

컨벡스 최적화를 이용한 혼합  $H_2/H_\infty$  필터의 설계

\*진승희, \*나원상, \*\*윤태성, \*박진배, \*\*\*최윤호  
 \*연세대학교 전기공학과, \*\*창원대학교 전기공학과, \*\*\*경기대학교 전자공학과

Design of a Mixed  $H_2/H_\infty$  Filter Using Convex Optimization

\*Seung Hee Jin, \*Won Sang Ra, \*\*Tae Sung Yoon, \*Jin Bae Park, \*\*\*Yoon Ho Choi  
 \*Dept. of Electrical Engineering, Yonsei University  
 \*\*Dept. of Electrical Engineering, Changwon National University  
 \*\*\*Dept. of Electronic Engineering, Kyonggi University

**Abstract** - This paper gives a simple parameterization of all stable unbiased filters to solve the suboptimal mixed  $H_2/H_\infty$  filtering problem. Using the central filter, mixed  $H_2/H_\infty$  filter is designed which minimizes the upper bound for the  $H_2$  norm of the transfer matrix from a white noise to the estimation error subject to an  $H_\infty$  norm constraint on the transfer matrix from an energy-bounded noise to the estimation error. The problem of finding suitable estimator gain can be converted into a convex optimization problem involving linear matrix inequalities.

1. 서 론

프로세스 잡음이 존재할 경우에 잡음이 섞인 측정 신호를 바탕으로 상태를 추정하는 문제는 많은 공학 응용 분야에서 중요한 문제를 구성하고 있다. 주어진 필터의 성능을 평가하는 방법으로서 상태 추정 오차 신호의 크기 즉, 놈(norm)을 측정하는 것이 일반적이라 할 수 있다 [1]. 이와 같은 성능 지수들은 보통 잡음 신호에 대한 사전 지식의 정도에 따라 서로 다르게 정의되는데, 가장 대표적인 것으로서  $H_2$  놈과  $H_\infty$  놈을 들 수 있다. 고전적인  $H_2$  필터링 방법에서는 잡음의 특성을 알고 있다는 가정 하에서 오차 신호의  $L_2$  놈을 최소화한다 [2]. 반면에 최근 몇 년간 많은 관심을 불러모으고 있는  $H_\infty$  필터링 방법에서는 플랜트에 유입되는 잡음 신호가 유한 전력(혹은 유한 분산)을 갖고 있다는 가정만을 필요로 할 뿐, 그 외의 어떠한 사전 지식도 필요로 하지 않는다 [3]. 실제 적용 측면에서 볼 때, 주어진 플랜트에 유입되는 잡음 신호들은 위에서 언급된 두 가지 형태의 결합으로서 구성되는 경우가 많다 [4][5]. 이러한 이유로 인하여 두 가지 형태의 잡음들을 동시에 고려하는 혼합  $H_2/H_\infty$  필터링의 개념이 도입되기 시작하였다 [6].

본 논문에서는 최근 시스템 및 제어 이론의 많은 분야에서 주목받고 있는 컨벡스 최적화 기법인 선형 행렬 부등식 [7][8]을 이용하여  $H_\infty$  제한조건하에서  $H_2$  놈의 상한값을 최소화하는 수정된 혼합  $H_2/H_\infty$  필터링 문제의 해를 구한다. 이를 위하여 모든 안정한 무편향 필터들을  $RH_\infty$  공간에 속하는 전달 함수  $Q(s)$ 로서 매개변수화하고 이들중  $Q(s)=0$ 에 해당하는 중앙(central) 필터를 사용하여 주어진 문제를 푼다.

2. 안정한 무편향 필터의 매개변수화

다음과 같이 두 개의 잡음  $w_1$ 과  $w_2$ 를 포함한 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_2 w_2 + B_\infty w_\infty & x(0) &= x_0 \\ z &= C_1 x + D_{12} w_2 + D_{1\infty} w_\infty \\ y &= C_2 x + D_{22} w_2 + D_{2\infty} w_\infty \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x \in R^n$ 는 상태 변수,  $z \in R^r$ 는 추정하고자 하는 신호이며  $y \in R^m$ 는 측정 신호이다.  $w_2 \in R^p$ 는 스펙트럼 속성이 알려져 있는 기지의 백색 잡음 신호이고,  $w_\infty \in R^q$ 는 유한 에너지를 갖는 미지의 잡음 신호이다. 이제, 위의 시스템에 대하여 다음과 같은 가정을 한다.

(A1)  $(A, C_2)$ 는 검출 가능(detectable)하다

본 절에서는 혼합  $H_2/H_\infty$  필터를 설계하기 위한 사전 단계로서 전달 함수 행렬  $Q(s) \in RH_\infty$ 를 통하여 모든 안정한 무편향 필터를 매개변수화 한다. 이 때, 안정하다는 것은 주어진 필터가  $RH_\infty$ 에 속한다는 것을 의미하며, 무편향 되었다는 것은 모델링 오차와 잡음 신호가 없을 때 임의의 입력 신호에 대하여 상태 추정 오차가 영으로 감소한다는 것을 의미한다 [9]. 먼저 다음과 같은 안정한 필터  $\Sigma_j$ 를 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A \hat{x} + x_0 \delta(t) + L(y - C_2 \hat{x}) \\ &= (A - LC_2) \hat{x} + x_0 \delta(t) + Ly \\ \hat{z}' &= C_1 \hat{x} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 행렬  $L$ 은  $A' = A - LC_2$ 를 안정하게 하는 실계수 행렬이며 이는 앞의 가정으로 인해 적어도 하나는 반드시 존재한다 [1]. 잡음 신호들이 존재하지 않을 경우, 시스템 (1)과 필터 (2)로부터 이노베이션 프로세스는 다음과 같이 정의된다.

$$\nu = y - C_2 \hat{x} = C_2(x - \hat{x}) \quad (3)$$

이제, 위의 기호들을 사용하여 다음과 같은 보조 정리를 얻을 수 있으며, 이의 증명은  $\hat{x}$ 에 대한 중첩 원리를 이용하면 된다.

보조정리 2.1: 이노베이션 프로세스  $\nu$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\nu = \bar{D}y - \bar{N}x_0\delta(t) \quad (4)$$

여기서  $\bar{D}^{-1}\bar{N}$ 은 다음과 같은 시스템 (5)에 대한 좌행렬 분수 표현 (left Matrix Fraction Description: 이하 MFD로 표시)[10]이며

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + x_0\delta(t), & x(0_-) &= 0 \\ y &= C_2x \end{aligned} \quad (5)$$

각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{D} = \{I - C_2(sI - A')^{-1}L\} \quad (6.1)$$

$$\bar{N} = C_2(sI - A')^{-1} \quad (6.2)$$

위의 보조 정리 2.1을 이용하여 다음과 같이 모든 안정한 무편향 필터들을 매개변수화 할 수 있다.

**정리 2.2:** 시스템 (1)에 대하여 가정 (A1)이 성립한다고 하자. 그러면 다음의 두 조건들은 상등하다.

- (i)  $\Sigma_f$ 는 안정한 무편향 필터이다.
- (ii)  $\Sigma_f$ 는 임의의  $Q(s) \in RH_\infty$ 에 대하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (A - LC_2)\hat{x} + x_0\delta(t) + Ly \\ \hat{z} &= \hat{z}' + Q(s)\nu \end{aligned} \quad (7)$$

**증명:** (ii)  $\rightarrow$  (i): 식 (2), (3)의 기호를 사용하여 다음과 같은 신호를 정의하자.

$$\hat{x}_{su} = \hat{x} + Q'(s)\nu \quad (8)$$

여기서  $Q'(s)$ 는  $RH_\infty$ 에 속하는 임의의 전달 함수 행렬이다. 식 (2)로부터  $\hat{x}$ 는 안정한 추정값이므로  $\hat{x}_{su}$ 역시 안정하다. 또한  $\hat{x}$ 가 무편향이므로  $\nu$ 는 영으로 수렴하게 되고, 따라서  $\hat{x}_{su}$ 도 역시 무편향 되었다고 말할 수 있다. 이제 위 식의 양변에  $C_1$ 을 곱하면 충분조건은 증명된다.

(i)  $\rightarrow$  (ii):  $\hat{x}_{su}$ 가 안정한 필터  $\Sigma_f$ 의 출력이라 하면 이는 임의의 행렬들  $X, Y \in RH_\infty$ 에 대하여 다음과 같은 구조로서 항상 표현될 수 있다.

$$\hat{x}_{su} = X'x_0 + Y'y \quad (9)$$

마찬가지로  $\hat{x}$ 는 안정하므로, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{x} = Xx_0 + Yy \quad (10)$$

위의 기호를 사용하면, 시스템 (1)의 초기값  $x_0$ 로부터  $\hat{x}_{su} - \hat{x}$ 까지의 전달함수는 아래와 같고,

$$(X' - X) + (Y' - Y)ND^{-1} \quad (11)$$

여기서  $ND^{-1}$ 는 시스템 (5)에 대한 우 MFD이다.  $\hat{x}_{su}$ 와  $\hat{x}$ 가 무편향이 되기 위해서는 초기값  $x_0$ 로부터  $\hat{x}_{su} - \hat{x}$ 까지의 전달함수가 영이 되어야 한다. 그러므

로 식 (11)으로부터 다음이 성립해야 된다.

$$(X' - X)D + (Y' - Y)N = 0 \quad (12)$$

만일  $D$ 와  $N$ 이 우 서로소(right coprime)라 하면, 식 (12)의 모든 해는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$X' - X = Q' \bar{N} \quad (13.1)$$

$$Y' - Y = Q' \bar{D} \quad (13.2)$$

이제 위의 두 식과 식 (9), (10)으로부터 다음의 방정식을 얻는다.

$$\hat{x}_{su} = \hat{x} + Q'(s)[\bar{D}y - \bar{N}x_0] \quad (14)$$

식 (14)에 식 (4)를 대입하면 식 (8)을 얻으며, 양변에  $C_1$ 을 곱하면 조건 (ii)에서의 식 (7)과 같은 필터  $\Sigma_f$ 를 얻게 된다.  $\square$

정리 2.2에서는 모든 안정한 무편향 필터를 임의의 전달 함수 행렬  $Q(s) \in RH_\infty$ 를 통하여 매개변수화 하였는데, 이는 Youla 매개변수화의 필터링 유사(analogue)라 할 수 있다. 또한 참고 문헌 [11]의 정리에 의하면, 혼합  $H_2/H_\infty$  필터링 문제에서 동적(dynamic)  $Q(s)$ 를 사용함으로써 더 나은 성능을 기대할 수 없다는 것이 증명되었으므로 본 논문에서는 필터  $\Sigma_f$ 의 식 (7)에서  $Q(s) = 0$ 에 해당하는 중앙  $H_2/H_\infty$  필터만을 고려하기로 하고, 시스템의 초기값은  $x_0 = 0$ 로 설정한다.

### 3. 혼합 $H_2/H_\infty$ 필터링 문제

혼합  $H_2/H_\infty$  필터링의 성능 지수를 정의하기 위하여 먼저 주어진 시스템 (1)에 중앙 필터 (7)를 적용하였을 경우, 이에 따른 오차 시스템은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A'\eta + B_{e2}w_2 + B_{e\infty}w_\infty \\ e_z &= C_1\eta + D_{12}w_2 + D_{1\infty}w_\infty \end{aligned} \quad (15)$$

$$(\text{단, } B_{e2} = B_2 - LD_{22}, B_{e\infty} = B_\infty - LD_{2\infty})$$

여기서  $\eta = x - \hat{x}$ 는 오차 시스템의 상태 변수이고,  $e_z = z - \hat{z}$ 는 상태 추정 오차를 나타내며, 이를 전달 함수로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$e_z = T_2w_2 + T_\infty w_\infty \quad (16)$$

위의 식에서 각각의 전달 함수는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} T_2 &= C_1(sI - A')^{-1}B_{e2} + D_{12} \\ T_\infty &= C_1(sI - A')^{-1}B_{e\infty} + D_{1\infty} \end{aligned} \quad (17)$$

이와 같은 환경하에서  $H_2$ 와  $H_\infty$  필터링 성능 지수들을 결합한 다음과 같은 형태의 제한 최적화 문제를 정의할 수 있다.

#### 제한 최적화 문제 1

$\|T_\infty\|_\infty < \gamma$ 를 만족하는 모든 안정한 무편향 필터들 중에서  $\|T_2\|_2$ 을 최소화하는 필터  $\Sigma_f$ 를 구하라.

그러나 현재까지는 위의 문제에 대한 어떠한 분석적인 해도 알려져 있지 않을 뿐만 아니라, 컨벡스 최적화 문제로 변환할 경우에도 무한 차원을 가지므로 계산상의 어려움이 있다[11]. 따라서 본 논문에서는 전달 함수  $T_2$ 의  $H_2$  놈 자체를 최소화하지 않고 이에 대한 상한값을 최소화하는 수정된 혼합  $H_2/H_\infty$  필터링 문제를 고려하며, 이는 다음과 같은 문제로서 표현된다.

### 제한 최적화 문제 2

$\|T_\infty\|_\infty < \gamma$ 를 만족하는 모든 안정한 무편향 필터들 중에서  $\|T_2\|_2^2 \leq J(\Sigma) < \alpha$ 의 관계를 만족하는  $\alpha$ 를 최소화하는 필터  $\Sigma_f$ 를 구하라.

위의 문제를 풀기 위하여 먼저 다음과 같은 보조 정리들을 고려한다.

**보조정리 3.1(BRL)[1]:** 시스템 (15)의 행렬  $A'$ 이 안정하므로, 주어진 상수  $\gamma > 0$ 에 대하여 다음의 조건들은 상등하다. 여기서  $R = \gamma^2 I - D_{1\infty}^T D_{1\infty}$ 이며,  $\bar{\sigma}(\cdot)$ 은 행렬의 최대 특이값(singular value)을 나타낸다.

- (i)  $\|T_\infty\|_\infty < \gamma$
- (ii)  $\bar{\sigma}(D_{1\infty}) < \gamma$ 이 성립하며, 다음의 대수 리카티 방정식을 만족하는 실계수 대칭 행렬  $P^* \geq 0$ 이 존재한다.

$$A'^T P^* + P^* A' + (P^* B_{e\infty} + C_1^T D_{1\infty}) R^{-1} \times (P^* B_{e\infty} + C_1^T D_{1\infty})^T + C_1^T C_1 = 0 \quad (18)$$

여기서 행렬  $P^*$ 는  $A' + B_{e\infty} R^{-1} (P^* B_{e\infty} + C_1^T D_{1\infty})^T$ 를 점근적으로 안정하는 유일한 안정화 해이다.

- (iii) 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는  $P > 0$ 가 존재한다.

$$\Gamma(P) = \begin{bmatrix} PA' + A'^T P & PB_{e\infty} & C_1^T \\ B_{e\infty}^T P & -\gamma I & D_{1\infty}^T \\ C_1 & D_{1\infty} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

이제, 주어진 시스템 (1)에서  $D_{12} = 0$ 가 성립한다면 전달 함수  $T_2$ 의  $H_2$  놈에 대한 상한값은 아래와 같이 주어진다[6].

$$\|T_2\|_2^2 \leq \text{trace}(B_{e2}^T P^* B_{e2}) =: J(\Sigma_f) \quad (20)$$

여기서  $P^* \geq 0$ 는 보조 정리 3.1의 식 (18)을 만족하는 해이다. 또한, 대수 리카티 방정식과 이차 행렬 부등식의 해들이 갖는 표준 단조(monotonicity) 속성에 기초하여 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$J(\Sigma_f) < \text{trace}(B_{e2}^T P B_{e2}) =: \alpha(P, L) \quad (21)$$

여기서  $P > 0$ 는 선형 행렬 부등식 (19)를 만족하는 해이다.

이제 본 논문의 주요 결과를 말하기 위하여  $\Theta_1 = P$  그리고  $\Theta_2 = -PL$ 와 같은 변수 변환(change of variable)[7]과 함께 다음의 행렬들을 정의한다.

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_2^T & \Theta_3 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{22} \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} B_\infty \\ D_{2\infty} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} A \\ C_2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

식 (22)에서  $\Theta$ 는 주어진 최적화 문제를 풀기 위한 결정 변수(decision variable)[8]의 역할을 하며, 나머지 행렬들은 시스템 데이터들로부터 얻을 수 있다.

**정리 3.2:** 시스템 (1)에 대하여 가정 (A1)이 성립하고,  $\gamma > 0$ 가 주어졌다고 하자. 만약  $D_{11} = 0$ 가 성립한다면 준최적 혼합  $H_2/H_\infty$  필터링 성능 지수는 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha^* = \min \text{trace}(U_1^T \Theta U_1) \text{ over } \Theta = \Theta^T > 0 \text{ subject to } \Gamma(\Theta) < 0 \quad (23)$$

여기서

$$\Gamma(\Theta) = \begin{bmatrix} V^T \Theta W + W^T \Theta V & W^T \Theta U_2 & C_1^T \\ U_2^T \Theta W & -\gamma I & D_{1\infty}^T \\ C_1 & D_{1\infty} & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (24)$$

이다. 이 때, 구해진 최소화 해를  $\Theta^*$ 라 하면 준최적 혼합  $H_2/H_\infty$  필터의 이득  $L^*$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$L^* = -\Theta_1^{*-1} \Theta_2^* \quad (25)$$

**증명:**  $D_{11} = 0$ 의 가정 하에서 제한 최적화 문제 2는 다음과 같은 수식으로서 표현된다.

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \min \alpha(P, L) \\ &= \min \text{trace} \left\{ \begin{bmatrix} B_2^T & D_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & -PL \\ -L^T P & L^T PL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{22} \end{bmatrix} \right\} \\ &\text{subject to } P = P^T > 0 \text{ satisfying } \Gamma(P, L) < 0 \quad (26) \end{aligned}$$

식 (26)에 식 (22)의  $U_1$ 과 앞에서 정의된 변수 변환을 이용하면 위 식은 아래와 같이 쓸 수 있다

$$\alpha^* = \min \text{trace} \left\{ U_1^T \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_2^T & \Theta_3 \end{bmatrix} U_1 \right\} \quad (27)$$

subject to  $\Theta_1 = \Theta_1^T > 0$  satisfying  $\Gamma(\Theta_1, -\Theta_1^{-1} \Theta_2) < 0$

이제, 위의 문제에서의 목적 함수를 결정 변수  $\Theta$ 의 선형 함수로서 나타내기 위하여 다음의 관계를 주목한다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_2^T & \Theta_3 \end{bmatrix} &= \min \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_2^T & \Theta_3 \end{bmatrix} \\ &\text{over } \Theta_3 = \Theta_3^T > \Theta_2^T \Theta_1^{-1} \Theta_2 \quad (28) \end{aligned}$$

그러므로, 최적화 문제 (27)과 (28)을 결합하면 (23)과 같은 선형 행렬 부등식 문제가 구성됨을 알 수 있다.  $\square$

#### 4. 수치 예제

다음과 같은 시스템을 고려해 보자[11].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 1.2 & -0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_2 + \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.35 \end{bmatrix} w_\infty \\ z &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \end{bmatrix} x \\ y &= \begin{bmatrix} 0.35 & -0.65 \end{bmatrix} x + 1.3w_2 + 0.4w_\infty \end{aligned} \quad (29)$$

식(29)의 시스템에 대하여 얻을 수 있는 최소 잡음 감소 수준  $\gamma^*$  값은 대략 0.1679로 나타났으며, 본 예제에서는  $\gamma$ 의 값을  $[\gamma^*, \infty)$ 의 구간 내에서 변화시킴에 따라 발생하는 오차 시스템 내의 두 전달 함수  $T_2$ 와  $T_\infty$ 의 특성 변화에 중점을 두고 실험하였다. 이들 전달함수들의 Bode 선도는 각각 다음의 그림 1과 그림 2와 같다.

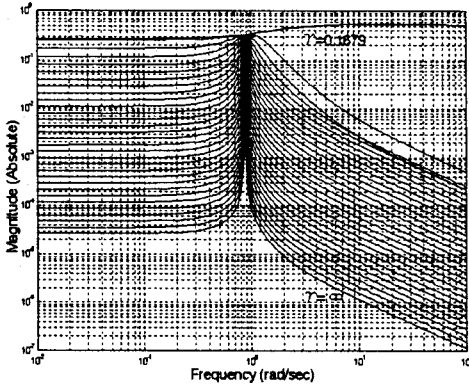


그림 1. 전달 함수  $T_2$ 의 Bode 이득 선도

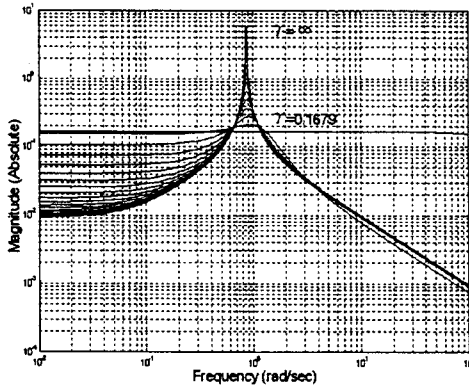


그림 2. 전달 함수  $T_\infty$ 의 Bode 이득 선도

본 논문에서 제안된 설계 기법의 목표는 주어진  $\gamma > 0$ 에 대하여  $\|T_\infty\|_\infty < \gamma$ 로 유지시키면서  $\|T_2\|_2 < \alpha$ 를 만족하는  $\alpha$ 를 최소화하는 것인데, 위의 그림 1과 그림 2에서 알 수 있듯이 이들 두 변수들은 각각 강인성, 그리고 성능과 관련되어 있으며, 이들 사이에는 trade-off가 존재한다. 이 두 변수들 사이의 관계를 좀 더 명확히 나타내기 위하여 그림 3에  $[0.1679, 1]$ 의 구간에서의  $\gamma$ 에 대한  $\sqrt{\alpha}$ 의 곡선을 나타내었다. 이제 그림 3을 보면, 제안된 혼합  $H_2/H_\infty$  필터는 순수한  $H_2$ 나  $H_\infty$  필터링 문제로 구성하기에 적합하지 않은 상황에 대하여,  $\gamma$ 가 제

공하는 자유도(degree of freedom)를 가지고 만족할 만한 설계를 하기 위한 효과적인 해결책을 제시할 수 있음을 알 수 있다.

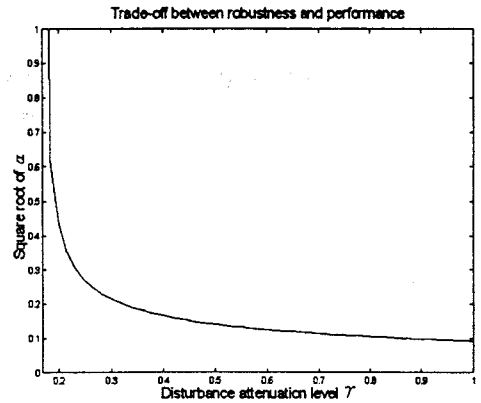


그림 3.  $\gamma$ 와  $\sqrt{\alpha}$ 의 관계 곡선

#### 5. 결론

본 논문에서는 매개 변수화된 안정한 무편향 필터들 중에서  $Q(s)=0$ 에 해당하는 중앙 필터를 이용하여 혼합  $H_2/H_\infty$  필터링 문제를 다루었다. 이는  $H_\infty$  노에 대한 제한 조건하에서  $H_2$  노의 상한값을 최소화하는 문제로 구성할 수 있으며 컨벡스 최적화 기법을 사용하여 해를 구할 수 있다. 제안된 필터는  $\gamma \in [\gamma^*, \infty)$ 의 값을 조정함으로써 강인성과 성능 사이의 상충하는 요구 사항들을 동시에 고려하여 설계될 수 있음을 보였다.

#### (참고 문헌)

- [1] K. Zhou, *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall International, Inc., 1998.
- [2] B. D. O. Anderson, John B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, 1979.
- [3] M. Shaked and Y. Theodor, " $H_\infty$  Optimal Estimation-A Tutorial", in *Proceedings of the 31st IEEE CDC*, pp. 2278-2286, 1992.
- [4] B. L. Stevens and F. L. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*, John Wiley & Sons Inc., 1992.
- [5] H. Rotstein, M. Sznaier and M. Idan, " $H_2/H_\infty$  Filtering Theory and an Aerospace Application", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 6, pp. 347-366, 1996.
- [6] Bernstein, D. S. and W. M. Haddad, "Steady State Kalman Filtering with an  $H_\infty$  Error Bound", *Systems and Control Letters*, Vol. 12, pp. 9-16, 1989.
- [7] S. Boyd et al., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [8] P. Gahinet et al., *LMI Control Toolbox-For Use with MATLAB*, The Math Works Inc., 1995.
- [9] G.C. Goodwin and R.H. Middleton, "The Class of All Stable Unbiased State Estimators", *Systems and Control Letters*, 13, pp. 161-163, 1989.
- [10] J.M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley Publishing Co, 1994.
- [11] P. P. Khargonekar, M.A. Rotea, E. Baeyens, "Mixed  $H_2/H_\infty$  Filtering", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 6, pp. 313-330, 1996.