Lyapunov 행렬방정식의 역해를 이용한 선형 이산시스템의 공분산제어

°김 호 찬 *　　최 종 호 **　　김 상 현 *
* 제주대학교 전기공학과　** 서울대학교 전기공학부

On covariance control theory for linear discrete systems via inverse solution of the Lyapunov matrix equation

° Ho-Chan Kim * Chong-Ho Choi ** Sang-Hyun Kim *
* Cheju National University ** Seoul National University

Abstract

In this paper, an alternate method for state-covariance assignment for SISO (single input single output) linear systems is proposed. This method is based on the inverse solution of the Lyapunov matrix equation and the resulting formulas are similar in structure to the formulas for pole placement. Further, the set of all assignable covariance matrices to a SISO linear system is also characterized.

Key words : State-covariance assignment, Lyapunov matrix equation

1. 서 론

제어시스템을 구성할 때 많이 사용하는 궤환제어 법칙으로는 극배치(pole placement) 방법이나 최적제어(optimal control) 방법 등이 있다. 극배치 (또는 고유값 배치(eigenvalue assignment)) 방법에서는 폐루프(closed loop) 시스템이 원하는 극점이나 고유값을 갖도록 궤환 행렬(feedback matrix)를 설계한다. 최적제어에서는 시스템에 주어진 성능지수(performance criteria)를 최소로하도록 궤환 행렬이 선택된다. 위의 방법들은 단지 전체적으로 제어시스템의 상태벡터가 원하는 성능을 발휘하도록 제어시스템을 설계하는 것이 목적이다. 따라서 각 상태벡터들의 초기 동작(transient behavior)들은 원하는 성능을 갖도록 제어하지 못하므로 실제 공정에 적용하는 경우에 많은 문제가 발생할 수 있다. 이러한 단점을 보완하는 상태공분산배치(state-covariance assignment) 방법이 Skelton 등 [1-3] 에 의해 제안되었다. 공분산배치 방법은 성능함수가 시스템 상태의 분산(variance) ($E(x_i^2)$)의 상한(upper bound)으로 정해지는 제어시스템에 상당히 유효한다. 이와 같은 예로서는 항공에 관련된 분야에서 많이 나타나는데, 다른 변수들의 분산이 어떤 정해진 한계내에서 유지하도록 하면서 시스템을 원하는 위치로 제어하는 경우등이다. 이 방법은 연속시간과 이산시간에서 MIMO 시스템에 적용할 수 있다. Sreeram [4,5]등은 SISO 시스템에서 상태공분산배치 방법을 Lyapunov 행렬 방정식의 역해(inverse solution)를 이용하여 설계하였다. 본 논문에서는 Sreeram의 연구결과보다 좀 더 체계적이고 간단하게 상태공분산배치 방법을 제안한다.

2. 이산시간 SISO 시스템에서의 공분산배치

본 절에서는 이산시간 시스템에서 상태공분산배치 방법을 간단히 살펴본다. 다음과 같은 선형 SISO 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + b(u(k) + v(k)) \\ v(k) &= -gx(k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서 $x(k) \in R^n$, $v(k) \in R$ 와 $y(k) \in R$ 은 각각 시스템의 상태(state), 궤환입력(feedback input)과 출력(output)을 나타낸다. 이때 $\{A, b\}$ 는 가제어(controllable)하다고 가정한다. $u(k)$ 가 평균이 0 이고 분산이 $W(>0) \in R$ 인 백색잡음(white noise)이라 가정하고, $u(k)$ 와 $x(0)$ 이 서로 비상관(uncorrelated)되었다면 상태벡터 x 의 안정상태(steady state) 공분산 X 는 $X = E[x(k)x(k)^T]$ 으로 주어진다. 상태공분산 제어에서는 다음과 같은 두가지 문제를 해결해야 한다.

(i) 폐루프 시스템이 상태공분산 행렬을 원하는 위치에 배치시키는 궤환 이득벡터를 찾아야 한다.

(ii) 선형 상태궤환에 의해 주어진 시스템을 원하는 위치에 배치시킬 수 있는 상태공분산 행렬들을 찾아야 한다.

위의 문제의 해가 존재하기 위한 필요조건은 $\{A, b\}$ 가 가제어한 경우이다. 그러나 이 조건은 충분조건은 아니다. 그리고 선형 상태궤환에 의해서는 공분산 행렬을 원하는 모든 값으로 배치시키지는 못한다. 그러므로 선형 상태 궤환에 의해 배치시킬 수 있는 상태공분산 행렬의 유형을 찾는 것이 필요하다.

선형 SISO 시스템이 (2.1)과 같이 주어지고 $\{A, b\}$ 가 가제어하다고 가정하면, 개루프(open loop) 시스템의 상태공분산 X 는 다음의

Lyapunov 행렬 방정식을 만족한다.

$$AXA^T - X = -bWb^T \qquad (2.2)$$

여기서 $W(>0)$ 는 평균이 0인 백색잡음의 분산을 나타내며 X 는 양한정행렬(positive definite) 이 된다. 선형 궤환 이득벡터 g 에 의해 이동시킬 수 있는 양한정 공분산 행렬을 $\overline{X}$ 라고 하면 폐루프 시스템의 상태공분산 $\overline{X}$ 는 다음의 Lyapunov 행렬 방정식을 만족한다.

$$(A-bg)\overline{X}(A-bg)^T - \overline{X} = -bWb^T \qquad (2.3)$$

이 문제를 해결하는 방법이 여러 가지 [2,4,6] 연구되었지만 본 연구에서는 새로운 방법을 제시한다. 만약 $\{A,b\}$ 가 가제어한 경우에는 $((A-bg),b)$ 역시 가제어하게 됨을 쉽게 알 수 있다. 일반적인 Lyapunov 행렬 방정식의 해를 구하는 것은 $((A-bg),b)$가 주어졌을 때 행렬 $\overline{X}$ 를 구하는 과정이지만 위의 (2.3)에서는 $\overline{X}$ 주어졌을 때 $(A-bg)$ 를 구하고 필요한 벡터 g 를 찾는 것이다. 따라서 이를 Lyapunov 행렬 방정식의 역해(inverse solution)라고 한다. 행렬 $\overline{A} = A-bg$ 을 사용하여 나타내면 (2.3)은

$$\overline{A}\,\overline{X}\,\overline{A}^T - \overline{X} = -bWb^T$$

이 되는데, 다음에서 시스템의 특성다항식(characteristic polynomial)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} |zI-A| &= z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n \\ |zI-\overline{A}| &= z^n + \overline{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \overline{a}_{n-1}z + \overline{a}_n \end{aligned} \qquad (2.4)$$

우선 $(\overline{A},b)$ 가 제어가능표준형(controllable canonical form) [8]으로 주어진 경우의 (2.3)의 해를 구하자. 이때 궤환 벡터는

$$g = [(\overline{a}_n - a_n)\ (\overline{a}_{n-1} - a_{n-1}) \cdots (\overline{a}_1 - a_1)] \qquad (2.5)$$

이 되는데, 다음의 보조정리를 통하여 이산시간에서 선택할 수 있는 상태공분산 행렬의 특성을 알 수 있다.

보조정리 2.1 [7]: $(\overline{A},b)$ 가 제어가능표준형이면, 선형 상태 궤환에 의해 얻어진 상태공분산 $(\overline{X})$은 Toeplitz이고 대칭 양한정 행렬이 된다. ■

주 2.1: $(\overline{A},b)$ 가 가제어지만 제어가능표준형으로 나타나지 않는 경우, 다음과 같은 변수변환

$$\hat{x}(k) = \hat{T}x(k) \qquad (2.6)$$

$$\hat{T} = [b\ Ab \cdots A^{n-1}b]\begin{pmatrix} \overline{a}_{n-1} & \overline{a}_{n-2} & \cdots & \overline{a}_1 & 1 \\ \overline{a}_{n-2} & \overline{a}_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \overline{a}_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

에 의해 제어가능표준형 [8]으로 변환할 수 있다.

보조정리 2.2 [7]: $(\overline{A},b)$ 가 제어가능표준형으로 주어진 경우에 다음의 관계를 만족하는 행렬 $M_t = (m_t(i,j))$ 는

$$M_t\overline{A} = \overline{A}^T M_t, \quad M_t b = b_t^T \qquad (2.7)$$

$$b_t = [\ (1-\overline{a}_n^2)\ (\overline{a}_1 - \overline{a}_n\overline{a}_{n-1})\ (\overline{a}_2 - \overline{a}_n\overline{a}_{n-2}) \cdots (\overline{a}_{n-1} - \overline{a}_n\overline{a}_1)\ ]$$

유일하고 다항식

$$p_n(z) = z^n + \overline{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \overline{a}_{n-1}z + \overline{a}_n$$

과

$$q_n(z) = (\overline{a}_{n-1} - \overline{a}_n\overline{a}_1)z^{n-1} + (\overline{a}_{n-2} - \overline{a}_n\overline{a}_2)z^{n-2} + \cdots + (1-\overline{a}_n^2)$$

으로 이루어진 Bezoutian 행렬이 된다. 이때 행렬 M_t 의 (i,j) 번째 항 $m_t(i,j)$ 은 다항식 $(p_n(x)q_n(y) - q_n(x)p_n(y))/(x-y)$ 에서 $x^{i-1}y^{j-1}$ 항의 계수로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m_t(i,j) = \sum_{k\ge1}(\overline{a}_{n-i+1-k}\,\overline{a}_{j-k} - \overline{a}_{i-1+k}\,\overline{a}_{n-j+k}).$$

■

보조정리 2.3 [7]: 제어가능표준형에서의 가제어성 그래미언 $\overline{X}$ 은 Bezoutian 행렬 M_t 에 의해 나타낼 수 있는데 다음 관계를 만족한다.

$$\overline{X} = WM_t^{-1}J = WM_t^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

■

지금부터 상태공분산 행렬이 주어지는 경우 상태궤환 이득 g 를 Lyapunov 행렬 방정식의 역해를 이용하여 구하자. 우선 폐루프 시스템의 분모다항식의 계수에 대하여 Jury 배열을 통하여 다음을 정의하자 [9].

$$\begin{aligned} a_{k-1,i} &= a_{k,i} - \alpha_k a_{k,k-i}, \quad i = 0,1,\cdots,k-1 \\ \alpha_k &:= a_{k,k}/a_{k,0}, \quad k = n, n-1, \cdots, 1 \end{aligned}$$

여기서 초기치는 $a_{n,i} = \overline{a}_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 이고 $\overline{a}_0 = 1$ 이다. 이때 Jury 배열에서 $k=n,\ i=0,1,\cdots,(n-1)$ 을 대입하면

$$\begin{pmatrix} a_{n-1,0} \\ a_{n-1,1} \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\overline{a}_n^2 \\ \overline{a}_1 - \overline{a}_n\overline{a}_{n-1} \\ \vdots \\ \overline{a}_{n-1} - \overline{a}_n\overline{a}_1 \end{pmatrix} = b_t^T \qquad (2.9)$$

인데, 벡터 b_t 의 값을 구하면 (2.4)의 다항식의 계수 $(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_n)$ 를 쉽게 구할 수 있다. 우선 첫째항에서 $\overline{a}_n = \pm\sqrt{1-a_{n-1,0}}$ 을 얻을 수 있고, 나머지 항들은 다음과 같이 쌍으로 나타낼 수 있다. n 이 홀수인 경우에는

$$\begin{pmatrix} a_{n-1,i} \\ a_{n-1,n-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{a}_n \\ -\overline{a}_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a}_i \\ \overline{a}_{n-i} \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \cdots, \frac{(n-1)}{2}$$

로 나타낼 수 있으므로 구하려는 다항식의 계수들은

$$\bar{a}_n = \pm\sqrt{1-a_{n-1,0}}$$
$$\bar{a}_i = \frac{1}{1-\bar{a}^2_n}(a_{n-1,i} + \bar{a}_n\, a_{n-1,n-i}), \quad (2.10)$$
$$i=1,\cdots,n-1$$

이 된다. n 이 짝수인 경우에는

$$\begin{pmatrix} a_{n-1,i} \\ a_{n-1,n-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{a}_n \\ -\bar{a}_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a}_i \\ \bar{a}_{n-i} \end{pmatrix}$$
$$i = 1,\cdots,\frac{(n-2)}{2}$$
$$a_{n-1,\frac{n}{2}} = (1-\bar{a}_n)\,\bar{a}_{n-1,\frac{n}{2}}$$

로 나타낼 수 있으므로 구하려는 다항식의 계수들은

$$\bar{a}_n = \pm\sqrt{1-a_{n-1,0}}$$
$$\bar{a}_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{1-\bar{a}_n}\, a_{n-1,\frac{n}{2}},$$
$$\bar{a}_i = \frac{1}{1-\bar{a}^2_n}(a_{n-1,i} + \bar{a}_n\, a_{n-1,n-i}), \quad (2.10)$$
$$\bar{a}_{n-i} = \frac{1}{1-\bar{a}^2_n}(\bar{a}_n\, a_{n-1,i} + a_{n-1,n-i}),$$
$$i = 1,\cdots,\frac{(n-2)}{2}$$

이 된다. (2.7)에서

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_t^{-1}b_t = W^{-1}\bar{X}\,J\begin{pmatrix} a_{n-1,0} \\ a_{n-1,1} \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

인데, 제어성 그래미언 $\bar{X}$ 과 Jb_t 를 다음과 같이 분해하면

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X^T_{12} & X_{22} \end{pmatrix},$$
$$X_{11}\in R^{(n-1)\times(n-1)},\ X_{12}\in R^{(n-1)\times 1},\ X_{22}\in R$$
$$Jb_t = \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} \\ a_{n-1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 \\ g_1 \end{pmatrix},\quad g_2\in R^{(n-1)\times 1},\ g_1\in R$$

이 되므로 (2.11)은 다음과 같이 나누어 표현할 수 있다.

$$X_{11}g_2 + X_{12}g_1 = 0$$
$$X^T_{12}g_2 + X_{22}g_1 = W$$

따라서 이를 다시 연립하여 풀면

$$a_{n-1,0} = \frac{W}{(X_{22}-X^T_{12}X^{-1}_{11}X_{12})} \quad (2.12)$$
$$\begin{pmatrix} a_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} \end{pmatrix} = \frac{-W}{(X_{22}-X^T_{12}X^{-1}_{11}X_{12})}X^{-1}_{11}X_{12}$$

이다. 따라서 (2.10)과 (2.12)에서 다항식의 계수 ($\bar{a}_i,\ i=1,2,\cdots,n$)를 구할 수 있고 (2.5)에서 상태궤환 이득 g 를 계산할 수 있다.

주 2.2: (2.9)에서 보면 $\bar{a}_n = 0$ 이면 다항식의 계수들은 유일하게 존재하고, $\bar{a}_n \neq 0$ 이면 다항식의 계수들이 두 개 존재한다. 여기서 $\bar{a}_n = 0$ 인 경우는 폐루프 시스템의 극점이 원점에 최소한 하나 이상 있는 경우이고 $\bar{a}_n = \pm 1$ 인 경우에는 폐루프 시스템의 극점이 단위원 상에 존재하는 것이므로 폐루프의 극점을 안정하게 잡게되면 $|\bar{a}_n| < 1$ 의 범위내에서 값이 선택된다.

주 2.3: (A, b) 가 가제어지만 제어가능표준형으로 나타나지 않는 경우에도 변수변환 $\hat{x} = \hat{T}x$ 을 이용하면 상태궤환이득은 $g = [(\bar{a}_n - a_n)(\bar{a}_{n-1} - a_{n-1}) \cdots (\bar{a}_1 - a_1)]\,\hat{T}^{-1}$ 로 주어진다.

3. 결 론

공분산 제어 방법은 시스템의 각 상태백터들이 초기상태부터 원하는 성능을 발휘하도록 하는 상태공분산배치 방법인데, Seeram 등은 SISO 이산 시스템에서 Lyapunov 행렬 방정식의 역해를 이용하여 선형궤환 백터를 설계하였다. 본 논문에서는 Seeram의 결과를 좀 더 체계적이고 간단하게 나타낼 수 있는 방법을 제안하였다.

참고문헌

[1] R. E. Skelton, *Dynamics Systems Control*, New York: Wiley & Sons., 1987.

[2] E. G. Collins, Jr. and R. E. Skelton, "A theory of state covariance assignment for discrete systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, pp. 35-41, 1987.

[3] A. F. Hotz and R. E. Skelton, "A covariance control theory," *Int. J. Control*, vol. 46, pp. 13-22, 1987.

[4] V. Sreeram and P. Agathoklis, "On the theory of state-covariance assignment for single-input linear discrete systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-38, no. 7, pp. 1111-1115, 1993.

[5] V. Sreeram and P. Agathoklis, "On covariance control theory for linear continuous systems," *Proc. of 31st IEEE CDC*, Arizona, pp. 213-214, 1992.

[6] A. Ohara, I. Masubuchi, and N. Suda, "A q-Markov Cover algorithm for SISO discrete-time systems based on the state covariance assignment," *20th SICE Symp. Contr. Theory*, Kariya, pp. 95-100, 1991.

[7] R. R. Bitmead and H. Weiss, "On the solution of the discrete-time Lyapunov matrix equation in controllable canonical form," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-24, pp. 481-482, 1979.

[8] S. Barnett, *Polynomials and Linear Control Systems*, Marcel Dekker Inc., 1983.

[9] K. J. Åstrom, *Introduction to Stochastic Control Theory*, New York: Academic Press, 1970.