비선형 시스템에 대한 반복 제어기

서원기, 이진수
포항공과 대학교 전자전기 공학과

Repetitive Control for a Class of Nonlinear Systems

Won G. Seo, J. S. Lee
Electrical Engineering Pohang University of Science and Technology

Abstract - 본 논문은 비선형 시스템에서 시스템의 출력이 원하는 궤적을 따라가도록 하기 위한 반복제어 이론을 소개한다. 본 논문에서는 전체 시스템의 안정화를 위해서 추적오차의 부호에 따라 부호가 결정되는 부호전환 제어(switching control) 입력을 사용하고 있다. 그러나 본 논문에서 사용하는 제어 입력은 크기가 추적오차의 크기에 비례하게 되어 있어서 정상상태에서 발생할 수 있는 고속의 부호전환 문제(chattering problem)를 크게 완화시켜서 정상상태에서의 성능을 개선시키고 있다. 또한, 오차가 어떤 범위를 벗어나 있으면 그 범위 안으로 지수적으로 수렴하여 그 안에 계속 머물도록 하는 제어 기법도 소개하였다.

1. 서 론

적응제어와 더불어 학습제어 또는 반복제어 이론에 대한 많은 연구 결과들이 발표되고 있다. 학습제어 이론은 주어진 일을 반복적으로 행하는 것을 목적으로 하는 시스템에 적용되는 제어이론으로서 로보틱스를 중심으로 발전해 오고 있다[1,3,5,6]. 반복제어는 학습제어의 특수한 경우로 반복되는 작업이 연속적으로 이루어지는 경우에 대하여 개발된 제어이론이다[2,4]. 시스템의 출력이 따라가기를 원하는 궤적이 주기적일 때에는 이러한 주기적인 특수 성질을 이용하여 보다 효과적인 제어기를 구현할 수가 있다. 일정한 형태의 작업을 반복적으로 행하기 때문에 시스템에 대한 적은 정보를 가지고도 주어진 일에 대해서만은 보다 나은 제어 성능을 보일 수 있도록 제어기를 설계할 수 있는 것이다. 그리고, 이러한 반복 제어기는 기존의 다른 제어기와 비교해 볼 때 이해하기 훨씬 쉽고, 실제의 구현 또한 간단하다. 본 논문에서는 비선형 시스템에 적용되는 새로운 반복제어 이론을 소개하고 있다. 제어기는 크게 부호전환 궤환 입력(switching feedback input), 학습 입력(learning input)으로 구성되어 있다. 전체 시스템의 안정화를 위하여 사용되는 부호전환 기법은 제어 입력의 크기가 기존의 방식과 다르게 추적오차에 비례하도록 되어있다. 기존의 방법은 추적 오차가 작아지는 정상상태에서 제어 입력이 일정한 크기를 가지고 부호가 고속으로 변하는 현상(chattering phenomena)이 큰 약점으로 나타나고 있다. 이 때문에 급격한 비연속 부호전환 함수를 보다 부드러운 함수로 대체하는 방법(boundary layer approach) 또는 시스템의 차수를 증가시켜서 부호의 변환작용이 제어 입력의 미분값에서 발생하게 하는 등의 다양한 노력[7]이 이루어지고 있다. 본 논문에서 제안하고 있는 방법은 시스템의 차수를 높이지 않고 기존의 기법보다 정상상태에서의 성능을 개선하고 있다. 이는 부호전환이 일어나는 제어 입력의 크기가 추적 오차에 비례하도록 설계되어있기 때문이다. 그리고 학습제어 입력에 있어서 추적 오차가 어느값을 넘으면 학습제어 입력은 학습기능을 멈추고, 오차를 주어진 범위 안에서 벗어나지 않도록 하는 다른 제어 입력을 전환하여 오차가 주어진 범위안으로의 지수적으로 수렴성하는 특성을 확보하였다. 또한, 이러한 제어 기법을 사용하면, 오차가 일단 주어진 범위 안으로 수렴하면 그때부터는 밖으로 나가지 않고 이 범위안에 머무르게 된다.

2. 본 론

2.1 시스템의 가정 및 수학적 정의

본 논문에서 다루는 비선형 시스템은 다음과 같다.

$$g(\boldsymbol{x}(t))x^{(n)}(t)+f(\boldsymbol{x}(t))=u(t) \tag{1}$$

여기서, $\boldsymbol{x}(t)=(x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))\in R^n$ 는 시스템의 상태함수를 나타내고, $x^{(n)}(t)$은 $x(t)$를 n번 미분한 것을 나타내며, f,g는 $f:R^n\to R$, $g:R^n\to R$를 만족한다. 많은 시스템들이 식 (1)과 같은 식으로 나타내어질 수 있다. 식 (1)을 $g(\boldsymbol{x}(t))$로 나누면

$$x^{(n)}(t)=p(\boldsymbol{x}(t))+q(\boldsymbol{x}(t))u(t)$$

과 같이 비선형 시스템에서 많이 사용되어지는 형태의 식으로 쉽게 표현될 수 있다. 논문의 간략함을 위하여 이제부터 내용의 이해에 혼란이 없을 경우에는 시간의 함수를 표현함에 있어서 $x(t)\to x$ 와 같이 변수인 t를 생략하여 표시하도록 하겠다. 논문의 내용을 전개하기에 앞서서 제어대상 시스템에 대하여 다음과 같은 가정을 하도록 한다.

가정 1. f,g는 모든 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in R^n$에 대하여 다음 식을 만족하는 $l_f,l_g>0$이 존재한다.

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x}_1)-f(\boldsymbol{x}_2)| &\le l_f|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|\\ |g(\boldsymbol{x}_1)-g(\boldsymbol{x}_2)| &\le l_g|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|\end{aligned} \tag{2}$$

가정 2. g는 모든 $\boldsymbol{x}\in R^n$에 대하여 다음을 만족한다.

$$0<g_l\le|g|\le g_u,\quad |\dot{g}(\boldsymbol{x})|\le\alpha_g(t), \tag{3}$$

여기서 $\alpha_g(t)\ge 0$.

가정 3. 시스템의 출력이 따라가기를 원하는 궤적 x_d는 T를 주기로 하는 주기함수이며, T는 알려져 있다.

가정 4. 식 (1)에 대하여 다음을 만족하는 $\boldsymbol{x}_d$와 u_d가 존재한다.

$$g(\boldsymbol{x}_d)x_d^{(n)}+f(\boldsymbol{x}_d)=u_d \tag{4}$$

그리고 u_d는 x가 x_d가 되도록 하는 가상의 제어 입력으로서 모든 $t\in[0,T]$에 대하여 $|u_d(t)|\le\overline{u_d}$를 만족하며, $\overline{u_d}$는 알려져 있다.

위의 **가정 2**는 많은 비선형 시스템이 만족하고 있는 성질로서 로봇 역학 방정식 또한 이를 만족하여 식 (3)을 만족하는 적당한 $\alpha_g(t)$을 구할 수 있다.

정의 1 시간의 함수에 대하여 L_p는 다음과 같이 정의된

다.

$$\|f(t)\|_p = \left(\int_0^\infty |f(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

여기서 $p \in [1, \infty)$이다. 반면에 $\|f\|_\infty$는

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\geq 0} |f(t)|$$

로 정의된다. 그리고 $\|f\|_p$ 가 존재하면 $f \in L_p$라고 표현한다.

다음으로 본 논문의 제어기법에 대한 분석에서 사용되어지는 보조정리를 소개한다.

보조정리 1 다음과 같은 선형 시불변 함수가 있다고 하자.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$
$$y = Cx$$

이때, 전달함수는 $P(s)$는

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

과 같이 주어지며, 전달함수 $P(s)$에 있어서 분모의 차수가 분자의 차수보다 크게 된다(strictly proper). 여기서, 만약 $P(s)$가 안정한 전달함수이고, $u(t)$가 L_2에 속하게 되면 $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$이다[8].

2.2 반복 제어기 설계 및 성능 분석

이 장에서는 시스템의 출력이 원하는 궤적을 따라가는 것을 목적으로 하는 반복 제어기를 제안한다. 식 (1)과 식 (4)를 통하여 다음 식을 유도할 수 있다.

$$g(\boldsymbol{x})e^{(n)} + \left(g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_d)\right)x_d^{(n)} + \left(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_d)\right) = u - u_d \tag{4}$$

여기서,

$$\bar{\boldsymbol{k}} = [k_{n-2}, \cdots, k_1, k_0]$$
$$\bar{\boldsymbol{e}} = [e^{(n-2)}, \cdots, \dot{e}, e]$$

라 정의되는데, $e = x - x_d$이다. 그리고, 새로운 오차 신호인 z를

$$z = e^{(n-1)} + \bar{\boldsymbol{k}}^T \bar{\boldsymbol{e}} \tag{5}$$

와 같이 정의하도록 하자. 식 (5)를 보면 z가 0으로 수렴하면 e 또한 0으로 수렴함을 알 수 있다. 식 (4)를 식 (5)를 이용하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x})\dot{z} &= g(\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{k}}^T\bar{\boldsymbol{e}} - (g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_d))x_d^{(n)} \\ &\quad - (f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_d)) + u - u_d \\ &= g(\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{k}}^T\bar{\boldsymbol{e}} - \tilde{g}x_d^{(n)} - \tilde{f} + u - u_d \end{aligned} \tag{6}$$

이제 식 (6)에 대하여 다음과 같은 제어기를 제안한다.

$$u = u_f + u_l$$

여기서

$$\begin{aligned} u_f(t) &= -\left(\frac{1}{2}\alpha(t) + k_l\, sign(z)\right)z(t), \\ u_l(t) &= \begin{cases} u_l(t-T) - \gamma z(t), & |z| < \varepsilon \\ -(k_a + k_s \overline{u_d}^2)z(t), & |z| \geq \varepsilon \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

이며, $k_l \geq g_u\|\bar{\boldsymbol{k}}\| + l_g|x_d^{(n)}| + l_f$, $k_a > 0$, $k_s > 0$를 만족한다. 그러면 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

정리 1 식 (6)에 식 (7)과 같은 제어기법을 사용하였을 때, 전체 시스템은 다음과 같은 특성을 갖는다.

▶ $z, \int_{t-T}^{t} \tilde{u}^2(\tau)d\tau \in L_\infty$

▶ $z \in L_2$

▶ z는 집합 $R_z = \left\{z : |z| \leq \sqrt{\frac{1}{g_l k_s}}\right\}$로 $\frac{k_a}{2g_u}$의 속도를 가지고 지수적으로 수렴하며, 집합 R_z로 수렴하면 R_z을 벗어나지 않는다.

▶ $\lim_{t\to\infty} e = 0$

proof : 먼저, $|z| \geq \varepsilon$인 경우를 살펴보도록 하자. 식 (7)에 따르면 이 경우에 u_l은 $u_l = -(k_a + k_s \overline{u_d}^2)z$와 같이 주어진다. 여기서, Lyapunov 함수 V_1을

$$V_1 = \frac{1}{2}g(\boldsymbol{x})z^2 \tag{8}$$

으로 잡고, 이를 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{2}\dot{g}(\boldsymbol{x})z^2 + zg(\boldsymbol{x})\dot{z} \\ &\leq \frac{1}{2}\alpha z^2 + z\big(g(\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{k}}^T\bar{e} - (g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}_d))x_d^{(n)} \\ &\quad - (f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_d)) + u - u_d\big) \end{aligned}$$

을 얻을 수 있고, 여기에 식 (2)와 식 (7)을 이용하면,

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &\leq \frac{1}{2}\alpha z^2 + |z|(g_u\|\bar{\boldsymbol{k}}\| + l_g|x_d^{(n)}| + l_f)\|\bar{\boldsymbol{e}}\| \\ &\quad + zu_f + z(u_l - u_d) \\ &\leq -k_a z^2 - k_s\overline{u_d}^2 z^2 + |z|\overline{u_d} \\ &= -k_a z^2 - k_s\left(|z|\overline{u_d} - \frac{1}{2k_s}\right)^2 + \frac{1}{4k_s} \\ &\leq -k_a z^2 + \frac{1}{4k_s} \end{aligned} \tag{9}$$

을 얻을 수 있다. 또한 식 (9)에서 **가정 2**와 식 (8)을 이용하면

$$-z^2 = -\frac{2}{g(\boldsymbol{x})}V_1 \leq -\frac{2}{g_u}V_1$$

을 알 수 있고, 이를 식 (9)에 적용하면

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &\leq -\frac{k_a}{2g_u}V_1 + \frac{1}{4k_s} \\ &= -\eta V_1 + \frac{1}{4k_s} \end{aligned} \tag{10}$$

을 얻는다. 여기서, $\eta = \frac{k_a}{2g_u}$이다. 이제 V_1과 z의 정확한 분석을 위하여 $V_1e^{\eta t}$를 살펴보도록 하자. $V_1e^{\eta t}$를 미분하고, 식 (10)을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V_1e^{\eta t}) &= \frac{d}{dt}(V_1)e^{\eta t} + \eta V_1e^{\eta t} \\ &\leq \left(-\eta V_1 + \frac{1}{4k_s}\right)e^{\eta t} + \eta V_1e^{\eta t} \\ &= e^{\eta t}\left(\frac{1}{4k_s}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

을 얻을 수 있고, 식 (11)의 양변을 $[0, T]$인 구간에서 적분을 하면

$$\begin{aligned} V_1e^{\eta t} &\leq V_1(0) + \int_0^t e^{\eta\tau}\left(\frac{1}{4k_s}\right)d\tau \\ &= V_1(0) + \frac{1}{4k_s}(e^{\eta t} - 1) \end{aligned} \tag{12}$$

이 됨을 알 수 있다. 그리고 다시 식 (12)의 양변을 $e^{-\eta t}$로 곱하여 정리하면

$$V_1 \le V_1(0)e^{-\eta t}+\frac{1}{4k_s}(1-e^{-\eta t}) \le V_1(0)e^{-\eta t}+\frac{1}{4k_s} \tag{13}$$

이 되어 V_1이 집합 $R_{V_1}=\left\{V_1: V_1 \le \frac{1}{4k_s}\right\}$로 지수적으로 수렴함을 확인할 수 있다. 또한

$$z^2 \le \frac{2}{g_l} V_1 \le \frac{2}{g_l}\left(V_1(0)e^{-\eta t}+\frac{1}{4k_s}\right) \tag{14}$$

이므로, $\sqrt{b^2+c^2} \le |b|+|c|$를 이용하면

$$|z| \le \sqrt{\frac{2}{g_l}V_1(0)e^{-\eta t}}+\sqrt{\frac{1}{2g_l k_s}} \tag{15}$$

가 되어 z가 집합 $R_z=\left\{z: |z| \le \sqrt{\frac{1}{2g_l k_s}}\right\}$로 지수적으로 수렴함을 알 수 있으며, 이때의 수렴속도는 $\eta=\frac{k_a}{2g_u}$임을 알 수 있다. 또한, 집합 R_z의 크기는 제어 변수인 k_s를 통하여 제어 입력에 제한이 없다면 원하는 만큼 작게 할 수 있음을 알 수 있다.

다음으로, $|z|<\epsilon$인 경우를 살펴보도록 하자. 이 경우에는 식 (7)에서 u_l이 $u_l=-\left(\frac{1}{2}\alpha+k_s sign(z)\right)z$로 주어짐을 알 수 있다. 여기서, Lyapunov 함수 V_2를 다음과 같이 잡으면

$$V_2=\frac{1}{2}g(\mathbf{x})z^2+\frac{1}{2\gamma}\int_{t-T}^{t}\widetilde{u}^2(\tau)d\tau \tag{16}$$

여기서 학습 오차인 $\widetilde{u}_l$는 $\widetilde{u}_l=u_l-u_a$와 같이 정의된다. 식 (16)의 V_2를 미분하고 식 (6)을 사용하면

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt}
&=\frac{1}{2}\dot{g}(\mathbf{x})z^2+zg(\mathbf{x})\dot{z}+\frac{1}{2\gamma}\left(\widetilde{u}_l^2(t)-\widetilde{u}_l^2(t-T)\right)\\
&\le \frac{1}{2}\alpha z^2+z\Big(g(\mathbf{x})\,\overline{\mathbf{k}}^T\mathbf{e}-(g(\mathbf{x})-g(\mathbf{x}_d))x_d^{(n)}\\
&\quad -(f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_d))+u-u_d\Big)\\
&\quad +\frac{1}{2\gamma}\left(\widetilde{u}_l^2(t)-\widetilde{u}_l^2(t-T)\right)\\
&\le z(u_l-u_d)++\frac{1}{2\gamma}\left(\widetilde{u}_l^2(t)-\widetilde{u}_l^2(t-T)\right)
\end{aligned} \tag{17}$$

이 된다. 그런데, 식 (7)에서 $\widetilde{u}(t-T)=\widetilde{u}(t)+\gamma z$를 확인할 수 있으므로

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} &\le z\widetilde{u}_l(t)-\frac{1}{2\gamma}(\gamma^2z^2+2\gamma\widetilde{u}_l(t)z)\\
&=-\frac{1}{2\gamma}z^2 \le 0
\end{aligned} \tag{18}$$

을 얻을 수 있다. 식 (18)은 V_2의 미분값이 0보다 작거나 같음을 보여주고 있으므로 모든 $t \ge 0$에 대하여 $V_2(t) \le V_2(0)$의 관계식을 얻을 수 있으며, 이는 다시 모든 $t \ge 0$에 대하여 $z, \int_{t-T}^{t}\widetilde{u}^2(\tau)d\tau \in L_\infty$를 보여주고 있다. 또한 식 (18)를 다시 쓰면

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\gamma}z^2 &\le -\int_0^t \frac{dV_2(\tau)}{d\tau}d\tau\\
&=-(V_2(t)-V_2(0))\\
&\le V_2(0)-V_2(\infty) \le V_2(0)
\end{aligned} \tag{19}$$

를 얻을 수 있고 이를 통하여 $z \in L_2$임을 알 수 있다. 식 (5)를 보면 출력 오차 e는 다음과 같이 z를 안정한 필터를 통과시켜 얻은 것과 같다.

$$e(s)=G(s)z(s) \tag{20}$$

여기서 $G(s)$는 극점이 $\overline{\mathbf{k}}$에 의하여 결정되는 안정한 필터이다. 따라서 **보조정리 1**을 이용하면 출력 오차는 점근적으로 안정함을 알 수 있다. 즉, 시간이 계속 지나면 출력 오차는 0으로 수렴하게 된다.▽▽▽

3. 결 론

본 논문에서는 몇 가지 가정을 만족하는 비선형 시스템에 대한 반복 제어기를 제안하였다. 본 논문에서는 오차 신호의 부호에 따라 부호가 불연속적으로 변하는 부호 전환 제어 입력을 사용하였다. 기존의 부호전환 제어기법에서는 정상상태에서 제어입력의 부호가 고속으로 변하는 현상(chattering phenomena)이 문제점으로 지적되었다. 그러나 본 논문에서는 이러한 부호변환 제어 입력의 크기가 출력 오차에 비례하게 설계되어 있다. 출력 오차가 클 경우에는 기존의 방식과 거의 비슷한 특성을 보이나, 출력 오차가 작아지는 정상상태에 있어서는 부호에 따라 전환되는 제어입력의 크기가 오차와 함께 작아져서 기존의 제어기법에 비하여 나은 성능을 보여준다. 또한, 오차가 특정한 범위 안에 있을 경우에는 학습 제어 기법을 적용하고, 범위 밖에 있을때는 학습을 멈추고 제어입력도 오차가 주어진 범위안으로 지수적으로 수렴하도록 하는 다른 제어기법으로 전환하게 하는 제어기법을 소개하였다. 이러한 기법은 주어진 범위 안으로 들어온 오차가 이 범위를 벗어나지 않도록 하는 특성이 있음을 확인하였다.

[참 고 문 헌]

[1] S. Arimoto, S. Kawamura and F. Miyasaki, "Bettering Operation of Robots by Learning," *J. Robotics Systems*, pp.123-140, 1984.

[2] N. Sadedh, R. Horowitz, W. Kao, and M. Tomizuka , "A Unified Approach to the Design of Adaptive and Repetitive Controllers for Robotic Manipulators," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol 112, pp.618-629, 1990.

[3] S. Arimoto, "Learning Control for Robotic Motion," *Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing*, vol. 4, pp.453-564, 1990.

[4] N. Sadegh, and K. Guglielmo, "A New Repetitive Controller for Mechanical Manipulators," *J. Robotics Systems*, pp.507-529, 1991.

[5] T. Y. Kuc, K. Nam, and J. S. Lee, "An Iterative Learning Control of Robot Manipulator," *IEEE Trans. Robotics Automation*, vol. 7, pp.835-841, 1991.

[6] T. Y. Kuc, J. S. Lee, and K. Nam, "An Iterative Learning Control Theory for a Class of Nonlinear Systems," *Automatica*, vol. 28, pp.1215-1221, 1992.

[7] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai, "Chattering Avoidance by Second-Order Sliding Mode Control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, pp.241-246, 1998.

[8] C. A. Desoer, and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*. New York: Academic Press, 1975.