

새로운 BPF 변환식을 이용한 동적 시스템의 대수적 보상기 설계

안비오†, 김민형††, 김종부††, 이재춘§, 오민환§§, 안두수§§§
 †한국원자력연구소, ††인덕대학, §서울대학, §§한국수자원공사, §§§성균관대학교

Algebraic compensator design for dynamic systems using a novel BPF transformation method

P. Ahn†, M.H. Kim††, J.B. Kim††, J.C. Lee§, M.H. Oh§§, D.S. Ahn§§§
 †KAERI, ††In Duk Ins. of Tech., §Suil Ins. of Tech., §§KOWACO, §§§SKK Univ.

Abstract - This paper deals with an algebraic compensator design for dynamic systems using a novel BPF transformation method. To obtain an algebraic compensator for the system, block pulse function's differential operation is used. Compare to unalgebraic compensator, proposed algebraic compensator is less sensitive to the measurement noise.

1. 서 론

제어 대상 시스템의 보상기 설계는 동적 방정식에 대한 관측기와 제어기를 결합한 형태로 구성할 수 있다. 보상기는 최종 목적에 맞게 설계된 관측기와 제어 입력이 부가된 상태방정식으로부터 표준화된 행렬 방정식과 분리 이론을 유도하여 관측기 이득과 제어기 이득을 각각 독립적으로 선정할 수 있음을 보여야한다. 이것은 안정된 각각의 시스템이 결합된 경우에도 전체 시스템의 안정도가 손상되는 경우가 생기기 때문이다. 일반적으로 상태 공간에서 선형시스템을 대상으로 유도된 보상기는 행렬 미분 방정식 형태이다. 70년대부터 이러한 행렬 미분 방정식을 직교함수(Walsh 함수, Block pulse 함수, Haar 함수..)와 직교함수의 적분 연산 행렬을 이용하여 대수적으로 해석할 수 있는 방법이 소개되면서 현재까지 활발히 연구되어지고 있다[1]-[6]. 최근 들어 직교함수 중 Block pulse 함수는 적분 연산이 아닌 미분 연산을 이용한 시스템 해석방법에 대해 소개되고 있다. 이는 시스템 고장 진단을 위한 추정기 설계나 미지의 입력이 포함된 시스템, 분산형 시스템 등의 해석에서 적분 연산 행렬로 해결할 수 없는 부분이 있기 때문이다. 따라서, 본 연구에서는 개선된 형태의 Block pulse 함수(BPF) 미분 연산식을 이용하여 대수적인 보상기 설계 방법에 대해서 소개 하고자 하며, 제안된 대수적 보상기를 MATLAB SIMULINK상에서 on-line 처리가 가능하도록 구현하였다.

2. 선형 동적 시스템의 대수적 보상기 설계

2.1 블럭펄스 함수와 미분 연산에 대한 블럭펄스 함수 근사식

<정리 1>

임의의 실유계 연속함수 $x(t)$ 는 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 다음의 관계식을 만족하는 블럭펄스 함수의 전개항수 m 이 존재한다. 여기서, ϵ 은 $\epsilon \geq 0$ 인 임의의 실수이다.

$$\int_0^{t_f} \left(x(t) - \sum_{i=1}^m X_i \phi_i(t) \right)^2 dt \leq \epsilon \quad (1)$$

■ <정리 1>의 증명은 참고문헌[6]을 참조

<정리 2>

임의의 실유계 연속함수 $x(t)$ 의 미분값 $\dot{x}(t)$ 는 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 $x(t)$ 의 블럭펄스 함수 m 항 전개시의 계수벡터 $X^T = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_m]$ 와 초기값 $x(0)$ 를 이용하여 근사화 할 수 있다. 즉, 식(2)을 만족시키는 전개항수 m 이 존재한다.

$$\int_0^{t_f} \left(\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^m \Gamma_i [X_i, x(0)] \cdot \phi_i(t) \right)^2 dt \leq \epsilon \quad (2)$$

여기서, ϵ 은 $\dot{x}(t) \cong \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \phi_i(t)$ $\epsilon \geq 0$ 인 임의의 실수이고, $\bar{X} = [\bar{X}_1 \ \bar{X}_2 \ \dots \ \bar{X}_m]^T$ 와 $\Gamma_i [X_i, x(0)] = \bar{X}_i$ 의 관계이다.

■ <정리 2>의 증명은 참고문헌[6]을 참조

<정리1>로부터 임의의 실유계 연속함수 $f(t)$ 의 블럭펄스 함수 계수벡터는 다음과 같다.

$$f(t) = \sum_{i=1}^m F_i \phi_i(t) = F^T \phi \quad (3)$$

여기서, $F^T = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_m]$ 이고

$$F_i = \frac{1}{2} \left[f\left(i \frac{m}{t_f}\right) + f\left((i-1) \frac{m}{t_f}\right) \right] \text{ 이다.}$$

또한, <정리2>로부터 $f(t)$ 의 블럭펄스 함수 계수벡터는

$$\dot{f}(t) \cong \sum_{i=1}^m \bar{F}_i \phi_i(t) = \bar{F}^T \phi \quad (4)$$

여기서, $\bar{F}^T = [\bar{F}_1 \ \bar{F}_2 \ \dots \ \bar{F}_m]$ 이고

$$\bar{F}_1 = \frac{2m}{t_f} [F_1 - f(0)]$$

$$\bar{F}_{i+1} = \frac{2m}{t_f} [F_{i+1} - F_i] - \bar{F}_i, \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

이다.

2.2 대수적 보상기 설계

다음과 같은 선형 동적 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5.b)$$

대수적 보상기 설계를 위해 먼저, 식(5)의 동적시스템에 대한 최소차수 관측기를 유도하자. 상태 재배치행렬 M 을 다음과 같이 정의하면,

$$M = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(t) = M \cdot x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서, 행렬 D는 행렬 M이 정칙이 되도록 하는 임의

의 행렬이다. 행렬 M의 변환관계에 따라 동적시스템 식(5)는 다음의 식(7)로 재표현된다.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \quad (7.a)$$

$$y(t) = \bar{C} \bar{x}(t) \quad (7.b)$$

$$\text{여기서, } \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \bar{C} = [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2]$$

식(7)로부터 유도된 축소차수 관측기는 다음과 같다.

$$\dot{z}(t) = \dot{w}(t) - L\dot{y}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t) \quad (8)$$

여기서, $F = (\bar{A}_{22} - L\bar{A}_{12})$

$$G = (\bar{B}_2 - L\bar{B}_1), \quad L = \text{관측기 이득}$$

$$H = -(L\bar{A}_{11} + L\bar{A}_{12}L - \bar{A}_{21} - \bar{A}_{22}L)$$

따라서, 축소차수 관측기를 통해 추정된 상태벡터는

$$\hat{x}(t) = M^{-1} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ L & I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

이제, 대수적 보상기를 설계하기 위해 <정리1>을 이용해 각각의 벡터를 블럭펄스 함수 전개식으로 표현하자.

$$\hat{x}(t) \approx \sum_{i=1}^m \hat{X}_i \phi_i(t) \quad (10.a)$$

$$u(t) \approx \sum_{i=1}^m U_i \phi_i(t) \quad (10.b)$$

$$y(t) \approx \sum_{i=1}^m Y_i \phi_i(t) \quad (10.c)$$

$$z(t) \approx \sum_{i=1}^m Z_i \phi_i(t) \quad (10.d)$$

$$\dot{z}(t) \approx \sum_{i=1}^m \dot{Z}_i \phi_i(t) \quad (10.e)$$

제한제어입력을 다음과 같이 결정하고,

$$\sum_{i=1}^m U_i \phi_i(t) = -K \cdot \sum_{i=1}^m \hat{X}_i \phi_i(t) \quad (11)$$

식(8)을 블럭펄스 함수 전개식으로 표현하여 식(11)을 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \dot{Z}_i \phi_i(t) &= F \sum_{i=1}^m Z_i \phi_i(t) + G \sum_{i=1}^m U_i \phi_i(t) + H \sum_{i=1}^m Y_i \phi_i(t) \\ &= F \sum_{i=1}^m Z_i \phi_i(t) - GK \sum_{i=1}^m \hat{X}_i \phi_i(t) + H \sum_{i=1}^m Y_i \phi_i(t) \\ &= F \sum_{i=1}^m Z_i \phi_i(t) - GK \cdot [\bar{M}_1 \quad \bar{M}_2] \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m Y_i \phi_i(t) \\ \sum_{i=1}^m Z_i \phi_i(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + H \sum_{i=1}^m Y_i \phi_i(t) \\ &= (F - GK \bar{M}_2) \sum_{i=1}^m Z_i \phi_i(t) + (H - GK \bar{M}_1) \sum_{i=1}^m Y_i \phi_i(t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{여기서, } M^{-1} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ L & I_{n-m} \end{bmatrix} = [\bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]$$

결국, 식(12)에서 페루프 시스템에 대한 보상기의 $(F - GK \bar{M}_2)$ 의 극점이 음의 값을 갖도록 관측기 이득 L과 제한제어이득 K를 선정하면 제안된 대수적 보상기를 이용하여 제어된 상태는 영의 값에 수렴하게 될 것이다. 이제, 식(12)로 유도된 대수적 보상기의 해를 2장에서 소개한 블럭펄스 함수 미분 연산식을 이용하여 구하자. 식(4)로부터 식(13)의 관계와, 식(12)로부터 식(14)의 관계는 자명하다.

$$\bar{Z}_{i+1} + \bar{Z}_i = \frac{2m}{t_f} [Z_{i+1} - Z_i] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{i+1} + \bar{Z}_i &= (F - GK \bar{M}_2)(Z_{i+1} + Z_i) \\ &\quad + (H - GK \bar{M}_1)(Y_{i+1} + Y_i) \end{aligned} \quad (14)$$

식(13)과 식(14)의 좌변을 같게 놓고 Z_i 에 대하여 정리하면 식(15)와 같은 대수적 반복 연산 알고리즘을 쉽게 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left[I_{n-m} - \frac{t_f}{2m} A \right]^{-1} \left[z(0) + \frac{t_f}{2m} B Y_1 \right] \\ Z_{i+1} &= \left[I_{n-m} - \frac{t_f}{2m} A \right]^{-1} \left[\left(I_{n-m} + \frac{t_f}{2m} A \right) Z_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_f}{2m} B (Y_{i+1} + Y_i) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, $i=1, 2, \dots, m$ 이고,

$$A = (F - GK \bar{M}_2), \quad B = (H - GK \bar{M}_1) \text{ 이다.}$$

결국 식(15)는 간단한 대수적 연산자만으로 선형 동적 시스템에 대한 보상기를 설계할 수 있음을 알 수 있다.

3. 적용예제

다음과 같은 선형 동적 시스템을 대상으로 본 연구에서 제안된 블럭펄스 함수를 이용한 대수적 보상기를 설계하고 MATLAB SIMULINK를 이용하여 구해진 결과식을 살펴보자.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

여기서, 상태변환행렬 M을 다음과 같이 결정하자.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

대상 시스템과 상태변환행렬로부터 다음이 결정되며,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

보상기 이득중 관측기 이득과 제어이득을 각각 아래와 같이 임의 결정하면

$$L = [-5 \quad 0], \quad K = \begin{bmatrix} 1.9909 & -2.4574 & 0.0509 \\ -0.2309 & 4.0091 & 2.2981 \end{bmatrix}$$

고유값은 -1, -2, -3에서 -2, -4, -6으로 됨을 알 수 있다. 설계된 보상기는 아래와 같고

$$\dot{z}(t) = -12.06z(t) + [48.3091 \quad -28.5426]y(t)$$

블럭펄스 함수를 이용하여 대수적으로 표현된 보상기는 아래와 같다. 그림1은 적용예제에 대한 제안된 대수적 보상기를 MATLAB SIMULINK상에서 구현한 것이다.

$$\begin{aligned} Z_1 &= 0.4311 Y_{1(0)} - 0.1231 Y_{2(0)} \\ Z_{i+1} &= 0.1082 Z_i + 0.4311 (Y_{1(i+1)} + Y_{1(i)}) \\ &\quad - 0.1231 (Y_{2(i+1)} + Y_{2(i)}) \end{aligned}$$

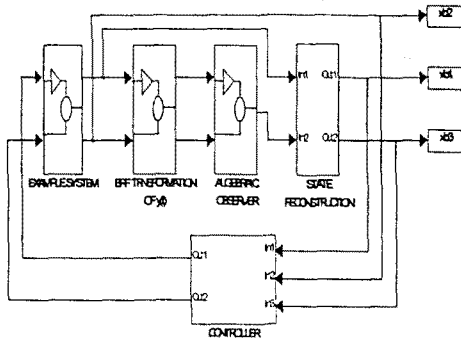


그림 1. 적용예제 시스템의 대수적 보상기 구조

또한 그림2~4는 각각의 상태에 대한 보상기를 통해 제어된 상태와 제어되기 이전의 상태를 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 제안된 대수적 보상기가 상태를 모두 잘 제어하고 있음을 알 수 있다.

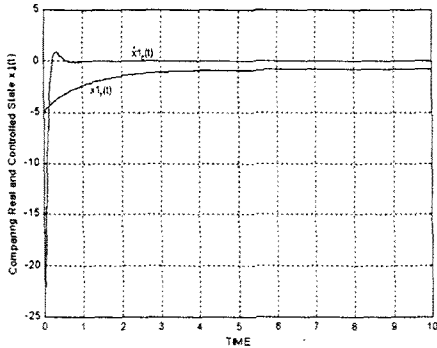


그림 2. 상태 $x_1(t)$ 의 실제 상태와 대수적 보상기를 통해 제어된 상태의 비교

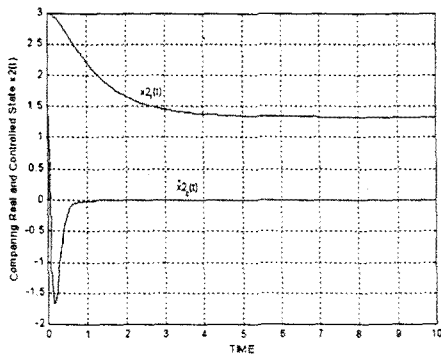


그림 3. 상태 $x_1(t)$ 의 실제 상태와 대수적 보상기를 통해 제어된 상태의 비교

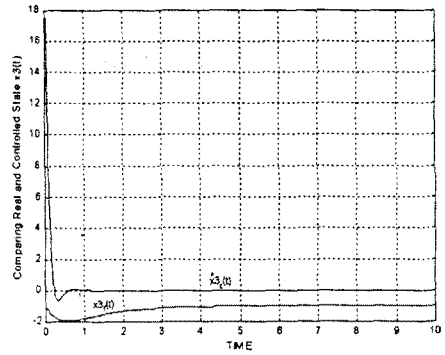


그림 4. 상태 $x_1(t)$ 의 실제 상태와 대수적 보상기를 통해 제어된 상태의 비교

4. 결 론

본 논문에서는 블럭펄스 함수를 이용한 대수적 보상기 설계에 대하여 다루었다. 대수적 보상기를 실제함으로서 비대수적 보상기와 비교하여 얻을 수 있는 장점은 첫째, 실제 하드웨어 구현시 미/적분기의 제거로 인한 무게와 부피 비용의 감소를 들 수 있고, 둘째로는 시스템과 보상기에 존재하는 잡음등에 미분기를 포함한 경우보다 영향을 적게 받는다는 것이다. 제안된 설계과정은 블럭펄스 함수의 미분연산식을 이용함으로써 적분 연산식을 이용한 경우 보다 반복 연산 알고리즘의 유도가 간단하고, 실제의 설계도가 될 수 있도록 MATLAB SIMULINK 상에서 예제를 구현하였다. 적용예제 결과그림에서 알 수 있듯이 제안된 대수적 보상기가 실제의 상태들을 좋은 성능지표로서 제어하고 있음을 알 수 있다.

(참 고 문 헌)

- [1] M. S. Corrington, "Solution of differential and integral equations with Walsh functions," IEEE Trans. Cir. Theory, Vol. 20, pp470-476, 1973
- [2] F. Kraus and W. Schaufelberger, "Identification with block-pulse functions, modulation functions and differential operators," Int. J. Cont., vol. 51, pp 931-942, 1990.
- [3] Pius Ahn, Min-Hyung Kim and Doo-Soo Ahn, "An Algebraic Method to Design of Unknown Input Observer," Fourth International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore, Dec. 1996.
- [4] Pius Ahn and et. al., "FDI observer design for linear system via STWS," Proc. of 12th KACC, pp. 1423-1427, 1997.
- [5] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, "Block pulse functions and their applications in control systems," Springer-Verlag, 1992.
- [6] 안비오 외 3인, "블럭펄스 함수를 이용한 미지입력 관측기의 대수적 접근", 대한전기학회 논문집 46권 6호 pp. 950-957, 1997.