

## 최단전압붕괴점을 계산하는 개선된 직접법

남 해곤 송 충기\*  
전남대학교 전기공학과

### Improved Direct Method for Computing a Closest Voltage Collapse Point

Hae-Kon Nam Chung-Gi Song  
Dept. of Electrical Engineering, Chonnam National University

**Abstract** - This paper presents improved direct method for calculating the closest saddle node bifurcation (CSNB) point, which is also applicable to the selection of appropriate load shedding, reactive power compensation point detection. The proposed method reduced dimension of nonlinear equation compared with that of Dobson's direct method. The improved direct method, utilizing Newton Iterative method, converges very quickly. But it diverges if the initial guess is not very close to CSNB. So the direct method is performed with the initial values obtained by carrying out the iterative method twice, which is considered most efficient at this time.

Since sparsity techniques can be employed, this method is a good choice to a large scale system on-line application. Proposed method has been tested for 5-bus, New England 30-bus system.

#### 1. 서론

미리 정해진 부하증가 방향에 대한 전압붕괴 임계점(saddle node bifurcation, SNB)의 계산은, 운전원에게 가장 중요한 의미를 갖고 확률이 가장 높은 부하증가방향에 대한 전압안정도 마진을 제공하는 외에 현재의 운전점으로부터 가장 근접한 최단전압 붕괴 임계점(closest saddle node bifurcation, CSNB)의 계산의 기본도구로 사용된다. 이 CSNB는 가장 가혹한 시나리오에 대한 보수적인 안정도 마진을 제공하고, 상정사고하에서의 전압안정도 향상을 위한 발전력의 재급전 알고리즘의 기본도구로 쓰인다. Dobson은 SNB 또는 CSNB에서의 기하학적 특성을 이용하여 CSNB를 계산하는 반복법과 직접법을 제안하였다[1-3].

Dobson의 반복법에서는 미리 정해진 방향으로 부하를 증가시키면서 PoC법을 사용하여 임계점을 계산하고, 이 임계점에서 좌고유벡터의 방향을 부하증가 방향으로 취하여 임계점을 구하는 과정을 반복한다. 그러나 이 방법에서는 새로운 부하증가 방향설정을 일차미분에 의하여 산정하므로 계통의 크기가 크면 수렴속도가 느릴 수 있다 [4]. Dobson의 직접법에서는 PoC법의 조건식에 부하증가방향은 좌고유벡터에 평행하다는 조건을 추가하고, 이 식을 Newton법으로 푼다. 이 방법은 이차 수렴특성으로 빠르게 수렴하는 특성이 있으나 조류계산식의 연립방정식 개수인 n의 약 3배인 3n+1의 크기를 가지는 비선형 연립방정식을 풀어야하고, 초기치가 해로부터 근접하지 않으면 발산하는 단점이 있다.

반면, 본 논문에서는 CSNB에서 부하증가방향은 좌고유벡터와 평행하다는 조건을 이용하여 PoC법과 동일한 2n+1개의 방정식만을 풀어 CSNB를 계산하는 개선된 알고리즘을 제안하고, 이를 5-모선 계통, New England 30-모선 계통에 적용하였다.

#### 2. 직접법

한 고유치와 그에 관련된 좌/우고유벡터를 각각  $\lambda, v, w$ 라 할 때, 이들은 다음 식으로 정의된다.

$$Jv = \lambda v \quad (2.1)$$

$$J^T w = \lambda w \quad (2.2)$$

현재의 부하  $\lambda_0$ 에서  $P_r$ 의 부하증가방향으로  $k P_r$ 만큼 부하를 증가시킬 때 임계점에 도달하고, 그 임계점에서의 상태변수 값이  $x_1$ , 좌고유벡터가  $w_1$ 이라 하자. 즉 임계점에서 부하는  $\lambda_0 + kP_r$ , 이고 상태변수 값은  $x_1$ 이다. 임계점에서는 조류계산식을 만족하고 하나의 고유치는 0의 값을 가진다. 이 조건들에 좌고유벡터의 크기가 1이라는 조건을 추가하면, 임계점에서 다음 식들이 만족된다.

$$f(x_1, \lambda_0 + kP_r) = 0 \quad (2.3)$$

$$J^T_{(x_1, \lambda_0 + kP_r)} w_1 = 0 \quad (2.4)$$

$$\|w_1\|_2 = 1 \quad (2.5)$$

위에서  $J$ 는 조류계산식  $f(x, \lambda)$ 의 Jacobian 행렬이다. 식 (2.3)-(2.5)는 미지수가  $x_1, w_1, k$ 인  $2n+1$ 개의 비선형 연립방정식 문제이다. 이와 같이 임계점을 연립방정식을 직접 풀어 계산하는 방법을 직접법 또는 PoC법이라 부른다[5].

식 (2.3)-(2.5)의 조건은 주어진 부하증가방향으로 부하증가량을 최대로 하는 최적화 조건으로부터도 유도될 수 있다[6]. 즉

$$\max k \quad (2.6)$$

$$\text{subject to } f(x, \lambda_0 + kP_r) = 0 \quad (2.7)$$

식 (2.3)-(2.5)는 Newton 반복법을 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{bmatrix} J & 0 & Pr \\ H & J^T & 0 \\ 0 & Pr^T & 0 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta x \\ \Delta k \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} f(x, \lambda) + \lambda_0 + kPr \\ J^T w \\ 1 + Pr^T w \end{bmatrix}^i \quad (2.8)$$

$$x^{i+1} = x^i + \Delta x^i$$

$$w^{i+1} = w^i + \Delta w^i$$

$$k^{i+1} = k^i + \Delta k^i$$

위에서  $H$ 는 조류계산식  $f(x, \lambda)$ 의 상태변수  $x$ 에 관한 Hessian 행렬에 임계점에서의 좌고유벡터  $w$ 를 곱한 값과 같다. 즉 Hessian 행렬  $H$ 의  $(i, j)$ 요소는 다음 식으로 계산된다.

$$H_{ij} = \sum_k w_k \cdot \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.9)$$

이 Hessian 행렬의 구조는 Jacobian 행렬의 구조와 같다. 즉, Jacobian 행렬 요소의 값이 0인 위치의 Hessian 요소의 값도 0이다. 따라서 스파티티기법의 사용이 가능하므로 대규모 계통에 적용이 가능하다. 또한 Hessian 행렬의 모든 요소는 이미 계산된 Jacobian 행렬요소 값으로 간단히 표현되므로 Hessian을 계산하기 위한 추가부담은 그리 크지 않다.

### 3. 최단 전압붕괴임계점의 계산

#### 3.1. 임계점에서의 기하학적 특성

전력계통의 조류계산식은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$f(x, \lambda) = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{단, } x = \begin{bmatrix} V \\ \theta \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

여기서  $x$ 는 상태변수벡터이고,  $\lambda$ 는 매개변수벡터로 유효/무효부하전력과 발전기 유효전력으로 구성되어 있다.  $N_{PV}$ 가 PV bus (slack을 제외한 발전기 모선)의 수 이고  $N_{PQ}$ 가 부하모선의 개수라면 비선형 방정식  $f$ 의 차원은

$$n = 2 N_{PQ} + N_{PV} \quad (3.2)$$

이다.

SNB와 CSNB를 그림 1과 같이 간단한 방사상 계통을 예로 들어 설명하기로 한다[7].

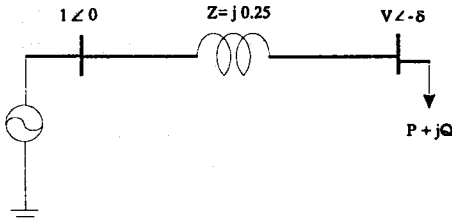


그림 1. 간단한 2-모선 계통.

이 계통의 조류계산식, 자코비안 행렬은 다음과 같다.

$$f(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 4V \sin \delta - P \\ 4V \cos \delta - 4V^2 - Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$J_x = \begin{bmatrix} 4V \cos \delta & 4 \sin \delta \\ -4V \sin \delta & 4 \cos \delta - 8V \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Bifurcation이 발생하는 특이(singular)곡면  $\Sigma$ 는  $\det(J_x) = 0$  이 성립되는 곡면으로, 부하곡면(load parameter space)상에서의 P와 Q의 관계식 (3.5)가 성립하고 이를 그림으로 나타내면 그림 2와 같다.

$$P^2 + 4Q - 4 = 0 \quad (3.5)$$

이 특이곡면  $\Sigma$ 는 현재의 운전점  $\lambda_0$ 에서 부하를 증가시킬 때 SNB가 발생하는 점, 즉 전압붕괴점들의 집합이다. 부하변수 공간에서  $\Sigma$ 는  $n(2N_{PQ} + N_{PV})$  차원을 가지며, 큰 계통에 대하여  $\Sigma$ 의 형태에 대해 알려진 바는 거의 없다[2-3].

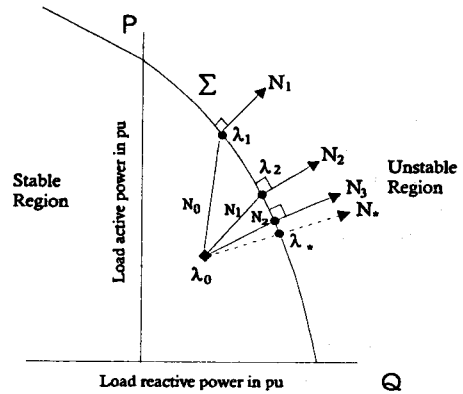
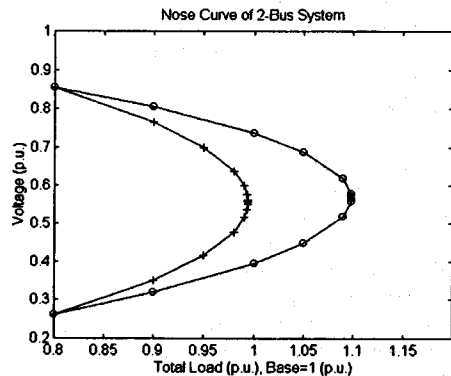


그림 2. P-Q 공간에서의 전압붕괴 특이곡면  $\Sigma$ 와 반복법의 수렴특성.

그림 2에서 기저부하  $\lambda_0$ 에서  $N_0$ 의 방향으로 부하를 증가시킬 때 전압이 감소되어, 부하가  $\lambda_1$ 에 이르면 전압붕괴가 발생한다. 이 과정을 PV곡선으로 나타내면 그림 3의 우측 그림과 같다. 두 번째 방향  $N_1$ 으로 부하를 기저부하로부터 증가시킬 때 모선전압이 감소하는 추이는 그림 3의 좌측 PV곡선으로 나타내었다. 이 PV곡선으로부터도  $N_1$ 방향으로 부하를 증가시키는 것이  $N_0$ 방향으로 부하를 증가시키는 것에 비해 안정도 마진이 크게 작아짐을 확인할 수 있다.



o : Load increase pattern with uniform loading direction ( $N_1$ )  
x : Load increase pattern with  $N_2$  loading direction

그림 3. 2-모선 계통의 주어진 부하방향에 대한 Nose 곡선.

이 과정을 반복하면 최종적으로 안정도 마진이 최소가 되는  $\lambda_c$ 에 도달하고, 이 점을 CSNB라 한다. 이 점에서 좌고유벡터 또는 부하 증가방향  $N_c$ 와  $\lambda_c - \lambda_0$ 의 방향은 일치한다. 즉 Jacobian 행렬  $J_x$ 의 좌고유벡터  $w$ 와  $N_c$ 는 다음 관계식을 만족한다.

$$N_c = J_1 w, \quad \|N_c\|_2 = 1 \quad (3.6)$$

Dobson 등은[2-3] 이 원리를 이용하여 CSNB를 계산하는 알고리즘을 제안하였다.

### 3.2. Dobson의 반복법

그림 2에서 현재의 안정운전점  $\lambda_0$ 로부터 전압붕괴 특이곡면상에 존재하는 한 점  $\lambda_c$ 까지의 거리

$$k = |\lambda_c - \lambda_0| \quad (3.7)$$

는 발전량과 부하를 배분하는 방법에 따라 상당히 달라질 수 있다. 부하증가방향을  $N_c$ 의 방향으로 취할 때 전압붕괴에 이르는 거리가 최소가 되며, 이 거리는 계통의 허용가능한 가장 가혹한 전력마진(power margin)을 의미하고 전압붕괴에 대한 가장 보수적인 근접도 지표로 사용될 수 있다. CSNB를 계산하는 알고리즘은 다음과 같다[3,7].

[단계 1] 초기 부하증가 방향  $N_0$ 를 설정한다.

[단계 2] 기저부하  $\lambda_0$ 로부터 전단계에서 계산한 부하증가 방향으로 새로운 임계점을 2장에서 기술한 직접법으로 계산하고, 그 점에서의 좌고유벡터  $w$ 와 새로운 부하증가방향  $N = J_1 w$ 를 계산한다.

[단계 3] 계산된  $k$ 나  $w$ 가 정해진  $\epsilon$ 내로 수렴할 때까지 단계 2의 과정을 반복한다.

CSNB까지 거리  $k$ 와 모션전력의 증가방향  $N_*$ 가 구해지면 CSNB는 다음 식으로 계산된다.

$$\lambda_* = \lambda_0 + k \cdot N_* \quad (3.8)$$

$\lambda$ 는 발전기 모션일 때는 음의 값을 가지고 부하모션일 때는 양의 값을 지닌다.

### 3.3. 직접법

반복법은 초기치에 상관없이 강인하게 수렴하는 장점을 가진 반면, 수렴속도가 느리다는 단점이 있다. Dobson은 CSNB에서 모션 P, Q의 증가방향을 좌고유벡터에 평행하다는 조건을 첨가하여 2장의 직접법에 첨가하여, 다음과 같은 더욱 일반화된 직접법을 제안하였다[3].

$$f(x_*, \lambda_*) = 0 \quad (3.9)$$

$$f_x^T|_{(x_*, \lambda_*)} w_* = 0 \quad (3.10)$$

$$\|N_*\|_2 = 1 \quad (3.11)$$

$$(\lambda_* - \lambda_0) - k_* N_* = 0 \quad (3.12)$$

이 Dobson의 직접법은 CSNB를 보다 빠른 시간 내에 정확하게 계산할 수 있다는 장점이 있는 반면 비교적 정확한 초기치 필요로 하고, 만일 초기치가 부정확하면 발산할 우려가 높다. 또한  $(3n+1)$ 개의 비선형방정식을 풀어야 하므로 Newton법 1회 계산량이 많다는 단점이 있다.

### 개선된 직접법

CSNB에서 상태변수, 좌고유벡터, 기저부하로부터 CSNB까지의 거리를 각각  $x_*$ ,  $w_*$ ,  $k_*$ 라 하면, 식 (3.12)은 다음 식으로 요약된다.

$$N_* = J_1 w_* \quad (3.13)$$

이 식을 식(3.9)-(3.11)에 대입하면

$$f(x_*, \lambda_0 + k_* J_1 w_*) = 0 \quad (3.14)$$

$$f_x^T|_{(x_*, \lambda_0 + k_* J_1 w_*)} w_* = 0 \quad (3.15)$$

$$\|w_*\|_2 = 1 \quad (3.16)$$

따라서 Dobson에 의해 제안된 직접법이  $3n+1$ 의 비선형방정식을 풀어야 하는데 반하여, 본 연구에서 제안된 직접법은 반복법과 같이  $2n+1$ 의 방정식만을 풀면 되므로 계산량이 현저하게 줄어드는 장점이 있다.

SNB를 계산하는 직접법처럼 초기치가 부정확하면 발산할 가능성이 있어 비교적 정확한 초기치를 필요로 하는데, 이 초기치는 반복법을 수행하여 얻는다. 본 논문에서 제안된 직접법은 반복법과 그 구조가 동일하므로 서로 호환성을 갖는 장점이 있다.

## 4. 사례연구

이 절에서는 앞에서 기술한 반복법과 직접법을 사용하여 New England 30-모선의 CSNB를 계산한 결과를 기술한다.

### 4.1. 5-모선 계통

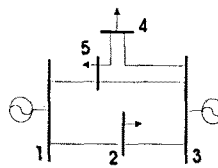


그림 4. 5모선 계통.

표 1. 선로데이터

from	to	G(p.u.)	B(p.u.)
1	2	1.40056	-5.60224
1	5	1.84118	-7.48352
2	3	1.84118	-7.48352
3	4	0.70028	-2.80112
3	5	1.12985	-4.47675
4	5	0.93372	-3.43483

#### 4.1.1. 반복법

그림 4는 Dobson등이 CSNB계산에 사용한 5모선 계통도이고 표 1은 선로데이터이다[3]. 본 연구에서 제안한 알고리즘을 검증하기 위하여 동일한 조건에서 제안된 알고리즘을 수행하고 그 특성을 비교하였다. 표 2는 CSNB에서의 결과의 요약이다.

표 2. 5-모선 계통의 CSNB계산 결과 요약

	$P_2(a_3)$	$P_2(a_2)$	$P_4(a_4)$	$P_5(a_5)$	$Q_2(V_2)$	$Q_4(V_4)$	$Q_5(V_5)$
$w_0$	0.4851	0.3513	0.7160	0.3570	0.0055	-0.0326	0.0074
$w_*$	0.0157	0.0094	0.5214	0.0550	0.0009	0.8384	0.1477
$\lambda_0$	-1.100	1.1500	0.7000	0.7000	0.6000	0.3000	0.4000
$\lambda_*$	-1.100	1.1585	1.1664	0.7492	0.6008	1.0493	0.5320
$(x_0)$	-0.055	-0.104	-0.176	-0.092	0.9603	0.9153	0.9681
$(x_*)$	-0.167	-0.162	-0.433	-0.159	0.9567	0.5253	0.8524

표 2에서 빗금친 영역은 CSNB에서의 좌고유벡터( $w_*$ )와 전압 크기/위상각( $x_*$ ), 유효/무효전력을 가르킨다.

최단 전압붕괴임계점까지의 거리는

$$k = |\lambda_1 - \lambda_0| = 0.89376 \text{ pu}$$

이것 연립방정식을 푸는 횟수는 총 23회이다.

#### 4.1.2. 개선된 직접법 사용

반복법을 2회 수행한 결과를 직접법의 초기치로 이용하는 것이 가장 효과적인은 문헌[8]에서 이미 보인 바 있다.

직접법을 사용한 결과 CSNB에서의 좌고유벡터의 모든 요소는  $2 \times 10^{-4}$ 의 범위내에서 수렴하였다. 비선형방정식을 푸는 횟수는 16회(반복법:11회, 직접법:5회)로 반복법의 약 절반의 시간만이 소요됐다. 초기치를 얻기 위해 소요된 시간이 직접법에 소요된 시간보다 약 2배 정도이고 따라서 신뢰성 있는 초기치를 신속하게 구할 수 있는 알고리즘 개발이 직접법의 수렴속도 개선에 가장 중요한 요소를 알 수 있다.

### 4.2. New England 30-모선계통

New England 30-모선계통은 원래 미소신호안정도 해석용으로 개발된 10기 39모선의 시험계통이나 전압안정도 해석을 위해, 발전기 단자에서의 모선을 제거한 것으로 많은 문헌에서 널리 사용되는 계통이다.

기저부하에서 총 부하량은 6150.5MW, 1208.9 MVA이고 표 3에 반복법을 수행한 결과를 요약했다.

표 3. New England 30-모선계통의 반복법 사용결과 요약

반복 횟수	임계점까지 거리 ( $k_i$ )	총 부하량	반복 횟수	임계점까지 거리 ( $k_i$ )	총 부하량
1	2651.774	19473.59MW	3	649.253	10771.12MW
2	650.769	10833.44MW	4	649.250	10769.69MW

계통에 부하를 증가시키는 초기방향으로는 기저부하에서 각 모선의 부하전력과 발전기 유효전력을 균일하게 증가하는 방향을 취하고, 모든 발전기의 유효전력도 균등하게 증가시켜 부하의 증가를 보상한다. 초기 부하증가 방향을 균등분배로 하면 임계점의 총 부하량은 기저부하로부터 약 13323.49 MW 증가한 19473.59 MW이다. 또한 임계점까지의 거리는 2651.744 MVA이다. 반면 CSNB에서의 총부하량은 기저부하에서 약 4620.18 MW 증가한 10,769.69 MW로 부하증가방향을 균등분배 방향으로 취한 경우보다 약 8703.3 MW 적은 마진이 계산되었다.

반복법과 직접법을 사용한 경우 CSNB에서의 전압을 비교한다. 두 방법 모두 거의 동일한 CSNB 점을 얻을 수 있고, 반복법을 사용한 경우 비선형방정식을 푸는 횟수가 28회인데 비해 직접법은 22회(반복법:16회, 직접법: 6회)로 계산량이 줄어들었다. New England 계통은 경부하계통이므로 부하증가방향을 수정할 때까지 비선형방정식을 푸는 횟수가 비교적 많았다.

### 5. 결론

본 논문은 Dobson에 의해 제안된 최단전압붕괴임계점(CSNB)를 계산하는 직접법을 개선하였다.

CSNB를 계산하기 위한 Dobson의 직접법에서는 조류계산식 방정식 수를  $n$ 이라 하면  $3n+1$ 개의 비선형방정식을 풀어야 하는 부담이 있었다. 본 연구에서는 CSNB에서 부하증가방향은 좌고유벡터와 평행하다는 조건을 이용하여 PoC법과 동일한  $2n+1$  개의 방정식을 풀

어 CSNB를 계산할 수 있다는 것을 보여 직접법의 효율성을 제고하였다. 또한 이로 인하여 제안된 직접법에서는, 반복법과 직접법으로서 호환성을 유지하는 장점이 있다.

반복법과 직접법에서 필요한 Hessian행렬의 구조가 Jacobian 행렬의 구조와 동일하여 스퍼서티 기법의 사용이 가능하여 간단히 사용하는 법을 제시하였다.

제안된 CSNB를 계산하는 개선된 직접법 알고리즘을 5모선계통, New England 30-모선등에 적용하여 알고리즘의 정확성을 확인했다.

### 참고문헌

- [1] I. Dobson, "Observations on the geometry of saddle node bifurcation and voltage collapse in electric power system," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 39, pp.240-243, Mar. 1992.
- [2] I. Dobson, "Computing an optimal direction in control space to avoid saddle node bifurcation and voltage collapse in electric power systems," *IEEE Trans. on Automatic control*, vol.37, pp. 1616-1620, Oct. 1992.
- [3] I. Dobson, "New methods for computing a closest saddle node bifurcation and worst case load power margin for voltage collapse," *IEEE Trans. on Power systems*, vol. 8, pp. 905-913, Aug. 1993.
- [4] J. Lu, C. Liu, J.S. Thorp, "New Method for Computing a Saddle-Node Bifurcation Point for Voltage Stability Analysis," *IEEE PES Summer Meeting Proc.*, 94SM514-0 PWRs, July. 1994.
- [5] F.L. Alvarado and T.H. Jung, "Direct detection of voltage collapse conditions," *Proc. of Bulk power system voltage phenomena Missouri*, Sept. 1989.
- [6] E. Capeneto, G. Chicco, R. Napoli, and F. Piglion, "A Newton-Raphson Method for Steady-state Voltage Stability Assessment," *Proc. of Bulk Power System Voltage Phenomena II*, Aug. 1991.
- [7] P. Kundur, *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1994.
- [8] 송 충기, 남 해곤, "최단 전압붕괴 임계점을 계산하는 알고리즘의 특성 비교", *대한전기학회 하계학술대회 논문집*, pp. 1078-1082, 1997.