

Cu-Al 전도체에서의 홀손실과 자기저항에 관한 연구

김상걸*, 정일형*, 김진사*, 이준웅*

*: 광운대학교 전기공학과

A Study on the Hall losses and Magnetoresistance in Cu-Al Composite Conductor

Sang-Keol Kim*, Il-Hyung Jung*, Jin-Sa Kim*, Joon-Ung Lee*

*: Dept. of Electrical Eng., Kwangwoon Univ.

Abstract - An anomalous magnetoresistance effect has been observed at very low temperatures for composite normal metal conductors. This anomalous behavior is due to transverse Hall currents in the composite which would result in increased I^2R losses and a higher effective resistance for the composite conductor. In this paper, transverse current flow and effective resistance of Cu-Al double-strip was analyzed using finite element method for predicting the Hall losses to be resulted in anomalous magnetoresistance effect, and then be able to visualized.

1. 서론

최근 극저온 전도체에서 수직 홀전류를 예측하기 위한 수치해석법이 개발, 평가되고 있다. 이에 따라 제법 및 구조가 간단한 일반 금속 전도체의 이상자기저항에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.¹⁾²⁾ 그 첫번째 연구는 고저항 Al-Fe-Ce 합금자켓으로 둘러싸인 고순도 알루미늄 코어로 이루어진 사각 전도체에 대하여 이루어졌다. 자계가 걸리지 않는 상태에서의 저항값은 고저항 자켓으로 둘러싸인 고순도 코어의 예상 저항값과 일치하였다. 그러나 자계가 걸린 상태에서의 저항은 단순한 병렬회로 모델에 의한 예측과는 달리 예상값을 크게 초과했을 뿐만 아니라, 커다란 선형적 증가를 나타냈다. 이런 거동은 합성체에서 I^2R 손실의 증가와 더 높은 유효저항을 가져오는 합성체내 수직 홀전류에 기인한다고 제안되었다.

본 논문에서는 Al-Fe-Ce 합금자켓과 고순도 알루미늄 코어 전도체보다 더욱 안정화된 Cu-Al 전도체에 대하여 이상자기 저항 현상의 원인이라고 생각할 수 있는 홀효과에 의한 손실을 유한요소법을 사용하여 해석하였다.

홀전류에 대한 해석 및 유효저항의 예측은 변분법과 유한요소법에 의하여 행해졌으며, 전도체는 Kaneko³⁾씨가 제안했던 매우 간단한 Cu-Al 이중구조를 적용하여 수직전류 흐름과 유효저항을 분석하였고, 이를 도시화 하였다.

2. 홀 메커니즘 해석

2-1. 유효효과에 의한 전압과 전류의 관계

정상상태에서 수직 홀메커니즘을 지배하는 방정식은

$$\nabla \times E = 0 \text{ 와 } \nabla \cdot J = 0 \quad (1)$$

이며, 전계와 전류의 관계는 $J = \sigma E$ 로 나타낼 수 있다. 도전율 σ 는 다음에 주어지는 저항률 ρ 의 역수와 같다.

$$\sigma^{-1} = \rho = \begin{bmatrix} \rho_{\perp} & 0 & \rho_h \\ 0 & \rho_{\parallel} & 0 \\ -\rho_h & 0 & \rho_{\perp} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기에서 자계 B는 외부로부터 인가되었고, 자계는 양의 y 방향이다. ρ_{\parallel} 와 ρ_{\perp} 는 자계에 평행 및 수직인 저항률이다.

z 축을 전도체의 축으로 하면, $\nabla \times E = 0$ 이 되고 E_z 는 x-y 평면 전체에 대해 균일하게 된다. 전도체는 매우 긴 것으로 가정하였고, 전류밀도와 저항률은 전도체 길이에 따른 위치에 대해 변화되지 않는다.

또한 $\nabla \times E = 0$ 이므로 E는 스칼라 포텐셜의 변화도로 표현될 수 있다 (즉, $E = -\nabla U$). 이것을 $\nabla \cdot J = 0$ 에 대입하면 포텐셜이 만족되는 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_{\perp}}{\rho_h^2 + \rho_{\perp}^2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_{\parallel}} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_h}{\rho_h^2 + \rho_{\perp}^2} E_z \right) \quad (3)$$

2-2. 변분법에 의한 해석

변분법은 그림 1에 보인 구조들의 전도체에 대한 식 (3)을 푸는데 이용되었다. 이 경우에 저항률과 홀계수는 두 영역내에서 균일하다. 따라서 식 (3)은 다음식으로 다시 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\rho_h^2 + \rho_{\perp}^2}{\rho_{\parallel} \rho_{\perp}} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

U는 물질사이의 경계와 외부 경계조건에 영향을 받기 쉽다. 이 식은 직각좌표계에서 분리될 수 있고, 분리된 해는 일반해를 만들기 위한 결과로 이용될 수 있다. 포텐셜 U는 두 영역에 대하여 각각 다음식으로 표현될 수 있다.

$$U^{(C)} = \sum_n a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{2D} \right) \cosh \left(\frac{n\pi(y-u)}{2D_g^{(C)}} \right) - \frac{\rho_h^{(C)}}{\rho_{\perp}^{(C)}} E_z x \quad (5)$$

$$U^{(A)} = \sum_n a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{2D} \right) \cosh \left(\frac{n\pi(y+l)}{2D_g^{(A)}} \right) - \frac{\rho_h^{(A)}}{\rho_{\perp}^{(A)}} E_z x \quad (6)$$

여기에서 a_n 과 c_n 은 상부와 하부 균질 영역사이의 경계에서 J_n 과 E_n 의 연속조건을 만족시키기 위해 이용되었다. 이틀 식에서 x-y 축의 기준은 전도체 중심을 x 축과 y 축의 영점으로 취하였다.

u 와 l 은 각각 Cu 와 Al 의 높이를 나타내고, D 는 전도체의 1/2-폭이다. $g^{(Cu)}$ 와 $g^{(Al)}$ 은 식 (4)에서 y 에 대한 도함수의 계수이며 다음식으로 주어진다.

$$g = \frac{\rho_h^2 + \rho_l^2}{\rho_{ll}\rho_{ll}} \quad (7)$$

이 g 는 Cu 와 Al 에 대하여 각각 다른 값을 갖는다.

결과적으로 전계는 위치좌표에 대한 미분방정식인 식 (5), (6)에 의해 얻어진다.

2-3 유효요소법에 의한 해석

지금까지는 자계가 y 축과 일치한 경우가 적용되었지만, 실제로는 자계가 y 축에 일치하지 않는 경우가 일반적이다. 이 경우에 $J-E$ 관계는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기에서

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\rho_{ll}} \sin^2 \phi + \sigma_1 \cos^2 \phi, \quad \sigma_{12} = \left(\sigma_1 - \frac{1}{\rho_{ll}} \right) \sin \phi \cos \phi,$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\rho_{ll}} \cos^2 \phi + \sigma_1 \sin^2 \phi, \quad \sigma_{13} = \frac{\rho_l}{\rho_l^2 + \rho_h^2},$$

$$\sigma_{33} = -\frac{\rho_h \cos \phi}{\rho_l^2 + \rho_h^2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\rho_h \sin \phi}{\rho_l^2 + \rho_h^2}$$

그리고 ϕ 는 인가된 자계와 양의 y 축 사이에서 z 에 대해 반시계방향의 각이다.

일반적으로 유효요소법은 전체분포를 얻기 위하여 변분법에 의존한다. 그것은 문제 영역에 대하여 정의된 에너지 함수를 최소화 하는데 기초를 둔다. 2 차원 홀 전도 문제에 대한 에너지 함수는 스칼라 포텐셜에 대한 정자장의 경우에 대해서 직접 유추되었으며, 전도인 경우에 에너지 함수는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$F(U) = \int \int \frac{1}{2} (\sigma_{11} E_x^2 + 2\sigma_{12} E_x E_y + \sigma_{22} E_y^2 + 2(\sigma_{13} E_x E_z + \sigma_{23} E_y E_z)) dA \quad (9)$$

여기에서 σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} 와 σ_{33} 는 위에서 정의되었고, E_x 와 E_y 는 x-y 평면에 대하여 수평 전계성분이고, E_z 는 x-y 평면에 대하여 인가된 수직 전계이다.

3. 시뮬레이션

본 논문에서는 먼저 홀 메커니즘을 지배하는 방정식으로부터 포텐셜을 만족시키는 에너지 함수를 변분법과 유효요소법으로 해석하였다. 그리고 자계의 변화에 따른 전도체내 수직전류 흐름과 전류밀도 분포를 다음과 같은 과정을 거쳐 시뮬레이션하였다.

- 1) 해석영역의 분할 2) 물질 특성값 대입 (저항률 대입)

- 3) 해석대상의 특성 4) 다원연립방정식 계산

- 5) Post-Processing (전류밀도, 전류흐름)

4. 시뮬레이션 결과 및 고찰

4-1. Cu-Al 이중구조 전도체의 수직전류 해석

표 1 은 4.2[K]에서 이중구조 전도체 해석에 사용된 Cu 와 Al 의 파라미터를 나타낸다.

그림 2, 4 및 그림 6 은 온도 4.2[K]에서 Cu-Al 이중구조 전도체에 1, 5 및 10[T]의 자계가 인가되었을 때 이 단면을 통과하는 수직전류 J_z 의 흐름을 유효요소해석을 통하여 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이, 자계에 의하여 발생된 홀효과에 의해 전류흐름이 Al 층에서는 우에서 좌로, Cu 층에서는 좌에서 우로 흐르게 되고, 전체적으로는 나선형 태로 순환된다. Cu 와 Al 의 경계면 양끝부분에 전류가 집중되는 것으로 나타났고, 또한 전류가 집중되는 정도도 자계가 증가함에 따라 심화되는 것으로 나타났다.

그림 3, 5 및 그림 7 은 Cu-Al 이중구조 전도체의 수직 전류 밀도 분포를 3 차원으로 도시화 한 것이다. 자계의 세기에 따른 전류밀도의 변화는 결국 유효저항률과 직접적인 관계가 있다.

그림에 나타난 전류밀도 분포를 살펴보면 자계가 1, 5 및 10[T]로 증가함에 따라 수직전류밀도는 선형적으로 증가함을 알 수 있으며, 이것은 결국 자계의 증가에 따라 유효저항률이 증가되어 전력손실에 크게 영향을 미친다는 것을 증명한다.

5. 결론

본 논문은 자계의 영향을 받는 전도체에서 홀전류를 모델링하기 위한 정확한 수치법을 개발하고, 시험적용하는 것이다. 이를 위해 앞에서 언급된 구조에 대하여 유효요소법을 사용하여 해석한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

- 1) 유효저항률의 계산과 Kaneko 씨의 측정결과와의 비교에서 유효요소법에 의한 홀손실 해석이 합리적임을 알 수 있었다.
- 2) 극저온에서 Cu-Al 전도체에 나타난 자기이상저항 현상은 자계의 증가에 따른 유효저항률의 크고 선형적인 증가에 기인한다는 것을 알 수 있었다.
- 3) 유효저항률 증가의 주요한 원인으로는 자계의 인가에 따른 수직 홀전류의 생성에 있다는 것을 알 수 있었다.
- 4) 홀효과에 의한 수직전류의 흐름 및 전류밀도의 양상을 시각화 할 수 있기 때문에 전도체 형상을 개선할 수 있을 것으로 사료된다.

참고 문헌

1. M.P. Krefta, O.R. Christianson and J.H. Parker, Jr., "Steady-state Hall losses in composite cryogenic conductors", *Cryogenics*, Vol.36, No.4, pp.291-301, (1996)
2. John R. Brauer, Jeffrey J. Ruehl, Bruce E. MacNeal and Franz Hirtenfelder, "Finite Element Analysis of Hall Effect and

Magnetoresistance", IEEE Trans. on Electron Devices, Vol.42, No.2, pp.328-333, (1995)

3. B. Krevet and W. Schauer, "Transverse magnetoresistance and its temperature dependence for high polycrystalline aluminium", Jpn Appl Phys, Vol.47, pp.3656, (1976)
4. H. Kaneko and N. Yangai, "Enhancement of magnetoresistance due to Hall current in aluminium-copper composites", Cryogenics, Vol.32, pp.1114, (1992)
5. 電気學會通信教育會, "基礎センサ工学", 日本電気學會, pp.99-114, (1990)
6. M.V.K. Chari and P.P. Silverster, "Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems", John Wiley & Sons, pp. 90-96, (1980)

표 1. 4.2[K]에서 이중구조 전도체 해석에 사용된 Cu 와 Al 의 파라미터

	자계 [T]	홀계수 [$\Omega m T^{-1}$]	저항률 [Ωm]
Al	1	1×10^{-10}	6.336×10^{-11}
	5	1×10^{-10}	8.464×10^{-11}
	10	1×10^{-10}	1.007×10^{-10}
Cu	1	-0.5×10^{-10}	1.978×10^{-10}
	5	-0.5×10^{-10}	3.930×10^{-10}
	10	-0.5×10^{-10}	6.228×10^{-10}

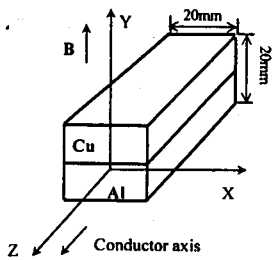


그림 1. 전도체 형상과 축배열

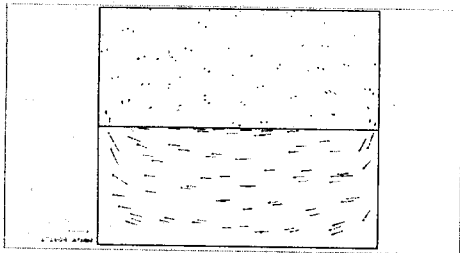


그림 2. 자계 1[T]에서 Cu-Al 이중구조 전도체의 수치전류 흐름

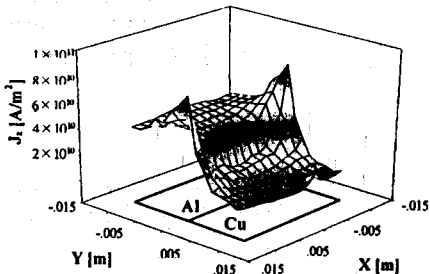


그림 3. 자계 1[T]에서 Cu-Al 이중구조 전도체의 수치 전류밀도 분포

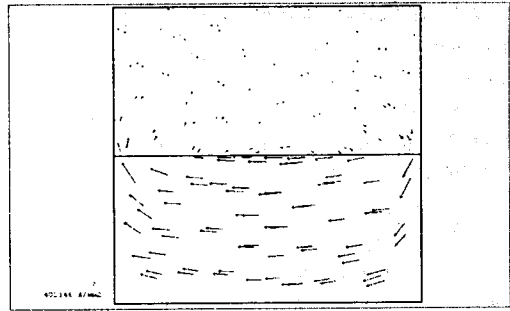


그림 4. 자계 5[T]에서 Cu-Al 이중구조 전도체의 수치전류 흐름

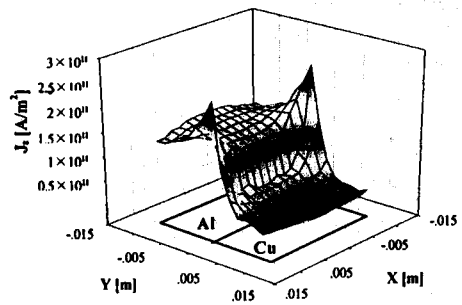


그림 5. 자계 5[T]에서 Cu-Al 이중구조 전도체의 수치 전류밀도 분포

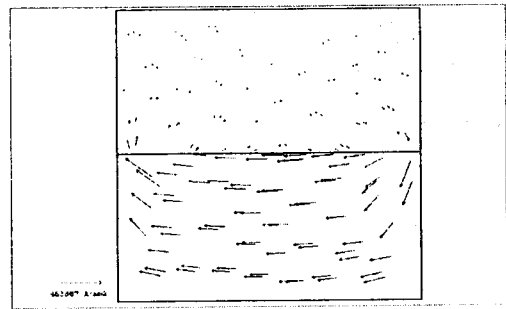


그림 6. 자계 10[T]에서 Cu-Al 이중구조 전도체의 수치전류 흐름

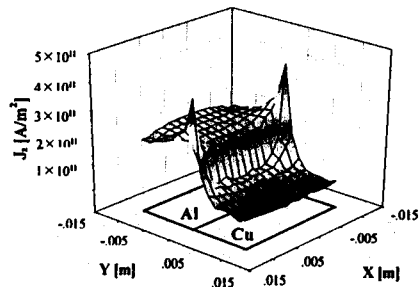


그림 7. 자계 10[T]에서 Cu-Al 이중구조 전도체의 수치 전류밀도 분포