

다변수 시스템의 자기동조제어

배종일, 이동철^o
부경대학교 전기공학과

Self-Tuning Control of Multivariable System

Jong-II Bae, Dong-Cheol Lee
Pukyong National University, Department of Electrical Engineering

Abstract - In the single-input and single-output system, the parameter of plant is scalar polynomial, but in the multiple input and multiple output, it accompanies, being matrix polynomial, the consideration of observable controllability index or problems of non-commutation in matrix polynomial as well as degree, and it is more complex to deal with. Therefore, it is thought that a full research on the single-input and single-output system is not made. This research propose that problems of minimum variance self-tuning regulator of multivariable system and pole placement self-tuning regulator.

1. 서론

은-라인으로 플랜트의 파라미터를 동정(identification)하고, 그 결과를 기초로 하여 제어기의 파라미터를 조정하는 제어방법이 자기동조 레귤레이터(self-tuning regulator, STR)이다[1-4]. 단일입력 단일출력 시스템에서 플랜트의 파라미터는 스칼라-다항식이지만 다중입력 다중출력 시스템에서는 행렬다항식이 되어 차수 뿐만 아니라 가관측, 가제어 지수의 고려나 행렬다항식의 비가환성(non-commutation) 등의 문제가 따르고 취급이 보다 복잡하다[5, 6]. 따라서, 단일입력 단일출력 시스템 정도의 충분한 연구는 행해지지 않고 있다고 사료된다. 본 연구에서는 최소분산(minimum variance) STR[7]과 극지정(pole placement) STR[8]의 문제점 등을 제안한다.

2. 대상시스템

$A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ 를 후퇴연산자의 다항식행렬로하여 다음식과 같이 입출력관계가 기술되는 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} & [I + A(z^{-1})]y_t \\ & = z^{-k} B(z^{-1})u_t + [I + C(z^{-1})]e_t \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, y_t 와 u_t 는 각각 p 벡터의 출력과 입력이며, e_t 는 p 벡터의 백색잡음(white noise) 프로세서로

$$\begin{aligned} E[e_t] &= 0 \\ E[e_t e_t^T] &= Q \end{aligned} \quad (2)$$

을 만족한다.

여기서, Q 는 정정공분산행렬(positive definite covariance matrix)이다.

3. 최소분산 STR

여기서, 일반적으로 각각의 전송채널은 동일 시간지연을 k , 그리고 $\det[B(z^{-1})]$ 는 모든 영점을 복소평면의 단위원 내에 갖는다고 가정한다. 최소분산 레귤레이터라고 하는 것은 다음의 평가함수를 최소로 하는 것이다.

$$V = E[y(t+k+1)^T y(t+k+1)] \quad (3)$$

V 를 최소로 하기 위한 제어법칙(control law)은

$$[I + M(z^{-1})][zB(z^{-1})]u_t = G(z^{-1})y_t \quad (4)$$

를 만족하는 것이 필요하다.

$$G(z^{-1}) = G_0 + G_1 z^{-1} + \dots + G_{n_a} z^{-n_a} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & I + C(z^{-1}) \\ & = [I + A(z^{-1})][I + M(z^{-1})] \\ & \quad - z^{-k-1} \tilde{G}(z^{-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서는 다음과 같은 의사가환성이 이용된다.

$$\begin{aligned} & [I + \tilde{M}(z^{-1})] \tilde{G}(z^{-1}) \\ & = G(z^{-1}) [I + M(z^{-1})] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\det[I + \tilde{M}(z^{-1})] = \det[I + M(z^{-1})] \quad (8)$$

행렬다항식 $M(z^{-1})$ 과 $\tilde{M}(z^{-1})$ 은 차수가 k , $G(z^{-1})$, $\tilde{G}(z^{-1})$ 은 차수가 $n_a - 1$ 이다. 이 행렬다항식 차수의 제약에 의해 식(7)은 $G(z^{-1})$ 과 \tilde{M} 의 $(k + n_a - 1)$ 개의 미지계수의 선형방정식으로 기술된다. 페루우프 시스템은 다음식으로 정의된다.

$$y_t = [I + M(z^{-1})]e_t \quad (9)$$

4. 극지정 STR [9]

제어대상은 식(1)과 같이 기술된다고 가정한다. 그러나 시스템모델은 다음과 같다.

$$[I + \hat{A}(z^{-1})]y_t = \hat{B}(z^{-1})u_t + \varepsilon_t \quad (10)$$

다음 식의 제어법칙을 이용하여 페루우프 극

만을 결정한 위치에 지정한다.

$$u_t = G(z^{-1})[I + F(z^{-1})]^{-1} y_t \quad (11)$$

제어기를

$$[I + \hat{A}(z^{-1})][I + \hat{F}(z^{-1})] - \hat{B}(z^{-1})\hat{G}(z^{-1}) = I + T(z^{-1}) \quad (12)$$

에 의해 구성한다. 다항식행렬의 의사가환성

$$[I + \hat{F}(z^{-1})]\hat{G}(z^{-1}) = \hat{G}(z^{-1})[I + \hat{F}(z^{-1})] \quad (13)$$

을 이용하여, 식(11)은

$$[I + \hat{F}(z^{-1})]u_t = \hat{G}(z^{-1})y_t \quad (14)$$

가 된다. 페루우프 시스템은 다음 식과 같이 정의된다.

$$y_t = [I + F(z^{-1})][I + T(z^{-1})]^{-1} e_t$$

중요한 가정은 아래와 같다.

i) 시스템 차수에 대하여

$$\begin{aligned} n_a &= n_a \\ n_b &= n_b + k \\ n_c &= n_a \\ n_d &= n_a - 1 \\ n_e &= n_b - 1 \\ n_t &\leq n_a + n_b + k - n_c - 1 \end{aligned} \quad (15)$$

ii) 시스템에 대해 항이 고정된 극지정 레귤레이터가 존재하고, 그것이 n_f 와 동일한 가관측, 가제어지수를 가진다.

iii) 아래의 식(16)이 일의적인 해를 가지며 이 식은 식(12)에서 유도된 것으로, $\hat{F}(z^{-1})$ 과 $\hat{G}(z^{-1})$ 을 결정하는 것이다. 식(16)의 해의 존재는 추정된 모델 계수에 의해 만들어지는 좌변의 $(n_f + n_g + 1) \times (n_f + n_g + 1)$ 행렬이 정칙일 때 존재한다.

$$\begin{bmatrix} I & & 0 & -\hat{B}_1 & \cdots & 0 \\ \hat{A}_1 & \ddots & & \vdots & & \\ \vdots & \ddots & I & -\hat{B}_1 & & \\ \hat{A}_{n_a} & & \hat{A}_1 & -\hat{B}_{n_a} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & & \hat{A}_{n_a} & 0 & \cdots & -\hat{B}_{n_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \vdots \\ \hat{F}_{n_f} \\ \hat{G}_0 \\ \vdots \\ -\hat{G}_{n_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_{n_t} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \vdots \\ \hat{A}_{n_a} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

극 지정법은 개루우프의 비최소위상 영점이나 시간지연의 문제가 일어나지 않는다. 또 페루우프의 극을, 설계자가 $\det(I + T(z^{-1}))$ 의 영점의 지정에 의해 결정된다. 또 식(16)의 행렬의 차수가 커지면 계산량이 증가한다. 이들을 제거하면 비교적 간단하고 신뢰할 수 있는 자기동

조 알고리즘이 된다.

5. 수치계산 예

실제 시스템의 대부분은 다항식행렬 $B(z^{-1})$ 의 계수행렬 B_1 이 비정칙이다. 이는 입출력관계에 있어서 시간자연이 다르기 때문에 일어난다. 이와 같은 시스템은 일반적으로 최소분산 STR에서 제어되지 않고, 또 최소분산 STR은 비최소위상 제어시스템에는 적합하지 않다. 이 예에서 극지정 자기동조 알고리즘이 양방의 경우 잘 대처되고 있음을 나타낸다. 다음과 같은 시스템을 고려하자.

$$(I + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2})y_t = (B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2})u_t + (I + C_1 z^{-1})e_t$$

여기서,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.4 & -0.2 \\ -0.1 & -0.9 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

또 백색잡음 e_t 는

$$E(e_t) = 0, E(e_t e_t^T) = 0.1 I$$

로 주어진다.

추정모델

$$(I + \hat{A}_1 z^{-1} + \hat{A}_2 z^{-2})y_t = (\hat{B}_1 z^{-1} + \hat{B}_2 z^{-2})u_t + e$$

를 이용하여 파라미터 추정을 행한다. 레귤레이터 법칙은 다음의 구조를 갖는다.

$$(I + \hat{F}_1 z^{-1})u_t = (\hat{G}_0 + \hat{G}_1 z^{-1})y_t$$

레귤레이터는 $I + T(z^{-1})$ 을 다음과 같이 지정하여 설계한다.

$$I + T(z^{-1}) = I + \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} z^{-1}$$

파라미터 추정은 $t=1000$ 까지 행하고 레귤레이터 파라미터의 이론치와 $t=1000$ 의 추정치와를 비교한다. 또 목표로 하는 페루우프 출력과 레귤레이터를 적용할 때 출력을 비교하여 그림에 나타냈다.

$$\hat{F}_1 = \begin{bmatrix} 0.5318 & 0.2659 \\ 0.1001 & 0.5419 \end{bmatrix}$$

$$\hat{F}_1 = \begin{bmatrix} 0.5409 & 0.2476 \\ 0.0871 & 0.5702 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}_0 = \begin{bmatrix} -0.2803 & -0.0344 \\ -0.1527 & -0.2547 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}_0 = \begin{bmatrix} -0.2889 & -0.0130 \\ -0.1511 & -0.2687 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}_1 = \begin{bmatrix} 0.1632 & 0.0291 \\ 0.0334 & 0.0881 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}_1 = \begin{bmatrix} 0.1731 & 0.0135 \\ 0.0279 & 0.1082 \end{bmatrix}$$

6. 결론

모델 (1)

최소분산 STR	수렴도 빠르고 레귤레이터 파라미터의 추정치도 이론치와 거의 같은 값이 얻어졌다.
극지정 STR	거의 일정값에 수렴하고 있다고 하지만 시간이 경과 할수록 다소 여러가지 문제가 있고 이론치와 적은 오차가 있다.

모델 (2)

최소분산 STR	행렬다항식 $B(z^{-1})$ 의 계수 행렬 B_1 이 비정칙이므로 적용할 수 없다.
극지정 STR	일정값에 수렴하고 있지만 \hat{F}_1, \hat{G}_0 는 이론치와 오차가 다소 크다.

최소분산 STR는 수렴도 빠르고 이론치와 추정치도 거의 일치하였고 무엇보다 계산이 간단하다는 장점이 있다. 그러나, 실제 시스템의 대부분이 행렬다항식 $B(z^{-1})$ 의 계수행렬 B_1 이 비정칙인 것에 대해 최소분산 STR는 이와 같은 시스템 제어에는 적합하지 않다.

이에 대해 극지정 STR은 수렴에 시간이 걸리고 이론치와 추정치의 차이가 있지만(이것은 $(\hat{A}(z^{-1}), \hat{B}(z^{-1})) \rightarrow (\hat{F}(z^{-1}), \hat{G}(z^{-1})) \rightarrow (\hat{F}(z^{-1}), \hat{G}(z^{-1}))$ 이므로 위의 오차가 누적되면 안된다고 생각된다.) B_1 이 비정칙이라고 해도 여하간에 결과는 얻어진다. 또 페루우프극을 설계자가 지정할 수 있다고 하는 장점이 있으며 알고리즘도 비교적 간단하다.

[참고 문헌]

- [1] Y. D. Landau, *Adaptive Control-The Model Reference Approach*, Marcel Dekker, 1979
- [2] I. D. Landau, M. Tomizuka, *Theory & Practice of Adaptive Control Systems*, 1981
- [3] 金井, 内門, "로바스트適應制御", 計測と制御, Vol. 26, NO. 5, pp. 406-412, 1987
- [4] K. J. Astrom & B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison-wesley Co., 1989
- [5] K. J. Astrom & B. Wittenmark, "On Self-Tuning Regulators," *Automatica*, 9, pp.185-199, 1973
- [6] K. J. Astrom & B. Wittenmark, "Self-Tuning Controller based on Pole-Zero Placement," *Proc. IEE.* 27, pp. 120-130, 1980
- [7] K. J. Astrom, U. Borrisson, L. Ljung and B.

Wittenmark, "Theory and Application of Self-Tuning Regulators," *Automatica*, 13, pp. 457-476, 1977

- [8] I. D. Landau and R. Lozano, "Unification of Discrete Time Model Reference Adaptive Control Design," *Automatica*, 17, pp.593-611, 1981
- [9] B. Egardt, *Stability of Adaptive Controllers*, Springer-Verlag, 1979

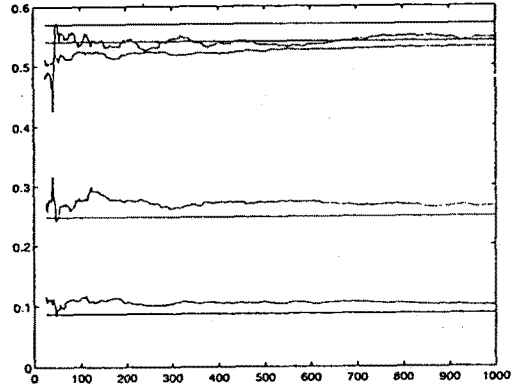


그림 1. 행렬 \hat{F}_1 요소의 시간변화

Fig. 1 Time variation of matrix \hat{F}_1 element

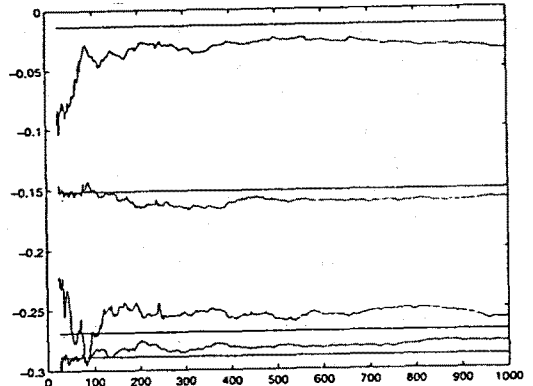


그림 2. 페루우프 시스템에 대한 플랜트의 목표출력

Fig. 2 The objective output of plant for closed loop systems

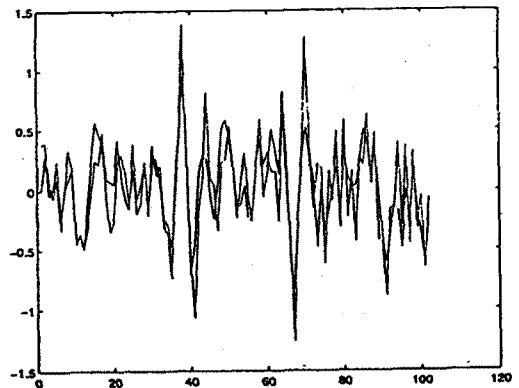


그림 3. 제어법칙에 의한 출력

Fig. 3 Output for control law