

고주파 과도신호의 파라미터 추정을 위한 칼만 필터링 기법에 관한 연구

이태훈 박진배 윤태성 고재원

연세대학교 전기공학과, 청원대학교 전기공학과, 유한전문대학 제어계측과

A Kalman Filtering Method for Estimation of Parameters of High Frequency Trans

Tae Hoon Lee, Jin Bae Park, Yoon Tae Sung, Kho Jae Won

Yonsie Univ., Changwon National Univ., Yuhan Junior College

Abstract - This paper presents a method for estimating parameters of high frequency transient signals when noise is added. The parameters to be estimated are the magnitude, frequency, and decay rate of the signals. An approach based on only the extended Kalman filter (EKF) is highly dependent on choosing a correct value of variance of noise. The proposed method adopts an adaptive Kalman filter (AKF). Having very little information of the noise, This method avoids deterioration of the filter performance caused by choosing an inaccurate variance of the noise. The dependence of the EKF method upon the noise variance and the efficiency of the AKF method are shown.

1. 서 론

변압기 등과 같은 전력기기를 사용할 때, 부하와 기기 사이에 위치한 스위치등과 같이 전기적으로 제어되는 시스템에서 나오는 전류나 전압에는 왜곡현상(distortion)이 일어난다. 이러한 왜곡현상은 스위치 주기나 외부제어 신호의 주기와 맞추어서 주기적으로 발생, 소멸하는데 이때의 주파수가 수십 KHz 까지 이르는 경우도 있는 고주파 신호이다. 이러한 고주파 신호는 전류나 전압에 왜곡현상을 일으킬 뿐만 아니라 계측기와 같은 민감한 전자기기에서 정확한 측정을 방해하는 등의 악영향을 미친다. 이러한 신호의 특성을 파악하여 적절한 대응을 하고자 신호의 주파수나 크기와 같은 파라미터들을 추정하는 연구가 필요하게 되었다.

이제까지의 연구 중 고주파 신호를 잡음이 섞인 60Hz 에 대한 하모닉(harmonic)으로 보고 파라미터들을 추정한 연구[1][2]는 Maximum Likelihood 방법을 사용하였으나 측정구간 동안 파라미터들이 변하지 않는다고 가정 한 연구들이었다. 추정하려는 신호를 고주파 과도신호로 보고 접근한 방법으로 AR과 ARMA 모델을 이용한 방법[3]은 변화하는 주파수를 잘 추정하였으나 신호의 크기를 알고 있다는 가정 아래에서 이루어 졌다.

확장된 칼만 필터(Extended Kalman Filter; EKF)를 이용한 파라미터 추정에 대한 연구[4][5]는 적절한 시스템 모델링에 의해 비교적 정확한 파라미터 추정을 얻을 수 있었으나 칼만 알고리즘에서 쓰이게 되는 시스템 잡음 공분산(system noise covariance) Q 와 측정잡음 공분산(measurement noise covariance) R 값을 반복실험에 의해서 필터의 결과가 좋아지는 값을 찾아내었다. 하지만 이러한 방법은 번거롭고 시간손실이 크다.

이에 본 연구는 Magill[6]이 제안한 적응 칼만 필터(Adaptive Kalman Filter; AKF)의 개념을 도입하여, 각각 다른 Q, R 값을 가지는 여러 개의 필터 중 최적의 결과를 산출하는 필터를 선택하는 방법을 제안한다. 제안하는 시스템은 잡음에 대한 정보를 가지고 있지 못할 때, 부적절한 Q, R 값을 대입함으로써 일어나는 필터의

오동작을 방지하는 이점을 가진다.

EKF 만을 사용한 필터의 오동작을 보이고 AKF에 의한 방법은 Q, R 값에 강인성을 가짐을 모의실험을 통해 보인다.

2. 본 론

2.1 확장된 칼만필터

다음과 같은 일반적인 이산시간 비선형 시스템 방정식과 측정 방정식을 세운다.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{w}_k \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k \quad (2.2)$$

위 식에서,

\mathbf{x}_k : 상태변수의 벡터

\mathbf{w}_k : 백색잡음과정인 시스템 잡음

\mathbf{z}_k : 시스템 출력의 측정값을 나타내는 벡터

\mathbf{v}_k : 백색잡음과정인 측정잡음

$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, k)$: \mathbf{x} 에 대하여 미분가능한 비선형 벡터함수

$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k)$: \mathbf{x} 에 대하여 미분가능한 상태변수와

측정값과의 관계를 나타내는 비선형 벡터함수

$\hat{\mathbf{x}}_k$ 를 이전 추정값이라 하고 $\Delta \mathbf{x}_k$ 를 상태변수와 이전 추정값과의 차이라 하면 식 (2.1)을 다음 식과 같이 $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k$ 일 때에 대해서 Taylor급수로 전개하여 선형화 되어진 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, k) \\ &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, k) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + h.o.t. \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + h.o.t. \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서 h.o.t.는 higher-order term을 나타내며 (2.3)으로부터 다음 식을 유도한다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} \cdot \Delta \mathbf{x}_k + h.o.t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

h.o.t.를 무시하여 얻어진 결과는,

$$\Delta \mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \cdot \Delta \mathbf{x}_k \quad (2.5)$$

여기서 Φ_k 는 상태전이행렬이며 다음과 같다.

$$\Phi_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} \quad (2.6)$$

같은 과정을 거친 후 선형화된 측정함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}_k &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} \cdot \Delta \mathbf{x}_k \\ &= \mathbf{H}_k \cdot \Delta \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2 적응 칼만필터

Magill[6]이 제안한 적응필터는 알지 못하는 파라미터를 α 라는 랜덤변수로 가정하고 적어도 그 분포를 알고 있을 때, 각 α 값에 대한 여러 개의 칼만 필터들을 병렬로 처리하는 방법이다.

\mathbf{x} 와 \mathbf{z} 가 가우시안 특성을 가질 때 조건 확률의 개념을 이용한 다음 식의 추정값을 최적값을 가진다.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}_k(\alpha_i) p(\alpha_i | \mathbf{z}_k) \quad (2.8)$$

여기서,

\mathbf{z}_k : k번째 과정까지의 모든 추정값

$p(\alpha_i | \mathbf{z}_k)$: \mathbf{z}_k 에 대한 α_i 의 조건확률밀도함수

$\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha_i)$: α_i 에 대한 칼만필터의 추정값

이 때의 $p(\alpha_i | \mathbf{z}_k)$ 는 Bayes 법칙에 의하면,

$$p(\alpha_i | \mathbf{z}_k) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \alpha_i) p(\alpha_i)}{\sum_{j=1}^N p(\mathbf{z}_k | \alpha_j) p(\alpha_j)} \quad (2.9)$$

$p(\alpha_i)$ 를 알고있을 때 $p(\mathbf{z}_k | \alpha_i)$ 는 다음 식에 의하여 구한다.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_k | \alpha_i) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2} (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{1/2}} \\ &\cdot \exp \left[-\frac{[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{k})]^2}{2(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)} \right] \cdot p(\mathbf{z}_{k-1} | \alpha_i) \end{aligned} \quad (2.10)$$

따라서 각 필터의 가중치 $p(\alpha_i | \mathbf{z}_k)$ 는 새로운 측정값이 들어올 때마다 변하며 그 중 가장 올바른 가정을 세운 필터의 가중치만 1로 수렴하고 나머지는 0이 된다.

2.3 과도신호 파라미터 추정예의 응용

Girgis 와 Qiu[5]는 한 주기의 과도신호를 다음과 같이 표현했다.

$$y(t) = A e^{-\lambda t} \sin(\omega_i t + \theta_i) + \nu(t) \quad (2.11)$$

A : 최고 크기 λ : 감쇠율 θ_i : 위상각

ω_i : 각주파수 $\nu(t)$: 잡음

확장된 칼만필터를 사용하기 위해 k번째 이산 상태변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} x_k^1 &= A \cos \theta_i \\ x_k^2 &= A \sin \theta_i \\ x_k^3 &= \omega_i \\ x_k^4 &= \lambda \end{aligned} \quad (2.12)$$

각 추정단계마다의 시간구간이 Δt 라면 식(2.2)의 비선형 함수 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{k})$ 는 삼각함수 공식에 의하여 식 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{k}) = e^{-x_k^4 \Delta t} [x_k^1 \sin(x_k^3 \Delta t) + x_k^2 \cos(x_k^3 \Delta t)] \quad (2.13)$$

따라서 식 (2.7)의 선형화 된 측정행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_k^T = \begin{bmatrix} e^{-x_k^4 \Delta t} \sin(x_k^3 \Delta t) \\ e^{-x_k^4 \Delta t} \cos(x_k^3 \Delta t) \\ e^{-x_k^4 \Delta t} [x_k^1 \cos(x_k^3 \Delta t) - x_k^2 \sin(x_k^3 \Delta t)] \Delta t \\ e^{-x_k^4 \Delta t} [x_k^1 \sin(x_k^3 \Delta t) + x_k^2 \cos(x_k^3 \Delta t)] \Delta t \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

또한 기준시간이 매 단계마다 $\omega_i \Delta t$ 씩 이동하게 되므로 상태변수 x_k^1 과 x_k^2 는 복소공간에서 회전하게 된다.

$$x_{k+1}^1 + j x_{k+1}^2 = e^{-x_k^4 \Delta t} (x_k^1 + j x_k^2) e^{j x_k^3 \Delta t} \quad (2.15)$$

식 (2.15)의 우항을 오일러 공식에 의해 전개하고 x_k^3 과 x_k^4 는 시스템 과정에 일정하다고 보면 (2.1)의

$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{k})$ 는 다음과 같이 정할 수 있다.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} e^{-x_k^4 \Delta t} [x_k^1 \cos(x_k^3 \Delta t) - x_k^2 \sin(x_k^3 \Delta t)] \\ e^{-x_k^4 \Delta t} [x_k^1 \sin(x_k^3 \Delta t) - x_k^2 \cos(x_k^3 \Delta t)] \\ x_k^3 \\ x_k^4 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

따라서 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{k})$ 를 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 에 대하여 선형화 시키면,

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

각 행렬요소들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= e^{-x_k^4 \Delta t} [\cos(x_k^3 \Delta t)] \\ \phi_{12} &= -e^{-x_k^4 \Delta t} [\sin(x_k^3 \Delta t)] \\ \phi_{21} &= e^{-x_k^4 \Delta t} [\sin(x_k^3 \Delta t)] \\ \phi_{22} &= e^{-x_k^4 \Delta t} [\cos(x_k^3 \Delta t)] \\ \phi_{13} &= e^{-x_k^4 \Delta t} [-x_k^1 \sin(x_k^3 \Delta t) - x_k^2 \cos(x_k^3 \Delta t)] \Delta t \\ \phi_{14} &= -e^{-x_k^4 \Delta t} [x_k^1 \cos(x_k^3 \Delta t) - x_k^2 \sin(x_k^3 \Delta t)] \Delta t \\ \phi_{23} &= e^{-x_k^4 \Delta t} [x_k^1 \cos(x_k^3 \Delta t) - x_k^2 \sin(x_k^3 \Delta t)] \Delta t \\ \phi_{24} &= -e^{-x_k^4 \Delta t} [x_k^1 \sin(x_k^3 \Delta t) + x_k^2 \cos(x_k^3 \Delta t)] \Delta t \end{aligned} \quad (2.18)$$

따라서 우리가 추정하고자 하는 파라미터인 신호크기, 주파수, 감쇠율은 각각 $\sqrt{(\hat{x}_k^1)^2 + (\hat{x}_k^2)^2}$, \hat{x}_k^3 , \hat{x}_k^4 로 생각할 수 있다.

2.4 적응 칼만 필터 모델링

2.2절의 적응 칼만 필터에서 시스템의 알지 못하는 파라미터 α 를 \mathbf{Q}_k 와 \mathbf{R}_k 로 정한다. 따라서 각 필터는 각기 다른 \mathbf{Q}_k , \mathbf{R}_k 값에 대해서 추정과정을 거친다. 이 때 \mathbf{Q}_k 와 \mathbf{R}_k 는 균일확률분포를 가진다고 가정하므로 $p(\alpha_i)$ 는 각 필터에서 1의 값을 가지게 한다. 또한 각 필터의 초기값들은 \mathbf{Q}_k , \mathbf{R}_k 와는 서로 독립이므로 초기 오차공분산행렬 \mathbf{P}_0 는 각 필터에서 같은 값을 가진다.

2.5 모의 실험

EKF 방법이 파라미터 추정에 있어서 \mathbf{Q}_k , \mathbf{R}_k 값에 상당히 의존함을 보이고 AKF 방법으로 이러한 결점을 보완할 수 있음을 보이기 위하여 컴퓨터 모의실험을 수행하였다. 식 (2.11)을 이용하여 우리가 추정하고자 하는 과도신호를 적절한 파라미터 값을 가지게 하고 발생시킨 다음 각 필터의 추정결과를 비교하였다. 이 때 잡음은 평균이 영이고 가우시안 분포를 가지는 백색잡음이며 분산은 0.02로 설정한다. 이러한 분산값은 100V를 기본단위로 하였을 때 과도신호 크기의 5-15%의 크기를 가지는 백색잡음을 가정하였을 때의 분산값이다. 신호의 각주파수는 20000(rad/sec) 이며, 감쇠율은 1000(1/sec)으로 설정하였다.

각 상태변수의 초기값 중 x_k^1 과 x_k^2 는 각 과도신호가 위상각 θ_i 에 따라서 똑같은 확률로 음 또는 양의 값을

고 단 한번만의 측정이 허락되며 실시간으로 적절한 대응을 취해야 하는 시스템이나 정확한 결과보다는 안정성이 요구되는 시스템으로 확장 적용될 수 있다.

4. 참고문헌

- [1] Langford B. White, "A Fast Recursive Algorithm for the Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Periodic Signal", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, pp. 3199-3202, Nov. 1993.
- [2] Ben James, Brian D. O. Anderson, and Robert C. Williamson, "Conditional Mean and Maximum Likelihood Approaches to Multiharmonic Frequency Estimation", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 1366-1375, Jun. 1994.
- [3] Y. T. Chan, J. M. M. Lavoie, and J. B. Plant, "A Parameter Estimation Approach to Estimation of Frequencies of Sinusoids" *IEEE Trans. Acoustics, speech, signal Processing*, vol. ASSP-29, pp. 214-219, Apr. 1981.
- [4] S. S. Stankovic, Marina Dragosevic, and M. Carapic, "Estimation of Frequencies of Sinusoids Using the Extended Kalman Filter", *IEEE Proc. Int. Conf. Communication Signal Processing*, 1984.
- [5] Adly A. Girgis, Jun Qiu, "Measurement of the Parameters of Slowly Time Varying High Frequency Transients" *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 38, pp. 1057-1063, Dec. 1989.
- [6] D. T. Magill, "Optimal Adaptive Estimation of Sampled Stochastic Process" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-10, pp. 434-439, Oct. 1965.

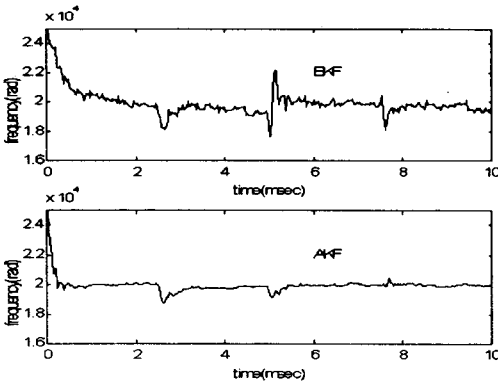


그림 1. 주파수 성분 추정결과 비교

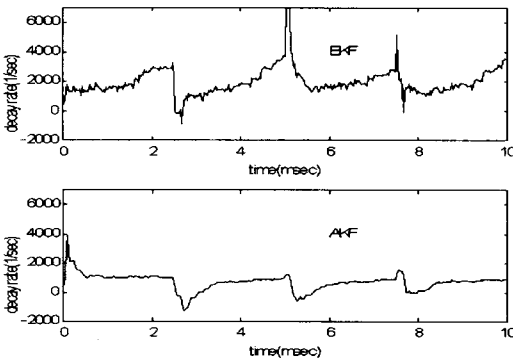


그림 2. 감소율 추정결과 비교

가지므로 초기값을 영으로 설정하였으며 x_k^3 과 x_k^4 는 실제값에서 벗어나게, EKF와 AKF에 있어서 동일하게 주었다. 여기서 AKF는 두 개의 필터 뱅크를 사용하였다.

EKF가 만족할 만한 결과를 보이지 못하는 값으로 P와 Q 값을 정하고 이 P, Q 값과 또 다른 P, Q 값을 각각의 AKF 필터 뱅크에 대입하였다.

그림 1에서 EKF와 AKF의 주파수 성분 추정결과를 비교하였다. EKF가 단독으로 추정할 때는 수렴속도가 느리고 갑작스런 과도신호의 발생으로 인하여 불안정한 결과를 보였지만, AKF는 이러한 결과를 보이는 필터를 버리고 더 나은 결과를 보이는 필터를 선택하여 빠른 수렴 속도와 안정적인 결과를 보였다. 그림 2에서 EKF는 감소율을 제대로 추정하지 못함에 반하여 AKF는 신호 주기의 1/3 정도 경과 후는 실제값에 수렴함을 볼 수 있다.

3. 결 론

확장된 칼만 필터(EKF)를 이용한 고주파의 과도신호에 대한 파라미터 추정에 있어서 기존의 방법은 양호한 필터 결과가 유도 되도록 시스템 오차공분산 Q와 측정 오차공분산 R을 경험적으로 선택하여야 했다. 하지만 본 연구에서 도입한 적응성을 가지는 칼만 필터(AKF)에 의한 방법은 각기 다른 Q, R 값을 가지는 여러 개의 필터 중에서 최적의 결과를 산출하는 필터를 골라 낼 수 있다. 따라서 전체 시스템은 오차공분산값에 강인성을 보이고 필터 결과가 악화됨을 방지할 수 있는 장점을 가진다.

제안된 시스템은 Q와 R에 대한 사전정보가 거의 없