 각 유동 형태에서의 음파 속도와 일치 한다. 이상 유동 상태의 음파의 전파 속도(Speed of sound)는 유동 형태와 기포율에 따라 다른 특성을 보이고 있는데 본 논문에서 개발된 방법에 의한 고유값들은 실험에서 측정된 Data [11]과 탄성체 역학 이론의 해석적인 방법에 의하여 유도된 값 [12]과 일치함을 보이고 있다. 이상 유동에서의 음파 전달 속도 측정은 기체와 액체를 통과하는 복합적인 전달이므로 다음과 같은 복합 음속(Composite Sonic Speed)식으로 표시된다.

$$C_t = \frac{\lambda_3 \lambda_5}{\varepsilon_l \lambda_5 + \varepsilon_g \lambda_3} \quad (13)$$

그 예로 우선 기포 유동의 경우에 현재 계산 결과의 Case 2와 비교하였다. 그림(2)은 물과 증기로 이루어진 기포 유동의 경우 기포율에 따른 음속을 비교한 그림으로 Homogeneous Equilibrium Model (HEM: 이상의 유체가 완전한 혼합물로 이루어져 있는 것으로 가정한 모델)을 제외하고는 실험과 해석적 연구 그리고 본 연구 결과가 모두 일치함을 보이고 있다. 그림(3)는 물과 공기 혼합물의 음속을 비교한 그림으로 역시 잘 일치하고 있다. 그 밖에 Slug 유동 또는, 분리 유동의 경우도 비교하였는데 역시 잘 일치 함을 보이고 있다(그림(4)-(5)). Case 1 과 Case 5의 경우는 물리적으로 의미가 없으므로 여기서는 설명을 생략하였다. 이상과 같이 새로 개발된 이상 유동 방정식은 완전한 쌍곡형이며 5 개의 고유치 가운데 3 개가 각각의 유동 형태를 대표하는 것으로 확인 하였다.

6. 결 론

본 연구에서는 지난 수 십년 동안 완전히 해결하지 못하였던 이상 유동 방정식의 Ill-Posedness 를 물리적으로 타당한 이론에 근거한 새로운 개념의 도입으로 모든 유동 영역에서 적용가능한 완전한 쌍곡형으로 변환시켰다. 운동량 방정식에 추가된 E_k 값은 표면 장력 효과를 정확히 고려하여 유도된 값으로 $\partial(\rho v_k^2 + p)/\partial x$ 에 비해 상당히 작지만 기존 이상 유동 방정식을 완전한 쌍곡형으로 변화시키는 상당히 중요한 역할을 한다. 이는 새로이 도입한 상수 P_b, P_g 의 변화에 따라 방정식의 특성이 변화하는 것을 알 수 있었으며 특히 이들 값들의 특정 범위에서는 고유 방정식의 해가 Chaos 적인 현상을 나타내었다. 개발된 방정식의 고유 값인 음파의 전달 속도는 실험과 잘 일치 하였으며, 또한 고유치들은 이상 유동의 대표적인 세가지 유동 형태인 Dispersed, Slug 그리고 Separated 유동을 명확히 구별하고 있다.

참 고 문 헌

1. Ramshaw, J. D. and Trapp, J. A. (1978) Characteristics, stability, and short-wavelength phenomena in two-phase flow equation systems. *Nuclear Science and Engineering*, **66**, 93-102.
2. Stewart, H. B. (1979) Stability of two-phase flow calculation using two-fluid models. *J. Computational Physics*, **33**, 259-270
3. Lyckowski, R. W.; et. al. (1978) Characteristics and stability analyses of transient one-dimensional two-phase flow equations and their finite difference approximations. *Nuclear Science and Engineering*, **66**, 378-396.
4. Ramsom, V. H. and Hicks, D. L. (1984) Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow. *J. Computational Physics*, **53**, 124-151
5. Bergles, A. E., Collier, J.G., Delhaye, J.M., Hewitt, G.F. and Mayinger, F. (1981) *Two-phase flow and heat transfer in the power and process industries*. Hemisphere, New York.
6. Present, R. D. J. (1974) On the product of surface tension and compressibility of the liquids. *J. Chemical Physics*, **61**, 4267
7. Clive A. (1980) *Statistical Mechanics of the Liquid Surface*. Wiley, New York
8. Egelstaff, P. A. & Widom, B. (1970) Liquid surface tension near the triple point. *J. Chemical Physics*, **53**, 2667
9. Panos, Y. P. and Douglass, J. W. (1988) *Principles of Optimal Design*. Cambridge
10. Ishii, M and Mishima, K. (1980) *Study of Two-Fluid Model and Interfacial Area*. NUREG/CR-1873
11. Henry, R. E., Grolenes, M. A. and Fauske, H. K. (1971) *Pressure-Pulse Propagation in Two-Phase One-and Two-Component Mixtures*. ANL-7792.
12. Nguyen, K. L. ; et. al. (1981) Sonic velocity in two-phase systems. *Int. J. Multiphase Flow*, **7**, 311-320.

Table 1. 변수 P_k 값 따른 해석적인 고유값의 종류

Case 1	$\lambda_1 = v_l$ $\lambda_2 = v_g$ $\lambda_{3,4} = v_l \pm c_l$ $\lambda_{5,6} = v_g \pm c_g \sqrt{\frac{\rho_l C_l^2}{\rho_g \alpha_l C_g^2 + \rho_l \alpha_g C_l^2}}$
Case 2 (λ_1, λ_2 는 case1 과 동일)	$\lambda_{3,4} = v_l \pm c_l \sqrt{\frac{\rho_g C_g^2}{\rho_g \alpha_l C_g^2 + \rho_l \alpha_g C_l^2}}$ $\lambda_{5,6} = v_g \pm c_g$
Case 3 (λ_1, λ_2 는 case1 과 동일)	$\lambda_{3,4} = v_l \pm c_l$ $\lambda_{5,6} = v_g \pm c_g$
Case 4 (λ_1, λ_2 는 case1 과 동일)	$\lambda_{3,4} = v_l \pm c_l$ $\lambda_{5,6} = v_g \pm c_g \sqrt{\frac{\alpha_g \rho_l C_l^2}{\rho_g \alpha_l C_g^2 + \rho_l \alpha_g C_l^2}}$
Case 5 (λ_1, λ_2 는 case1 과 동일)	$\lambda_{3,4} = v_l \pm c_l \sqrt{\frac{\alpha_l \rho_g C_g^2}{\rho_g \alpha_l C_g^2 + \rho_l \alpha_g C_l^2}}$ $\lambda_{5,6} = v_g \pm c_g$

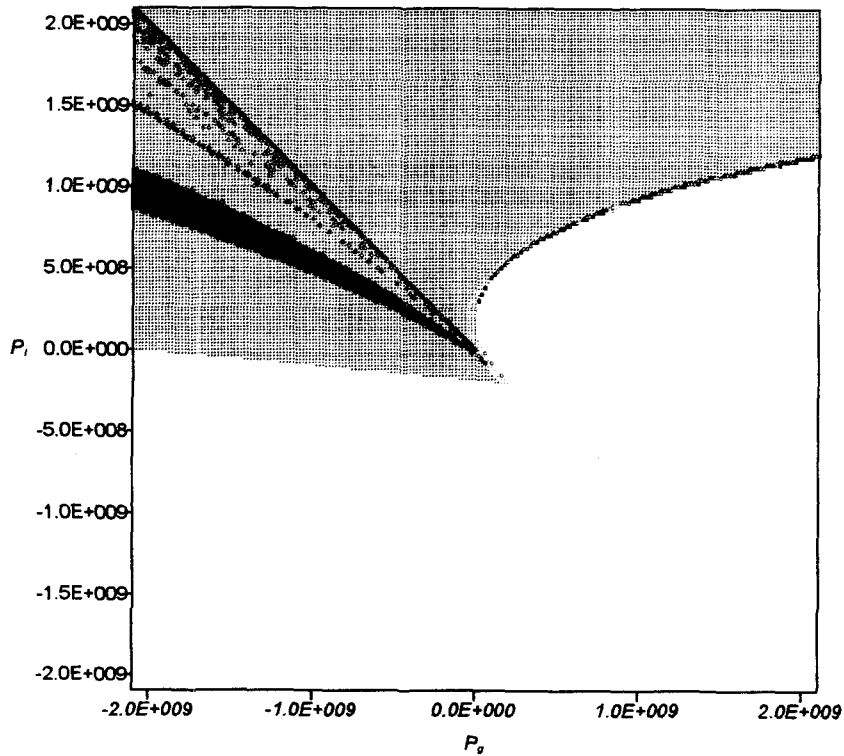


Fig 1. 변수 P_l, P_g 에 의한 고유 방정식 해의 특성을 나타내는 Map.

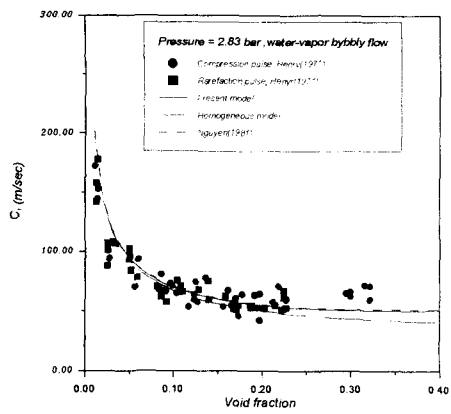


Fig. 2 Composite Sound speed (water-vapor dispersed flow)

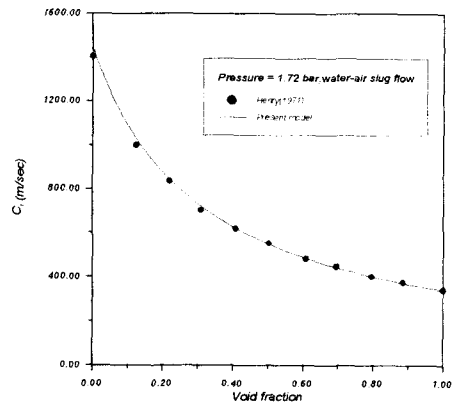


Fig. 4 Composite Sound speed (water-air slug flow)

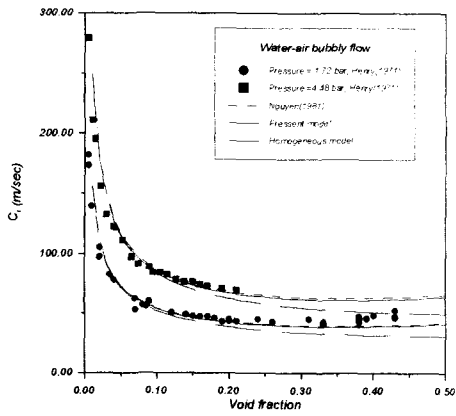


Fig. 3 Composite Sound speed (water-air dispersed flow)

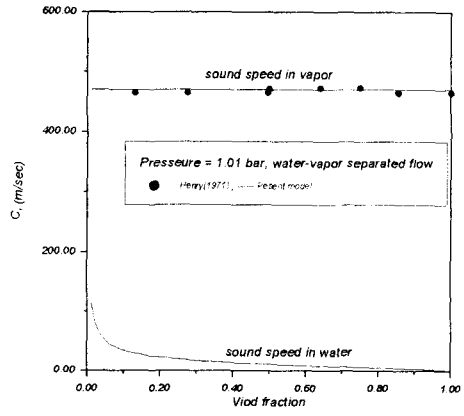


Fig. 5 Composite Sound speed (water-vapor separated flow)