

웨이브렛과 유전 알고리즘을 이용한 시스템 근사화

이영석* 김동옥** 서보혁***

*영진전문대 전기과 **경북대 전기공학과 ***경북대 전기전자공학부

The Study of Wavelet Theory for System Identifications

Young-seog Lee*, Dong-ok Kim**, Bo-hyeok Seo***

*Yeung-jin junior college..**Dept. of Electrical Eng. K.N.U. ***School of Electronic and Electrical Eng. K.N.U.

Abstract - This paper discusses approximation modelling of discrete-time linear time-varying system(LTVS). The wavelet theory and genetic algorithm are considered as a tool for representing and approximating a LTVS. The joint time-frequency properties of wave analysis are appropriate for describing the LTVS. Simulation results is included to illustrate the potential application of the technique.

1. 서 론

시변 선형 시스템의 해석에 있어서는 선형 시스템의 해석 기법으로는 시변성에 대한 보상이 적절치 못하기 때문에 많은 모델링 오차를 가지게 된다. 그래서 이러한 시변 선형 시스템의 해석에는 푸리에 변환등과 같은 수학적 기법을 이용하여 시변성에 대한 해석이 시도되었고 이를 이용한 기법들이 개발 되었다. 그러나 푸리에 변환은 무한차수의 시리즈로 표현되며 신호가 짧은 시간에서의 non-stationary를 가질 때에는 푸리에 변환만으로는 표현에 한계가 있다. 이러한 짧은 시간에 윈도우를 사용하는 기법을 이용하여 신호의 해석이 쉬워진다. 이러한 기법을 STFT이라한다. 그러나 STFT는 단일 해상도를 가지기때문에 정밀한 신호의 해석에는 많은 계산량이 존재하게 된다.

본 논문에서는 시변 선형 시스템의 모델링을 푸리에 변환의 특성을 가지면서 다해상도 해석이 가능한 웨이브렛 시리즈 기법[1,2,3]을 이용하여 시변 시스템 임펄스 응답의 근사화를 이루며, 이러한 웨이브렛 시리즈 표현이 행렬 계산의 형태로 표현되고 웨이브렛 망[4]은 이러한 표현에 기인하여 구성되며 웨이브렛의 계수가 가중치 행렬로 나타난다. 웨이브렛 계수의 최적값을 구하기 위해 최적탐사법에 주로 사용되는 유전알고리즘을 이용하여 계수 행렬을 가장 적절한 값으로 수렴시키는 방법을 사용하며 이의 결과가 시스템의 결과에 추정함을 보인다. 사례연구는 시변 선형 시스템[5]을 사용하였으며, 임펄스 함수의 근사화와 입력에 따른 시스템의 출력을 비교함으로써 함수 근사화가 이루어짐을 입증한다.

2. 웨이브렛 망의 구성

2.1 웨이브렛 이론(6,7)

웨이브렛 변환은 비정상신호의 해석에 대해서 지금까지 많이 사용되어왔던 STFT이나 Gabor변환과는 다른 관점을 제공하고 있어서 관심을 끌고 있다. STFT가 하나의 해석 윈도우를 사용하는것에 비해서 웨이브렛 변환은 짧은 윈도우, 긴 윈도우등 여러 윈도우를 사용하여 대상 신호의 넓은 주파수

대를 모두 해석 할 수 있는 방법이다. 어미 웨이브렛이 되기 위한 함수는 허용적이어야한다. 하나의 $L^2(R)$ 함수 g 는 다음 조건을 만족하는 허용함수이다.

$$C_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1)$$

여기서 $G(\omega)$ 는 함수 g 의 푸리에 변환이다.

웨이브렛 변환 연산자 Φ_g 를 사용하면 주어진 허용함수 g 에 대해서 임의의 신호 $y(t)$ 의 웨이브렛 변환은 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi_g y(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int y(t) g^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt \quad (2)$$

여기서 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{g_{a,\tau}}$ 는 내적을 나타낸다. 그리고, 웨이브렛 변환 요소 $g_{a,\tau}$ 는 $g(t)$ 가 축적파라미터 a 에 의해서 축적되고, 병진파라미터 τ 에 의해서 이동된 형태이다. 이것은 임의의 (a, τ) 에서 웨이브렛 계수가 축적의 넓은 범위에 대해서 잘 비교되거나 결합되도록 한다. 특정한 응용분야에서 최적의 동작을 위해서는 자유롭게 어미 웨이브렛을 선택할 수 있어야 한다.

웨이브렛 역변환식은 웨이브렛 변환으로부터 유도된다. 즉, $y(t)$ 와 $g(t)$ 가 유한 에너지함수이고 $g(t)$ 가 허용 어미 웨이브렛이면, 웨이브렛 역변환 W_g^{-1} 는 축적-병진평면에서의 평면을 1차원의 시간 또는 공간 평면으로 대응시킨다.

$$\Phi_g^{-1} : \Phi_g(a, \tau) \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_g y(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot g \left(\frac{t-\tau}{a} \right) \frac{d\tau da}{a^2} \quad (3)$$

역변환은 축적되고 이동된 형태의 어미 웨이브렛이 적절하게 가중된 합에 의해서 원래의 신호를 생성하며, 가중치는 웨이브렛 계수 $\Phi_g y(a, \tau)$ 이다. 역변환은 2차원 축적-병진 공간에 대한 합이며, 시간과 공간 평면 함수는 웨이브렛 평면 계수 $W_g y(a, \tau)$ 와 어미 웨이브렛 g 로부터 생성된다.

지금까지 유도된 연속 웨이브렛 변환을 이산 시간형태로 나타내면 다음과 같다.

$$DWT_x(m, n) = \sum_k x(k) \Psi_{m,n}(k) \quad (4)$$

$$\Psi_{m,n}(k) = a_0^{-\frac{m}{2}} \Psi \left(\frac{k - nb_0 a_0^m}{a_0^m} \right) \quad (5)$$

여기서, $\Psi(k)$ 는 어미웨이브렛이며, 축적과 병진

을 나타내는 m 과 n 은 a_0 와 b_0 에 따라 팽창과 이동을 한다.

임의의 신호 $f(x)$ 의 웨이블릿 표현식과 신호의 복원과정은 식(6), (7)과 같다.

$$DWT(m,n) = \langle f(x), \Psi_{m,n}(x) \rangle \quad (6)$$

$$f(x) = \sum_{m,n} \langle f(x), \Psi_{m,n}(x) \rangle \Psi_{m,n}(x) \quad (7)$$

여기서 $\Psi_{m,n}(x)$, $\Psi_{m,n}(x)$ 은 서로 상대 웨이블릿 함수[11]이다.

2.2 웨이블릿 망의 구성

안정한 이산 시간 선형 시변 시스템을 식 (8)과 같이 가정한다.

$$y(k+1) = \sum_l H(k,l)x(l) \quad (8)$$

여기서, $x(l)$ 과 $d(k+1)$ 은 각각 시간 l, k 에서 시스템의 입력과 출력 신호이다.

그러므로 입력 $x(l)$ 에 대한 시스템 출력 $y(k+1)$ 을 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$y(k+1) = \sum_l H(k,l)x(l) \quad (9)$$

여기서 $y(k+1)$ 은 근사함수의 출력이다.

임펄스 응답 함수 $H(k,l)$ 에 웨이블릿 시리즈를 적용하면 식(10)과 같이 표현할 수 있다.

$$H(k,l) = \sum_m \sum_n H_{m,n}(k) \Phi_{m,n}(l) \quad (10)$$

여기서 $\Phi_{m,n}(l)$ 는 웨이블릿 함수이다.

식 (10)을 식 (9)에 대입하면 식 (11)과 같은 시스템 표현식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \sum_l H(k,l)x(l) \\ &= \sum_l \sum_m \sum_n H_{m,n}(k) \Phi_{m,n}(l)x(l) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $H_{m,n}(k)$ 은 $H_{m,n}(k) = [h_1(k) h_2(k) \cdots h_M(k)]$, $h_m(k) = [h_{m,1}(k) h_{m,2}(k) \cdots h_{m,N}(k)]$ 행렬이다.

$\Phi_{m,n}(l)$ 은 $\Phi_{m,n}(l) = [\Phi_1(l) \Phi_2(l) \cdots \Phi_M(l)]^T$, $\Phi_m(l) = [\Phi_{m,1}(l) \Phi_{m,2}(l) \cdots \Phi_{m,N}(l)]^T$ 의 행렬이다.

그리고, $H_{m,n}(k)$ 는 웨이블릿 함수로 나타낸 웨이블릿 시리즈의 계수행렬로서 표현이 되므로 $H(k,l)$ 은 그림 1과 같이 망의 형태로 표현할 수 있으며 이는 RBF를 이용한 망과 유사한 모양을 하고 있다. 여기서 이러한 계수행렬인 $H_{m,n}(k)$ 은 시간 k 에 대한 함수로 되어 있다. 그러므로 $H_{m,n}(k)$ 를 시간 k 에서의 웨이블릿 분열을 이용하여 다시 정리하면 식 (12)와 같이 된다

$$H_{m,n}(k) = \sum_{\alpha=0}^Q \sum_{\beta=0}^P \Psi_{\alpha,\beta}(k) h_{m\alpha\beta} \quad (12)$$

여기서 $\Psi_{\alpha,\beta}(k)$ 는 웨이블릿 함수이다.

식(12)를 첨자 n 에 대해서 풀어서보면 식(13)과 같다.

$$\begin{bmatrix} h_{m,1}(k) \\ h_{m,2}(k) \\ \vdots \\ h_{m,N}(k) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sum_{\alpha=0}^Q \sum_{\beta=0}^P \Psi_{\alpha,\beta}(k) h_{m1\alpha\beta} \\ \sum_{\alpha=0}^Q \sum_{\beta=0}^P \Psi_{\alpha,\beta}(k) h_{m2\alpha\beta} \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=0}^Q \sum_{\beta=0}^P \Psi_{\alpha,\beta}(k) h_{mN\alpha\beta} \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

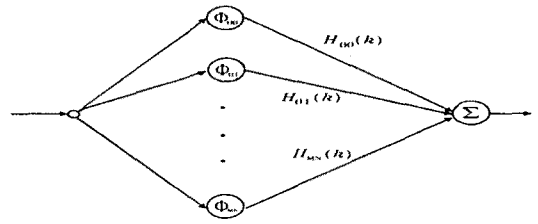


그림 1. 웨이블릿 망
Fig. 1. Wavelet network

여기서, $h_{m\alpha\beta}$ 는 상수 행렬로서 $\Psi_{\alpha,\beta}(k)$ 웨이블릿 함수의 계수 행렬이 되며 시리즈의 합으로 표현할 수 있다. 여기서, $h_{m\alpha\beta}$ 은 $[op \times mn]$, $\Psi_{\alpha,\beta}(k)$ 은 $[1 \times op]$ 행렬이 된다.

식 (12)를 식 (11)에 대입하면 시스템의 임펄스 함수의 최종 표현은 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$H(k,l) = \sum_m \sum_n \sum_{\alpha=0}^Q \sum_{\beta=0}^P \Psi_{\alpha,\beta}(k) h_{m\alpha\beta} \Phi_{m,n}(l) \quad (14)$$

여기서 $\Psi(k)$, $\Phi(l)$ 은 어미 웨이블릿 함수이다. 식 (15)의 표현식을 이용하여 그림 1의 웨이블릿 망을 확장할 수 있으며 그 결과가 그림 2에 나타나있다. 그림 2의 모양은 인공신경회로망과 유사한 형태를 가지나 그 구성 체계는 완전히 다른 형태이다. $h_{m\alpha\beta}$ 는 확장된 웨이블릿 망의 가중치 행렬이 된다.

결국 선형 시변 시스템의 전체 표현은 식 (14)를 식 (9)에 대입하면 식 (15)와 같이 표현된다.

$$y(k+1) = \sum_{l=1}^k \sum_m \sum_n \sum_{\alpha=0}^Q \sum_{\beta=0}^P \Psi_{\alpha,\beta}(k) h_{m\alpha\beta} \Phi_{m,n}(l)x(l) \quad (15)$$

시스템에 대한 최적의 근사 함수를 구하기 위해서는 식 (15)의 가중치 행렬인 $h_{m\alpha\beta}$ 의 최적값을 어떻게 구할 것인가가 문제이다.

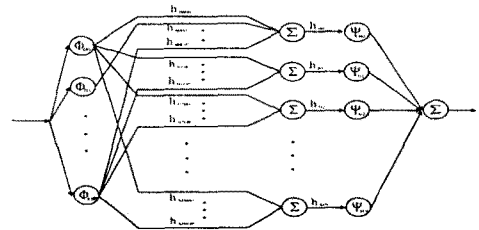


그림 2. 확장된 웨이블릿 망
Fig. 2. Extended wavelet network

3. 유전알고리즘

자연의 유전학 또는 자연도태의 원리에 근거한 유전 알고리즘[8]은 주어진 탐색공간을 확률적인 방법과 개체간의 체계적인 정보교환을 통해 탐색공간을 조사해감으로서 주위환경에 알맞은 가장 적절한 해를 얻고자하는 최적화 알고리즘으로 단순히 확률적 탐색방법과는 구별된다.

그 특징으로는 주어진 영역에서 랜덤하게 파라미터 집합을 부호화하여 단일점이 아닌 해집단에서 전역적으로 탐색을 하며 확률적 규칙을 사용하고 단지 목적함수의 정보만을 사용하며 다변수와 제약 조건이 많은 복잡한 비선형 최적화 문제에 특히 유용하다. 또한 본 논문에서는 코딩시간의 감소와 정확성을 갖는 실변수 벡터스팅을 사용하였다.

a)부호화 및 초기화 : 어진 문제의 제약조건을 고려하여 랜덤하게 N개의 해를 생성하는 과정이며 초기 해

집단을 생성한다.

b)평가 : 스트링을 디코딩하여 주어진 목적함수에 따라 적합도를 계산한다.

c)복제 : 자연 생태계의 적자생존의 원리를 이용한 것으로 높은 적합도를 가진 염색체일수록 다음세대에 복제될 확률이 높다.

d)교차 : 두벡터의 선형조합으로 정의될 수 있는데 복제된 개체들 가운데 교차 확률에 따라 교차를 한다.

e)돌연변 : 국부적 최적점으로 수렴을 방지하기 위해서 적합도에 관계없이 돌연변이 확률 만큼 개체안에서 임의로 변형한다.

4. 사례연구와 검토

전체 시스템의 블록 다이어그램은 그림 3과 같다.

사례연구에 사용한 시스템[5]은 식(16)과 같은 시변 선형 시스템이다.

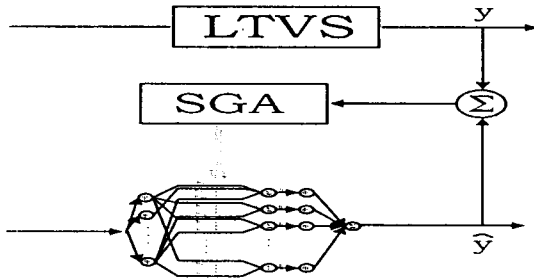


그림 3 근사화 네트워크

Fig 3. Approximation network

$$H(k,l) = \frac{k}{256} h_1(l) + (1 - \frac{k}{256}) h_2(l) \quad (16)$$

여기서 $h_1(l), h_2(l)$ 은 식 (17)과 같다.

$$H_1(z) = \frac{z^{-3}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.41z^{-2} + 0.267z^{-3}} \quad (17)$$

$$H_2(z) = \frac{0.85z^{-3}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.475z^{-2} + 0.87z^{-3}}$$

시스템의 출력 $d(k)$ 와 근사 함수의 출력 $y(k)$ 의 차를 식 (18)과 같이 나타내며, 식 (19)는 오차에 대한 에너지 함수이다.

$$e(k) = d(k) - y(k) \quad (18)$$

$$J = E\{|e(k)|\}^2 \quad (19)$$

$$Fitness = \frac{1}{1+J} \quad (20)$$

에너지 함수를 최소로 하는 최적인 상태의 근사 함수를 이루는 최적의 계수를 구하기 위해서 계수 조절이 필요하다. 이러한 계수 조절을 위한 유전알고리즘의 평가식으로는 식 (20)과 같다.

본 논문의 사례연구에 사용된 어미 웨이블렛[3,9]은 Shannon 웨이블렛과 2차미분 Gaussian 함수를 사용하였고 망의 계수의 초기값은 모두 유전 알고리즘에서 랜덤하게 발생하였으며 이러한 두가지 웨이블렛 함수의 주파수 응답은 대역필터의 특성을 가지는 것으로서 원하는 주파수 영역의 선택에 따라 웨이블렛의 변수를 선택함으로써 특정대역의 신호를 얻을 수 있다

계수 행렬의 학습이 끝난후에 시스템과 근사함수를 비교하기위한 시스템의 입력은 식(21)과 같다. 그림 4는 이러한 근사함수의 응답을 나타내고 있다.

$$x(k) = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi k}{25}\right) + \frac{6}{5} \cos\left(\frac{4\pi k}{125}\right) \quad (21)$$

시변 특성을 나타내고 있는 그림 4의 시스템 응답에

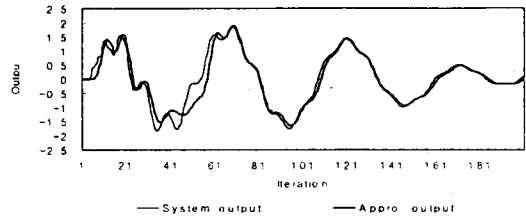


그림 4. 시스템과 근사화 함수의 응답 비교
Fig. 4. Comparison between real, approximate

value and error
서 근사함수는 잘 추종됨을 알 수 있다. 그림 5는 유전 알고리즘에 의해 나타나는 세대간의 평가값을 나타낸것이다.

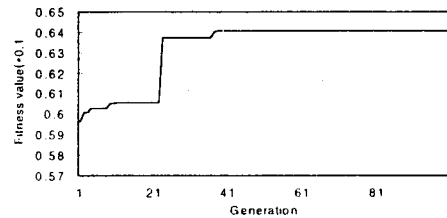


그림 5 유전 알고리즘의 세대간 평가값
Fig 5 Fitness value of generation

5. 결론

본 논문에서는 이산 시간 시변 시스템의 임펄스 응답의 근사화를 위한 기법으로서 다해상도 해석이 가능한 웨이블렛 변환 기법과 계수의 값을 찾기위한 방법으로 유전 알고리즘을 사용하여 시스템의 함수 근사화에 적용할 새로운 기법을 제안하였다.

웨이블렛 계수로 이루어진 상수 행렬을 이용한 근사 기법을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 시스템의 응답과 근사 함수의 출력과 비교하고, 시스템의 임펄스 응답과 비교함으로써 근사화가 잘 이루어 짐을 확인할 수 있었다.

참고 문헌

1. G. Strang, T. Nguyen, "Wavelets and Filter Banks", Wellesley-Press, 1996.
2. M. I. Doroslovacki, H. Fan, "Wavelet -Based Linear System Modeling and Adaptive Filtering", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, no. 5, pp. 1156-1167, 1996.
3. Y. T. Chan, "Wavelet Basics", Kluwer Academic Publisher, 1995.
4. Q. Zhang, A. Benveniste, "Wavelet Networks", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, no. 6, 1992.
5. H. Rotstein and S. R, "Gabor Transform Approximation of Time-Varying Systems", *Proc. American Control Conference*, pp. 242A-2429, 1995.
6. M. Vetterli, J. Kovacevic, "Wavelets and subband coding", Prentice hall, 1995.
7. N. H. Nielsen, M. V. Wickerhauser, "Wavelets and Time-Frequency Analysis", *Proc. IEEE*, vol. 84, no. 4, pp. 523-540, 1996.
8. David E. Goldberg, "Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning" ADDISON-WESLEY, 1989
9. A. Cohen, J. Kovacevic, "Wavelets: The Mathematical Background", *Proc. IEEE*, vol. 84, no. 4, pp. 514-522, 1996.