

그릴 스펙트로미터를 적용한 하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터에 대한 연구

박영재*, 박진배*, 최운호**, 윤태성***
 연세대학교 전기공학과*, 경기대학교 전자공학과**, 창원대학교 전기공학과***

A Study on Hadamard Transform Imaging Spectrometers
 utilizing Grill Spectrometers

Yeong-Jae Park*, Jin-Bae Park*, Yoon-Ho Choi**, Tae-Sung Yoon***
 Yonsei University, Kjonggi University**, Changwon University***

Abstract - In this paper, Hadamard transform imaging spectrometers utilizing Grill spectrometers are proposed. General Hadamard Transform Spectrometers (HTS) carry out one-encoding through input masks, but Grill spectrometers carry out double-encoding through entrance and exit masks. Thus Grill spectrometers increase the signal-to-noise ratio by double-encoding. we reconfigure the system by using the Grill spectrometers which use a left cyclic S-matrix instead of the conventional right cyclic one. Then, we model the system and apply the mask characteristics method, i.e. T^{-1} method, to complete fast algorithm.

Through computer simulations, we want to prove the superiority of the proposed system by comparing with the conventional HTS. From Observations concerning the average mean square error(AMSE) associated with estimates from the T^{-1} spectrum-recovery method, the relative performances of the two systems are compared.

1. 서 론

하다마드 트랜스폼 스펙트로미터(HTS)는 광원의 스펙트럼 정보를 얻기위해 주로 사용된다. 이러한 스펙트로미터의 주요 잡음의 원인은 감지기잡음이다. 감지기잡음을 최소화하여 신호대 잡음비(SNR)를 높이기위해 다중화기법(multiplexing)[1]이 고안되었다. 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터에서는 다중화의 방법으로 전자광학 마스크(electro-optic mask)와 마스크를 제어하기 위한 S행렬(simplex matrix)[2]을 사용한다. 기존의 하다마드 트랜스폼 스펙트로미터는 입력부에서 한번의 부호화를 통해 특정영역에서의 빛의 스펙트럼을 측정하는데 반해, 하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터(HTIS)는 2개의 마스크를 사용하여 2번의 부호화를 통해 공간의 각 영역 별로 스펙트럼을 측정할 수 있게 하는 장치[2]이다. 따라서 공간상에서 다른 스펙트럼 분포를 갖는 화학적 시료나 이미지(image) 등의 스펙트럼을 영역별로 측정할 수 있는 장점을 갖는다. 하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터(HTIS)는 HTS처럼 하다마드 변환을 이용하여 스펙트럼 측정시 발생하는 잡음을 줄여 준다. 또한 HTIS는 2번의 부호화를 수행하기 때문에 HTS보다도 더 좋은 신호대 잡음비를 얻을 수 있다.

본 논문에서는 기존의 right cyclic S행렬로 제어되는 그릴 스펙트로미터대신 후처리과정이 간단한 left cyclic S행렬을 이용한 그릴 스펙트로미터를 적용한 HTIS를 제안한다. 모의 실험에서는 제시된 시스템과 기존의 HTS시스템과 비교하여 평균자승오차(Average MSE)가 현저히 줄어들음을 보임으로써 제시된 시스템의 우수성을 입증하고자 한다.

2. 하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터

2.1 그릴 스펙트로미터

그릴 스펙트로미터는 그림 1과 같이 n개의 스펙트럼 정보를 얻기위해 n개의 슬릿(slit)을 가진 입력마스크와 2n-1개의 슬릿을 가진 출력마스크가 필요하다. 입력마스크는 전자광학 마스크를 사용하여 동질화된 병렬신호(homogenized parallel signal)를 부호화하고 이를 분산시켜 고정된 출력마스크에서 다시 부호화를 시킴으로써 개선된 특징을 나타낸다. 여기서 출력마스크는 천공이 되어 있는 고정형 마스크이므로 이상적인 투과율 특성을 나타낸다.

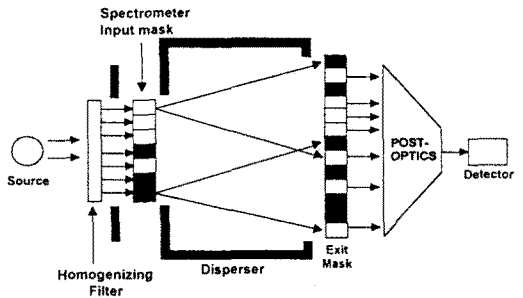


그림 1 그릴 스펙트로미터
 Fig. 1 Grill spectrometer

기존의 그릴 스펙트로미터는 일반적인 HTS에서와는 달리 left cyclic S행렬을 사용하지 않고 right cyclic S행렬을 사용한다. 그릴 스펙트로미터의 입출력마스크 제어용 행렬을 각각 V, W 라 하면 측정치 수식[2]은 다음과 같은 결과를 나타낸다.

$$H_i = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} v_{r-i} w_{r-t} \psi_t + E_i$$

단, 여기서 $0 \leq i, r-s \leq n-1$ 이며 H_i 은 i 번째 측정치, ψ 는 실제치, E 는 측정잡음을 나타낸다.

Left cyclic S행렬은 $S^T = S$ 이므로 right cyclic 행렬에 비해 후처리과정(post processing)이 간단하다. Left cyclic S행렬을 사용할 때 행렬 V, W 의 원소 v_{ij}, w_{ij} 에 대하여 각각 $v_{ij} = v_{i+j-2}, w_{ij} = w_{i+j-2}$ 의 관계가 성립한다. 밑첨자는 modulo 'n'으로 읽는다. 이 방식을 사용하면 다음과 같은 수식을 유도할 수 있다.

$$H_i = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=r}^{n+r-1} v_{r+i} \psi_{s-r} w_s + E_i$$

여기서 $t = s - r$ 로 치환하면

$$H_i = \sum_{r=0}^{i-1} \sum_{t=0}^{i-1} v_{r+i} \psi_t w_{r+t} + E_i$$

$$= \sum_{r=0}^{i-1} \sum_{t=0}^{i-1} v_{r+i} w_{r+t} \psi_t + E_i$$

단, $0 \leq i, s-r \leq n-1$ 이다.

이를 벡터-행렬 형태로 나타내면 다음 수식과 같다.

$$H = V W^T \Psi + E \quad (1)$$

여기서 H , Ψ , E 는 $(n \times 1)$ 벡터이고 V , W 은 $(n \times n)$ 행렬이다. 일반적인 HTIS는 입·출력부의 마스크 행렬이 각각 공간영역 정보와 그에 따른 스펙트럼 정보를 나타낸다. 따라서 HTS와 같이 1차원적인 벡터로 나타낼 수 없고 2차원적인 행렬을 사용해야 한다. 일반적으로 n 개의 위치 정보에 대한 m 개의 스펙트럼 정보를 얻기 위해 $(n \times m)$ 행렬을 택한다. 따라서 벡터 H , Ψ , E 는 각각 η , ϕ , e 인 $(n \times m)$ 행렬을 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\eta = V W^T \phi + e \quad (2)$$

식 (2)에서의 실제값의 추정치와 오차행렬은 각각 식 (3)과 식 (4)와 같다.

$$\hat{\phi} = (W^T)^{-1} V^{-1} \eta, \quad (3)$$

$$\zeta = \hat{\phi} - \phi = (W^T)^{-1} V^{-1} e \quad (4)$$

이에 따른 평균 MSE는 다음과 같다.

$$\epsilon = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n E[\zeta_{ij}^2] \quad (5)$$

2.2 마스크가 이상적일 경우

그릴 스펙트로미터의 입·출력 마스크가 이상적일 경우에는 광학에서 가장 최적의 특성을 나타내는 S행렬을 V , W 대신 사용한 스펙트럼 복원법(S^{-1} 방법[2])을 사용한다. 이 방법을 이용하여 평균 MSE를 구하면 식 (5)는 다음과 같이 된다.

$$\epsilon = \frac{\sigma^2}{n^2} \text{Trace}[(S^{-1})^T S^{-1} (S^{-1})^T S^{-1}] \quad (6)$$

$$= \frac{16n^2 \sigma^2}{(n+1)^4} \approx \frac{16\sigma^2}{n^2}, (n \gg 1 \text{ 일 경우})$$

이는 기존의 HTS가 같은 조건에서 갖는 평균 MSE인 $\frac{4\sigma^2}{n}$ 에 비해 매우 작은 값이다.

2.3 마스크가 비이상적인 경우

마스크가 비이상적이므로 V , W 를 \hat{V} , \hat{W} 로 바꿔 표기한다. 따라서 식 (2)을 식 (7)와 같이 표현한다.

$$\eta = \hat{V} \hat{W}^T \phi + e \quad (7)$$

각 마스크는 투명, 불투명 상태에서 각각 100%, 0%의 투과율을 갖지 못한다. 즉 \hat{V} 행렬에 대하여 생각하면

행렬의 원소 $\hat{v}(i, j)$, $\hat{w}(i, j)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{v}(i, j), \hat{w}(i, j) = \begin{cases} \tau_{0i}, i\text{-번째 측정에서 } j\text{-번째 mask가 불투명일 때} \\ \tau_{0j}, i\text{-번째 측정에서 } j\text{-번째 mask가 투명일 때} \end{cases}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 일 때 } \hat{V}, \hat{W} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{02} & \tau_{13} \\ \tau_{01} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{03} \end{bmatrix}$$

전형적인 PDLC(polymer dispersed liquid crystal)마스크[6]의 투과율 특성은 τ_{1i} 값들은 대략 0.8이고 τ_{0i} 값들은 0에서 0.1까지의 값을 갖는다.

마스크가 비이상적인 특징을 나타낼 때는 T^{-1} 방법[5]을 이용하여 제안된 시스템에 적용하면 다음과 같다. 우선 다음과 같이 몇 가지의 행렬과 벡터를 정의하자.

$$D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$$

$$= \text{diag}(\tau_{11} - \tau_{01}, \tau_{12} - \tau_{02}, \dots, \tau_{1n} - \tau_{0n})$$

$$1 = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$$

$$\tau_{0n} = [\tau_{01} \ \tau_{02} \ \dots \ \tau_{0n}]^T$$

제안된 시스템의 출력 마스크 \hat{W} 는 이상적인 고정형 마스크이므로 마스크의 투과율 특성에 영향을 받지 않는다. 따라서 마스크의 제어행렬 \hat{V} , \hat{W} 는 S행렬을 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{V} = SD + 1\tau_{0n}^T \quad (8)$$

$$\hat{W} = S \quad (9)$$

식 (8)을 다시 전개하면 다음과 같다.

$$\hat{V} = S(D + S^{-1}1\tau_{0n}^T) = S(D + \frac{2}{n+1}1\tau_{0n}^T) \quad (10)$$

식 (10)에서 전달행렬 T 를 다음과 같이 정의한다.

$$T = D + \frac{2}{n+1}1\tau_{0n}^T \quad (11)$$

전달행렬 T 는 마스크의 투과율 특성이 이상적인 경우에는 단위행렬 I(identity matrix)와 같게 된다. 전달행렬 이용하면 실제값의 추정치는 식 (12)와 같다.

$$\hat{\phi} = (S^T)^{-1} T^{-1} S^{-1} \eta \quad (12)$$

S^{-1} 와 Sherman-Morrison공식[4]을 통하여 T^{-1} [5] 구하면 식 (13)와 같다.

$$T^{-1} = D^{-1} - q D^{-1}1\tau_{0n}^T D^{-1} \quad (13)$$

식 (13)에서 추정치를 구하기 위해 고속하다마드변환(FHT)[2, 3, 6]을 식 (14)과 같이 두번에 걸쳐 행한다.

$$\hat{\phi} = (S^T)^{-1} T^{-1} \hat{\psi} = (S^T)^{-1} \hat{\psi} \quad (14)$$

그럼 2는 식 (14)과 같이 2번의 FHT를 이용한 T^{-1} 기법의 스펙트럼 복원 과정의 블록 다이어그램이다.

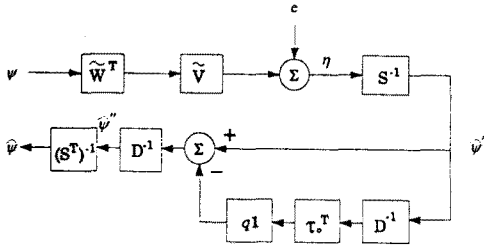


그림 2 T^{-1} 방법의 모델링
Fig. 2 Modeling of T^{-1} method

T^{-1} 기법을 이용한 오차행렬은 식 (15)와 같다.

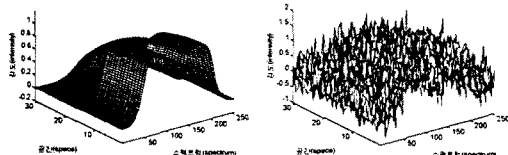
$$\xi = (S^T)^{-1} T^{-1} S^{-1} e \quad (15)$$

식 (15)로부터 식 (5)와 식 (6)을 이용하여 평균 MSE를 구하면 식 (16)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma^2}{n} \text{Trace}[(S^{-1})^T T^{-1} S^{-1} (S^{-1})^T (T^{-1})^T S^{-1}] \\ &\approx \frac{16\sigma^2}{(n+1)^4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_{jj}^4}, \quad (n \gg 1 \text{ 이면 } T^{-1} \approx D^{-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

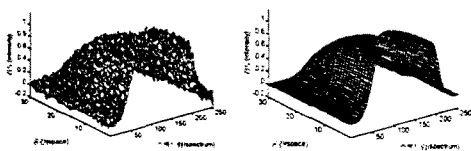
3. 모의 실험 결과 및 고찰

본 모의 실험에서는 그림 3과 같이 가상 시료에 대해 HTS와 제시한 HTIS를 사용하여 T^{-1} 스펙트럼 복원법을 이용하여 HTIS의 우수성을 보여주고자 한다. 시료로 쓰이는 광원은 공간영역에 따른 각기 다른 스펙트럼 정보를 갖는 이미지에 대한 스펙트럼 투시도이다.



(a) 원래의 스펙트럼 (b) 측정잡음을 고려할 경우
그림 3 입력 스펙트럼
Fig.3 Input Spectrum

측정잡음을 잡음의 원인으로 가정하여 정규 분포를 따르는 확률변수로 평균은 0이며 분산은 0.1로 정했을 때 시료는 그림 3.(b)와 같다. T^{-1} 기법을 이용한 스펙트럼의 복원시 L번의 공가산을 실시한다. 그림 4의 (a), (b)는 각각 기존의 HTS와 제시된 시스템을 이용한 스펙트럼 복원결과의 투시도를 나타낸다.



(a) HTS 스펙트럼 복원결과 (b) HTIS 스펙트럼 복원결과
그림 4 T^{-1} 기법을 이용한 시스템의 스펙트럼 복원
Fig.4 Recovered spectrum using T^{-1} method

표 1은 제시된 시스템과 기존의 HTS시스템의 평균 MSE를 공가산 횟수에 따라 비교한 결과이다. 이 결과로부터 제시된 시스템의 평균 MSE가 기존의 HTS에 비해 상당히 감소한다는 사실을 알 수 있다. 다시말해 제시된 시스템의 신호대 잡음비가 기존의 HTS에 비해 증가하게 된다. 또한 공가산 횟수가 증가할수록 제시된 시스템의 성능이 HTS에 비해 월등함을 알 수 있다.

표 1. 공가산 횟수에 따른 평균 MSE의 비교
Table 1. Average MSE comparison

공가산 \ 시스템	HTS	HTIS
1회	2.7×10^{-3}	4.25×10^{-5}
10회	2.7×10^{-4}	4.25×10^{-6}
100회	2.7×10^{-5}	4.25×10^{-7}

4. 결론

본 논문에서는 그림 스펙트로미터를 하다마드 트랜스폼 이미징 스펙트로미터에 적용하기 위해 right cyclic S행렬로 제어되는 기존의 그림 스펙트로미터에 left cyclic S행렬로 제어되는 시스템의 적용이 가능함을 보이고 있다. 한편 마스크가 비이상적인 경우 스펙트럼 복원을 위해 사용하는 T^{-1} 기법을 본 논문에서 제시한 시스템에 적용하여 고속알고리즘을 완성하였다. HTS와 달리 그림 스펙트로미터는 입·출력부에서 부호화를 수행하므로 개선된 스펙트럼을 얻을 수 있음을 보여주고 있다. 표1에서 보여주는 결과에서도 알 수 있듯이 제시된 시스템은 기존의 HTS에 비해 월등히 향상된 성능을 지니고 있음을 알 수 있다. 그러나 제시된 시스템은 2번의 부호화로 인해 스펙트럼 복원과정이 복잡하게 되어 기존의 HTS에 비해 복원시 많은 시간이 걸리게 된다.

[참고 문헌]

- [1] Ruth A. Dyer, Stephen A. Dyer, Brian K. Harms, Timothy W. Johnson and Jin Bae Park, "Implementation Problems in Hadamard Transform Spectrometry", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 39, No. 1, pp. 163-167, February 1990.
- [2] M. Harwit and N. J. A. Sloane, *Hadamard Transform Optics*, Academic Press, New York, 1979.
- [3] B. K. Harms, J. B. Park and S. A. Dyer, "On the Use of Fast Hadamard Transform for Spectrum-Recovery in Hadamard Transform Spectroscopy", *Applied Spectroscopy*, Vol. 46, No. 9, pp. 1358-1361, Nov. 1992.
- [4] G. H. Golub and C. F. Van Loan, "Matrix Computations", The Johns Hopkins University Press, Baltimore, pp. 3(1983).
- [5] T. W. Johnson, J. B. Park, S. A. Dyer, B. K. Harms and R. A. Dyer, "An Efficient Method for Recovering Optimal Unbiased Linear Spectrum-Estimate from Hadamard Transform Spectrometers Having Nonideal Masks", *Applied Spectroscopy*, Vol. 43, No. 5, pp. 746-750, July, 1989.
- [6] D. C. Tilotta, R. M. Hammaker, and W. G. Fateley, "A Visible Near-Infrared Hadamard Transform Spectrometer Based on a Liquid Crystal Spatial Light Modular Array: A New Approach in Spectrometry", *Applied Spectroscopy*, Vol. 41, pp. 727-734, 1987.