

일반화 관측기의 구조 및 노이즈 억제 특성에 관한 연구

김환성 · 이충환* · 김상봉**

부경대학교 해양산업개발연구소, *부경대학교 대학원, **부경대학교 기계·자동차공학부

A Study on Generalized Observer Structure and its Characteristic of Noise Reduction

Hwan Seong KIM, Chung Hwan LEE*, and Sang Bong KIM**

RCOID of Pukyong Nat'l Univ., *Graduate School of Pukyong Nat'l Univ., and

**School of Mechanical and Automotive, Pukyong Nat'l Univ.

Abstract - This paper present a generalized observer and its existence condition. The observer can be estimated the states of system even if an external noise is added to the system's output. From a numerical example, we show that the proposed observer does not affected by a step or a sinusoidal noise.

수 있는 일반화 관측기 기법을 제안한다. 이 경우 외부 노이즈 및 외란에 대한 모델을 이용하는 방법으로, 외부에서 가해지는 특성을 소거하여 실제 상태를 추정하는 기법이다. 본 관측기 설계조건은 시스템의 가관측성으로 주어지며, 스텝 및 정현파 노이즈를 고려한 시뮬레이션으로 그 유효성을 확인하였다.

1. 서 론

관측기는 제어기 설계와 함께 시스템 제어시 중요한 역할을 하고 있다. 제어계 설계시, 특정한 센서를 통하여 얻은 정보만을 이용하는 경우는 실제 시스템의 특성을 맞추어 제어를 행할 수 없으므로, 이러한 경우는 관측기를 이용하여 시스템의 상태를 관측하여 제어를 행하고 있다^[1]. 또한, 시스템의 상태를 직접적으로 측정할 수 없는 경우, 즉, 센서를 부착할 수 없는 경우 및 시스템의 상태를 측정할 수 있는 센서가 없는 경우 등에 관측기법이 유용하게 이용되기도 하며, 이를 시스템의 고장 진단에 응용하기도 한다^[2].

그러나, 종래의 관측기 설계의 경우는 외부의 노이즈의 영향 혹은 시스템의 변동 및 외란의 변동에 대한 영향을 고려하고 있지 않으므로, 실제 관측기를 이용한 추정치를 사용하기는 곤란한 문제를 지니고 있다. 이러한 문제에 대해서 미지입력 관측기^[3], PI 관측기^[4,5] 및 외란 관측기^[1] 등이 이용되어 저주파 영역의 외란 및 노이즈 제거에 효과적임을 보이고 있으나, 특정한 영역에서 만의 관측기의 성능을 보장하기는 어렵다. 또한, 최근 H_∞ 제어이론을 이용한 관측기병합계 설계방법^[6]이 제안되고 있으나, 설계조건이 극히 제한되어 있고, 게인이 지나치게 커져 실제 응용 면에서 효과적이라고 할 수 없다.

본 연구에서는 외부의 노이즈 및 외란 모델을 고려하여 특정한 영역에서의 관측성능을 극대화시킬

2. 일반화 관측기의 구조

다음의 선형 이산 시스템을 고려하자.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (1b)$$

여기서, (A, C) 는 가관측이며, $x \in R^n$, $y \in R^p$, $u \in R^m$ 이다.

다음의 시스템을 고려하자.

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K\zeta(k) + H\epsilon(k) \quad (2a)$$

$$\zeta(k+1) = N\zeta(k) + M\epsilon(k) \quad (2b)$$

$$\epsilon(k) = y(k) - C\hat{x}(k) \quad (2c)$$

(1)식에 대해 (2)식이 일반화 관측기로 되기 위해서는 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{x(k) - \hat{x}(k)\} = 0 \quad (3a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k) = 0 \quad (3b)$$

위의 (1)식에 대해서 (2)식이 일반화 관측기로 성립될 충분조건은 다음의 정리와 같이 주어진다.

[정리 1] (1)식에 대해 (2)식이 일반화 관측기로 성립할 충분조건은

$$\lambda_i \begin{bmatrix} A-HC & -K \\ MC & N \end{bmatrix} \leq \text{unit circle}, \quad (4)$$

이다.

[증명] (1)식과 (2)식에 대해 다음의 오차함수를 정의하자.

$$e_x(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (5)$$

(1), (2)식과 (5)식을 이용하면

$$\begin{aligned} e_x(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ &= (A-HC)e_x(k) - K\zeta(k) \end{aligned} \quad (6)$$

로 되며, (2b)식으로부터 확대계를 구성하면

$$\begin{bmatrix} e_x(k+1) \\ \zeta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-HC & -K \\ MC & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \zeta(k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

로 된다. 따라서 (4)식이 성립하면 $k \rightarrow \infty$ 일 때, $e_x(k), \zeta(k)$ 는 영이 되어 (3)식이 만족되므로 (2)식은 (1)식에 대한 관측기로 성립됨을 알 수 있다. [증명끝]

위의 일반화 관측기 (2)식에서 $M=N=I$ 로 하여 정리하면

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K\zeta(k) + He \quad (8a)$$

$$\zeta(k+1) = \zeta(k) + \epsilon(k) \quad (8b)$$

$$\epsilon(k) = y(k) - C\hat{x}(k) \quad (8c)$$

로 되어 일반적인 PI 관측기⁽⁴⁾가 됨을 알 수 있다.

3. 일반화 관측기 특징

(1)식의 선형 이산 시스템에 대해서 노이즈가 포함된 형태의 시스템을 고려하자.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (9a)$$

$$y(k) = Cx(k) + \delta(k) \quad (9b)$$

여기서 $\delta \in R^p$ 는 출력에 영향을 미치는 노이즈 성분으로서 다음과 같은 차분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$P(q^{-1})\delta(k) = \delta(k) \quad (10)$$

여기서 q^{-1} 는 $q^{-1}\delta(k) = \delta(k-1)$ 을 의미하는 shift

operator 이며 $P(q^{-1})$ 는 q^{-1} 의 다항식으로서 다음과 같이 주어진다.

$$P(q^{-1}) = q^r + a_{r-1}q^{r-1} + \dots + a_1 \quad (11)$$

(2c)식과 (9)식으로부터 출력오차함수를 구해보면 다음과 같이 나타낸다.

$$\epsilon(k) = Ce_x(k) - \delta(k) \quad (12)$$

윗식에 $P(q^{-1})$ 를 작용시켜 (10)식의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} \epsilon(k+r) &= -a_{r-1}\epsilon(k+r-1) - \dots - a_1 \\ &\quad - a_0\epsilon(k) + CP(q^{-1})e_x(k) \end{aligned} \quad (13)$$

로 되며, 윗식을 상태방정식으로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\xi(k+1) = N\xi(k) + MCP(q^{-1})e_x(k) \quad (14)$$

단,

$$\xi(k) = [\epsilon(k) \ \epsilon(k+1) \ \dots \ \epsilon(k+r-1)]$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_r \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

로 된다.

(12)식 출력오차함수를 이용하여 관측오차를 구하면

$$e_x(k+1) = (A-HC)e_x(k) - K\zeta(k) - H\delta \quad (15)$$

로 되며, 윗식에 $P(q^{-1})$ 를 작용시켜 (10)식의 관계를 이용하면 다음과 같이 된다.

$$P(q^{-1})e_x(k+1) = (A-HC)P(q^{-1})e_x(k) - KP(q^{-1})\zeta(k) \quad (16)$$

변수 $\xi(k)$ 와 $\zeta(k)$ 사이에는 (2b)식과 (14)식에 의해 다음의 관계에 있으므로

$$\xi(k) = P(q^{-1})\zeta(k) \quad (17)$$

위의 관계를 이용하면 (16)식은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$P(q^{-1})e_x(k+1) = (A - HC)P(q^{-1})e_x(k) - K\xi \quad (18)$$

(14)식과 (18)식으로 확대계를 구성하면 다음과 같다.

$$x_e(k+1) = \begin{bmatrix} A - HC & -K \\ MC & N \end{bmatrix} x_e(k) \quad (19)$$

단,

$$x_e(k) = \begin{bmatrix} P(q^{-1})e_x(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix}$$

따라서, 정리1이 만족하도록 관측기 게인 K 와 H 를 설계하면 노이즈 δ 에 대해서도 영향을 받지 않는 관측기를 설계할 수 있다.

4. 일반화 관측기의 존재조건

본 절에서는 정리1을 만족하는 관측기 게인 K 와 H 의 존재조건에 대해 다루도록 한다. 먼저, 다음의 조건을 만족하는 행렬 P , Q 를 정의하자.

$$K = PQ, \quad Z = QM \quad (20)$$

여기서, $P \in R^{n \times p}$, $Q \in R^{r \times r}$ 이며, $\text{rank } Q = r$; (20)식을 이용하면 (4)식의 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - HC & -K \\ MC & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - HC & -P \\ ZC & QNQ^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & QNQ^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H \\ Z \end{bmatrix} [C \quad (21) \end{aligned}$$

위의 관계로부터 다음의 보조정리를 얻을 수 있다.

[보조정리 1] : $\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & QNQ^{-1} \end{bmatrix}$ 이 가관측이면 일반화 관측기 게인 K 와 H 는 존재한다. □

위의 보조정리1에서 $\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & QNQ^{-1} \end{bmatrix}$ 의 가관측은 다음의 rank 조건으로

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & P \\ 0 & sI - QNQ^{-1} \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p, \quad \forall s \quad (22)$$

로 되며, 모든 $s \in C$ 에 대해

$$\text{rank} [sI - QNQ^{-1}] = r \quad (23)$$

이므로 (22)식이 성립하기 위한 필요충분조건은

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in C \quad (24)$$

임을 알 수 있다. 여기서 C 는 복소평면을 나타낸다. 따라서 일반화 관측기의 존재조건은 다음의 정리로 요약할 수 있다.

[정리 2] : 시스템 (1)에 대해 일반화 관측기 (2)식이 존재할 필요충분조건은 (C, A) 가 가관측이다. □

5. 수치 예제

다음의 이산 시스템을 고려하자.

$$A_D = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0100 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9999 & 0.0099 \\ -0.099 & -0.029 & 0.9801 \end{bmatrix}, \quad C_D = [1 \quad 0 \quad 0]$$

샘플링주기는 0.01sec로 하며, 다음의 스텝과 정현파의 외부 노이즈를 고려하자. 스텝인 경우는

$$\delta(t) = 0.1, \quad P(q^{-1}) = q^{-1}$$

로 되며,

$$N = 1, \quad M = 0$$

으로 된다. 정현파의 경우는

$$\delta(t) = 0.2 \sin(2\pi t), \quad P(q^{-1}) = q^2 - 1.9961q - 0.0039$$

로 되어

$$N = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 \\ -1.000 & 1.9961 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

일반화 관측기 게인은 스텝 노이즈인 경우는

$$H = \begin{bmatrix} 0.8297 \\ -0.5081 \\ 2.7898 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이며, 정현파 노이즈인 경우는

$$H = \begin{bmatrix} 0.6430 \\ -0.867 \\ 1.4470 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.1146 \\ 0 & 0.0706 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

로 설계하였다. 실험의 비교를 위하여 High 게인 관측기를 설계하였으며, 관측기 게인은 최적설계법에 의하여

$$K_P = \begin{bmatrix} -1.0124 \\ -0.3791 \\ 2.9337 \end{bmatrix}$$

로 설계하였다.

시뮬레이션 결과, 스텝 노이즈인 경우 Fig. 1~2에 보이고, 정현파 노이즈인 경우 Fig. 3~4와 같이 보인다.

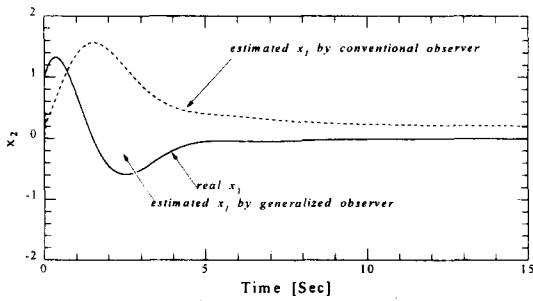


Fig. 1 Response of estimated state 2 with step noise

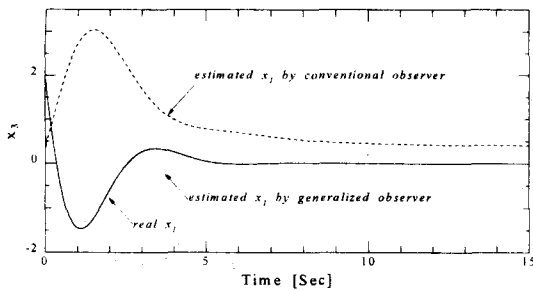


Fig. 2 Response of estimated state 3 with step noise

6. 결 론

본 논문에서는 일반화 관측기의 제안 및 관측기의 존재조건에 대해 다루었다. 일반화 관측기의 존재조건은 시스템의 가관측성에 의존하고 있으며, 일반화 관측기의 게인의 선정에 따라서 외부의 노이즈의 억제효과가 있음을 체계적으로 밝히고 구체적인 설계

법을 보였다. 더불어 시뮬레이션의 결과를 통하여 일반화 본 관측기의 유효성을 밝혔다.

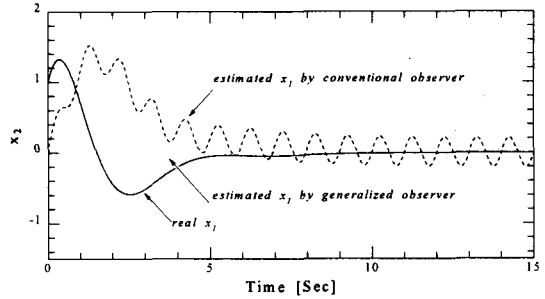


Fig. 3 Response of estimated state 2 with sinusoidal noise

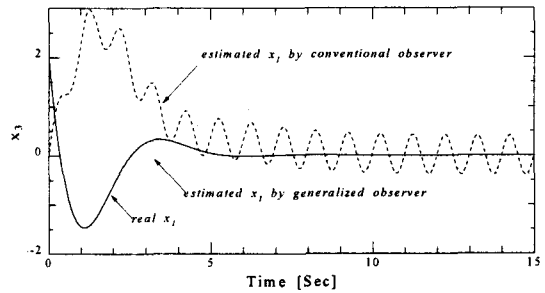


Fig. 4 Response of estimated state 3 with sinusoidal noise

(참 고 문 헌)

- [1] 川路 等, "オブザーバ", コロナ社, 1994
- [2] 김환성, 김상봉, 川路茂保, "비례적분 관측기를 이용한 시스템의 고장진단", 한국정밀공학회, 제14권, 제2호, pp. 41-47, 1997
- [3] S. Kawaji and H.S. Kim, "Full Order Observer for Linear Descriptor Systems with Unknown-Inputs", The 34th IEEE Conf. on Decision and Control, Louisiana, 1995
- [4] H.S. Kim, "Design of Robust Control System using Proportional Integral Observer", Ph.D. dissertation, Kumamoto Univ. Japan, 1996
- [5] H.S. Kim, S.B. Kim, and S. Kawaji, "Design of Pf Observer by using Eigenstructure Assignment", Proc. of the 2nd ASCC, 1997
- [6] J.B. Moore and T.T. Tay, "Loop Recovery via H_2/H_∞ Sensitivity Recovery", Int. J. Control, Vol. 49, pp. 1249-1271, 1989