

회전 기계의 모드 시험을 위한 측정 및 가진 방법

°권 계시*, 이종원*

Measurement and Excitation Techniques for Modal Testing of Rotating Machinery

(Kye-Si Kwon, Chong-Won Lee)

ABSTRACT

Measurement technique using only one sensor for complex modal testing of the asymmetric rotor is proposed. The reverse directional frequency response function of asymmetric rotor, which is known to be indicative of the degree of asymmetry in a symmetric rotor, is also shown to be identified with simplest technique requiring only one sensor and one excitor. It lessens the testing efforts and its practicality is verified by numerical simulation. The measurement and excitation techniques for complex modal testing are also summarized so that the efficient complex modal testing can be possible according to the kind of rotor system.

1. 서론

일반적으로, 회전 기계 시스템은 회전부와 고정부로 구성되어 있으며, 각각의 비축대칭적 물성치를 비대칭성(Asymmetry) 및 비등방성(Anisotropy)이라고 하는데, 이들은 불균형 응답, 위험 속도, 안정성 등의 동특성에 커다란 영향을 미친다. 따라서 비대칭 또는 비등방 회전체의 특성을 정확히 이해하는 것은 회전 기계를 이해하는데 중요하다.

이를 위해 복소 모드 시험법(complex modal testing method)이 개발되어, 소위 방향성 주파수 응답 함수(directional frequency response function: dFRF)를 사용하여, 효과적인 회전체의 모드 변수 추출이 가능하게 되었다 [1-5]. 이는 전방 모드(forward mode) 그리고 후방 모드(backward mode)의 방향성을 줄 뿐더러 이 두 모드를 주파수 영역에서 분리하는 것을 가능하게 하였다. 일반적으로 회전체의 모드 해석을 위해 두가지 좌표계가 사용되었는데, 비등방 회전체의 복소 모드 해석을 위해서는 정지 좌표계, 비대칭 회전체의 복소 모드 해석을 위해서는 회전 좌표계가 사용되고, 이를 통한 방향성 주파수 응답함수는 비대칭 혹은 비등방 회전체의 진단에 응용되었다 [4,5]. 그러나 이를 위하여 각각 2개의 좌표계로 변환시켜야 되지만, 최근에는 비대칭성 회전체에도 정지좌표계가 사용되어 보다 효율적인 모드시험이 가능하게 되었다 [6]. 그리고 이는 센서와 가진기가 모두 정지좌표에 있기 때문에 회전 좌표계에 비해 방향성 주파수 응답 함수를 이해하기 쉬운 방법이다.

복소 모드 시험은 복소 입력과 복소 출력으로 정의 되기 때문에 일반적인 구조물의 가진 및 측정 방법과는 다르다. 비등방 회전체의 방향성 주파수 응답 함수의 추정을 위하여 양방향 가진 방법이 제안되었으며, 이는 반경방향에 서로 수직한 2개의 가진기로 가지는 방법이다 [2,3].

만일 등방성의 회전체라면 한 방향의 가진만으로도 충분하다. 이러한 결과는 비대칭 회전체에서도 가능함이 최근에 밝혀졌으며, 이는 비대칭 회전체에 정지좌표계로 정의된 모드 시험과 더불어 보다 간단한 모드 시험이 가능하게 된 결과를 가져오게 되었다 [6].

본 연구에서는 비대칭 회전체의 여러가지 가진 및 측정 방법에 대하여 센서 및 가진기의 갯수의 관점으로 논의하였다. 또한, 비대칭 회전체의 비대칭 정도를 나타내는 역방향성 주파수 응답함수(reverse dFRF)의 경우에는 1개의 센서 그리고 1개의 가진기로도 주파수 응답 함수의 추정이 가능함을 보였다.

2. 방향성 주파수 응답함수

그림1과 같은 정지 좌표계, xyz를 사용하여, 일반적인 회전체의 운동방정식은 다음과 같다 [4-7].

$$M_f \ddot{\mathbf{p}}(t) + [M_b + M_r e^{j2\Omega t}] \dot{\mathbf{p}}(t) + C_f \dot{\mathbf{p}}(t) + [C_b + C_r e^{j2\Omega t}] \mathbf{p}(t) + K_f \mathbf{p}(t) + [K_b + K_r e^{j2\Omega t}] \mathbf{p}(t) = \mathbf{g}(t) \quad (1)$$

여기서 $N \times 1$ 복소 응답, $\mathbf{p}(t)$, 그리고 복소 가진력, $\mathbf{g}(t)$ 는 실수 응답, $\mathbf{y}(t)$ 와 $\mathbf{z}(t)$, 실수 가진력 $\mathbf{f}_y(t)$ 와 $\mathbf{f}_z(t)$ 으로부터 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{y}(t) + j\mathbf{z}(t), & \bar{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{y}(t) - j\mathbf{z}(t) \\ \mathbf{g}(t) &= \mathbf{f}_y(t) + j\mathbf{f}_z(t), & \bar{\mathbf{g}}(t) &= \mathbf{f}_y(t) - j\mathbf{f}_z(t) \\ \bar{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{p}(t) e^{j2\Omega t}, & \bar{\mathbf{g}}(t) &= \mathbf{g}(t) e^{j2\Omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

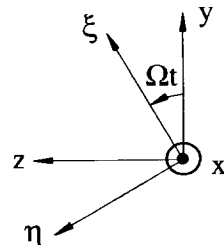


Figure 1. Coordinate systems. xyz, stationary co-ordinate system; $x\xi\eta$, rotating co-ordinate system.

*한국 과학 기술원
소음 진동 연구 센터

여기서 j 는 허수단위 ($=\sqrt{-1}$); Ω 는 회전 속도; ‘ \cdot ’는 공액 복소수, ‘ $\bar{\cdot}$ ’ 공액 복소수 신호에 $e^{j2\Omega t}$ 를 곱한 변조신호; \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 는 각각 $N \times N$ 복소 일반화된 질량, 감쇠, 그리고 강성 행렬; 그리고 및 아래 첨자 f , b , r 는 각각 동방, 비동방, 비대칭의 특성을 나타낸다.

비동방 회전체는 $\mathbf{M}_r = \mathbf{C}_r = \mathbf{K}_r = 0$ 이 되어 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{M}_b \ddot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}_b \dot{\bar{\mathbf{p}}}(t) \\ & + \mathbf{K}_f \mathbf{p}(t) + \mathbf{K}_b \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{g}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

비대칭 회전체는 $\mathbf{M}_b = \mathbf{C}_b = \mathbf{K}_b = 0$ 이 되어 다음과 같이 운동방정식을 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{M}_r \ddot{\bar{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\bar{\mathbf{p}}}(t) \\ & + \mathbf{K}_f \mathbf{p}(t) + \mathbf{K}_r \bar{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{g}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)를 푸리에 변환한 후 공액 복소수를 취한 것과 같이 나타내면 다음과 같은 비대칭 회전체의 방향성 주파수 응답 행렬(direction frequency response matrices, dFRMs)을 얻을 수 있다 [4-6].

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(j\omega) &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{gp}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{G}(j\omega) \\ \bar{\mathbf{G}}(j\omega) \end{Bmatrix} \\ \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) &= \bar{\mathbf{H}}_{gp} \{-j(\omega - 2\Omega)\} \\ \mathbf{H}_{\bar{g}\bar{p}}(j\omega) &= \bar{\mathbf{H}}_{\bar{g}\bar{p}} \{-j(\omega - 2\Omega)\} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\mathbf{P}(j\omega)$, $\mathbf{G}(j\omega)$ 그리고 $\bar{\mathbf{G}}(j\omega) = \hat{\mathbf{G}}\{j(\omega - 2\Omega)\}$ 는 $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{g}(t)$, $\bar{\mathbf{g}}(t) = \bar{\mathbf{g}}(t)e^{j2\Omega t}$ 의 푸리에 변환이고, $\mathbf{H}_{gp}(j\omega)$ 와 $\mathbf{H}_{\bar{g}\bar{p}}(j\omega)$ 는 각각 정방향성 주파수 응답 행렬(normal dFRMs), $\mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega)$ 와 $\mathbf{H}_{\bar{g}\bar{p}}(j\omega)$ 는 역방향성 주파수 응답 함수(reverse dFRMs)라고 한다.

마찬가지로, 비동방 회전체도 식(4)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다 [2-4].

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(j\omega) &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{gp}(j\omega) & \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{G}(j\omega) \\ \hat{\mathbf{G}}(j\omega) \end{Bmatrix} \\ \mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega) &= \bar{\mathbf{H}}_{\hat{g}p}(j\omega), \quad \mathbf{H}_{\bar{g}\bar{p}}(j\omega) = \bar{\mathbf{H}}_{\hat{g}\bar{p}}(-j\omega) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\hat{\mathbf{G}}(j\omega)$ 는 $\bar{\mathbf{g}}(t)$ 의 푸리에 변환, 여기서 $\mathbf{H}_{gp}(j\omega)$ 와 $\mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega)$ 는 정방향성 주파수 응답 함수(normal dFRMs); $\mathbf{H}_{\hat{g}p}(j\omega)$ 와 $\mathbf{H}_{\bar{g}\bar{p}}(j\omega)$ 는 역방향성 주파수 응답 함수(reverse dFRMs)라고 하고, 동방회전체가 되면 역방향성 주파수 응답 행렬은 사라진다 [4,5].

3. 단방향 측정에 의한 비대칭 회전체의 방향성 주파수 응답 측정

복소 모드해석의 주요 특성은 그림2과 같이 2개의 복소 입력과 1개의 복소 출력으로 정의되는 비대칭 혹은 비동방 회전체의 방향성 주파수 응답 함수를 추정하는 것이다.

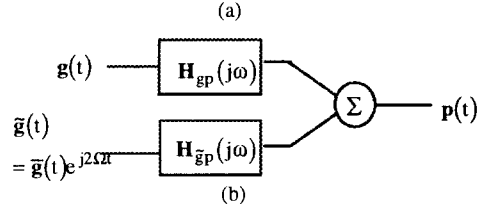
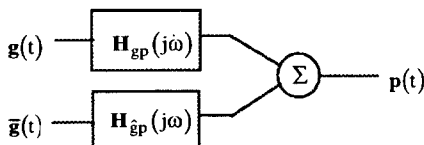


Figure 2. Two complex input/single complex output models for (a) anisotropic and (b) asymmetric rotor systems.

이 절에서는 1개의 측정 센서가 있을 때 비대칭 회전체의 방향성 주파수 응답함수의 추정에 관한 것이다. 만일 응답을 y 방향으로만 측정하였다면, 측정된 응답, $u(t)$ 그리고 실제 복소응답 $p(t)$ 는 다음과 같은 관계가 된다.

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{p}(t)}{2} + \frac{\bar{\mathbf{p}}(t)}{2} \quad (8)$$

y 방향만 측정하였다면, z 방향의 응답의 정보를 잃게 되어 이는 식(8)과 같이 공액 복소수 응답이 추가로 보이는 형태가 된다. 식(8)을 푸리에 변환을 한 후 식(6)을 대입하면, 측정된 응답 $u(t)$ 와 복소 입력과의 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(j\omega) &= \frac{\mathbf{P}(j\omega)}{2} + \frac{\hat{\mathbf{P}}(j\omega)}{2} \\ &= \frac{\mathbf{H}_{gp}(j\omega)}{2} \mathbf{G}(j\omega) + \frac{\mathbf{H}_{\bar{g}p}(j\omega)}{2} \bar{\mathbf{G}}(j\omega) \\ &\quad + \frac{\hat{\mathbf{H}}_{gp}(j\omega)}{2} \hat{\mathbf{G}}(j\omega) + \frac{\hat{\mathbf{H}}_{\bar{g}p}(j\omega)}{2} \hat{\bar{\mathbf{G}}}(j\omega) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{U}(j\omega)$ 와 $\hat{\mathbf{P}}(j\omega)$ 는 $u(t)$, $\bar{p}(t)$ 의 푸리에 변환이고, 식(9)에서와 같이 추가적인 공액 복소 입력 신호 $\hat{\mathbf{G}}(j\omega)$ 와 $\hat{\bar{\mathbf{G}}}(j\omega)$ 가 나타나게 된다. 여기서 $\hat{\mathbf{G}}(j\omega)$ 와 $\hat{\bar{\mathbf{G}}}(j\omega)$ 는 $\bar{\mathbf{g}}(t)$ 와 $\bar{\bar{\mathbf{g}}}(t) = \bar{\mathbf{g}}(t)e^{-j2\Omega t}$ 의 푸리에 변환이다. 추가적인 공액 복소 입력 신호들과 출력간의 관계 $\hat{\mathbf{H}}_{gp}(j\omega)$ 와 $\hat{\mathbf{H}}_{\bar{g}p}(j\omega)$ 는 시스템의 입력으로부터가 아니라 충분하지 못한 측정에서 기인된 것이다.

3.1 양방향 가진 방법

일반적인 회전체의 가진방법으로는 양방향 랜덤 가진방법이 사용되었다. 이는 다음과 같이 복소 입력 신호 $\mathbf{g}(t)$ 와 공액 복소 입력 $\bar{\mathbf{g}}(t)$ 의 상관관계를 없게 만드는 것이다 [2-5].

$$\mathbf{R}_{\bar{g}\bar{g}}(j\omega) = \mathbf{R}_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega) = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\bar{g}\hat{g}}(\tau) &= \mathbf{R}_{f_y f_y}(\tau) - \mathbf{R}_{f_z f_z}(\tau) - j \left\{ \mathbf{R}_{f_y f_z}(\tau) + \mathbf{R}_{f_z f_y}(\tau) \right\} \\ \mathbf{R}_{f_y f_y}(\tau) &= \mathbf{R}_{f_z f_z}(\tau), \quad \mathbf{R}_{f_y f_z}(\tau) = -\mathbf{R}_{f_z f_y}(\tau) \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)에서와 같이 스펙트럼 밀도 함수는 다음을 만족시켜야 된다.

$$\mathbf{S}_{f_y f_y}(j\omega) = \mathbf{S}_{f_z f_z}(j\omega) \text{ and } \text{Re}\{\mathbf{S}_{f_y f_z}(j\omega)\} = 0 \quad (12)$$

2가지 가진방법이 방향성 주파수 응답 함수를 추정하는데에 사용되었는데, 하나는 $\text{Im}\{S_{f_y f_y}(j\omega)\} \neq 0$ 인 가진방법으로 이것은 양방향 랜덤 혹은 양방향 회전 랜덤 가진 (bi-directional or bidirectional rotating random excitation)이라 불리우고, 또 다른 하나는 $\text{Im}\{S_{f_y f_z}(j\omega)\} = 0$ 의 관계를 만족하는 것으로 이것은 비상관 등방 랜덤 혹은 양방향 정지 랜덤 가진방법 (uncorrelated isotropic or bidirectional stationary random excitation)이라고 한다 [2-6]. 비대칭 회전체의 경우에도 양방향 가진 방법은 복소 입력 신호 $g(t)$ 와 변조된 복소 입력신호 $\bar{g}(t)$ 와의 상관관계가 없게 되므로 비대칭 회전체의 가진 신호로도 사용되었다 [6]. 실제적으로 식(12)을 만족 시키는것은 가진기 설치와 이득 조절의 어려움으로 인해 어렵게 된다. 이 때는 두 입력간에는 비정상 입력 관계(nonstationary input process)가 되며 [6], 또한 식(9)에서의 복소 입력 신호들을 다루기 위하여 입력 신호들의 스펙트럼 구조를 부록에서 다루었다. 방향성 주파수 응답 함수를 구하기 위한 비정상 랜덤신호의 이중 주파수 스펙트럼 밀도 함수 (double frequency spectral density functions)가 고정된 주파수를 $j\omega_1$ 와 $j\omega_2$ 사이에서 정의 되었으며 [8], 이들의 관계는 다음과 같이 유도 될 수 있다.

$$\begin{aligned} S_{g_u}(j\omega_1, j\omega_2) &= E[\hat{G}(j\omega_1)U(j\omega_2)] \\ S_{\bar{g}_u}(j\omega_1, j\omega_2) &= E[\hat{\bar{G}}(j\omega_1)U(j\omega_2)] \\ S_{\hat{g}_u}(j\omega_1, j\omega_2) &= E[G(j\omega_1)U(j\omega_2)] \\ S_{\hat{\bar{g}}_u}(j\omega_1, j\omega_2) &= E[\bar{G}(j\omega_1)U(j\omega_2)] \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $S_{ik}(j\omega_1, j\omega_2)$, $i = g(t), \bar{g}(t), \hat{g}(t), \bar{\hat{g}}(t)$ $k = g(t), \bar{g}(t), \hat{g}(t), \bar{\hat{g}}(t)$, $u(t)$ 는 두쪽 이중 주파수 방향성 자기($i=k$) 그리고 상호($i \neq k$) 스펙트럼 밀도 함수(two sided double frequency directional auto- and cross- spectral density functions: dPSDs and dCSDs)이다. 만일 $g(t), \bar{g}(t), \hat{g}(t), \bar{\hat{g}}(t)$ 의 입력 신호가 ($j\omega_1, j\omega_2$)의 평면에서 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ 의 선상에서 완전한 상관 관계만 아니면 방향성 주파수 응답함수, $H_{gp}(j\omega)$ 와 $H_{\bar{g}p}(j\omega)$ 는 다음과 같이 추정될 수 있다.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_{gp} \\ H_{\bar{g}p} \\ \hat{H}_{gp} \\ \hat{H}_{\bar{g}p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{gg} & S_{g\bar{g}} & S_{g\hat{g}} & S_{g\bar{\hat{g}}} \\ S_{\bar{g}g} & S_{\bar{g}\bar{g}} & S_{\bar{g}\hat{g}} & S_{\bar{g}\bar{\hat{g}}} \\ S_{\hat{g}g} & S_{\hat{g}\bar{g}} & S_{\hat{g}\hat{g}} & S_{\hat{g}\bar{\hat{g}}} \\ S_{\bar{\hat{g}}g} & S_{\bar{\hat{g}}\bar{g}} & S_{\bar{\hat{g}}\hat{g}} & S_{\bar{\hat{g}}\bar{\hat{g}}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{gu} \\ S_{\bar{g}u} \\ S_{\hat{g}u} \\ S_{\bar{\hat{g}}u} \end{bmatrix} \quad (14)$$

양방향 랜덤가진이 식(12)를 만족하도록 가진 되었으므로 부록 (A10), (A11), (A18), (A19), (A22), (A23)의 관계에 의하여 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} S_{g\bar{g}}(j\omega, j\omega) &= S_{\bar{g}g}(j\omega, j\omega) = 0 \\ S_{\hat{g}\bar{\hat{g}}}(j\omega, j\omega) &= S_{\bar{\hat{g}}\hat{g}}(j\omega, j\omega) = 0 \\ S_{\bar{\hat{g}}\bar{\hat{g}}}(j\omega, j\omega) &= S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega, j\omega) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

그리고, 다음과 같은 충분한 시간 T ($T \gg \pi/2\Omega$)의 데이터의 경우 부록 (A14), (A15), (A26), (A27)에 의해 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} S_{g\bar{g}}(j\omega, j\omega) &= S_{\bar{g}g}(j\omega, j\omega) = 0 \\ S_{\hat{g}\bar{\hat{g}}}(j\omega, j\omega) &= S_{\bar{\hat{g}}\hat{g}}(j\omega, j\omega) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 충분히 긴 시간동안의 데이터와 양방향 가진 방법에 의하여 입력의 상호 상관 관계는 없게 된다. 식 (15)와 (16)에서와 같이 $i, k = g(t), \bar{g}(t), \hat{g}(t), \bar{\hat{g}}(t)$ 그리고 $i \neq k$ 일때 $S_{ik}(j\omega, j\omega) = 0$ 이 된다. 이때 방정식은 다음과 같은 단일 입력 단일 출력의 모델과 같은 결과가 된다.

$$\begin{aligned} H_{gp}(j\omega) &= 2 \frac{S_{gu}(j\omega, j\omega)}{S_{gg}(j\omega, j\omega)} \\ H_{\bar{g}p}(j\omega) &= 2 \frac{S_{\bar{g}u}(j\omega, j\omega)}{S_{\bar{g}\bar{g}}(j\omega, j\omega)} \end{aligned} \quad (17)$$

이것은 크기가 2배 만큼의 차이가 남을 제외하고는 2개의 센서를 사용한 결과와 본질적으로 같으며, 2개의 가진기와 양방향 가진방법을 사용하여 센서를 1개 줄이는것이 가능하다는 결과이다. 등방 회전체는 결과적으로 비대칭 회전체에서 역방향성 주파수 응답함수가 없어진 것과 근본적으로 같으므로 비대칭 회전체와 등방 회전체에서는, 센서 또는 가진기를 줄이고도 회전체의 모드 시험이 가능함을 알 수 있다.

3.2 단방향 가진방법

이 장에서는 센서 1개와 가진기 1개가 있을때 비대칭 회전체의 역방향성 주파수 응답함수의 추정이 가능함을 보인다.

1개의 가진기만 사용이 되면 복소 입력 신호와 이의 공액 복소 입력 신호에는 완전한 상관관계가 있다. 따라서 $G(j\omega)$ 와 $\hat{G}(j\omega)$ 는 선형 관계를 갖는다 [2,3].

$$\hat{G}(j\omega) = \kappa G(j\omega) \quad (18)$$

여기서 y 방향의 가진기를 사용했을때 $\kappa = 1$ 이 되고, z 방향의 가진기를 사용했을때 $\kappa = -1$ 이 된다. 식(18)을 식(9)에 대입하여 정리하면, 복소 입력과 출력의 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U(j\omega) = H'_{gp}(j\omega)G(j\omega) + \frac{H_{\bar{g}p}(j\omega)}{2}\bar{G}(j\omega) + \frac{\hat{H}_{\bar{g}p}(j\omega)}{2}\hat{G}(j\omega) \quad (19)$$

여기서 $H'_{gp}(j\omega) = \frac{H_{gp}(j\omega)}{2} + \kappa \frac{\hat{H}_{gp}(j\omega)}{2}$ 이다. 식 (19)에서 볼 수 있듯이 정방향성 주파수 응답함수는 추정이 불가능하다. 이는 두 입력사이의 선형관계가 있기 때문에 응답의 신호가 어느 입력에 의한 것인지 구별 할수 없기 때문이다. 또 두 입력 신호의 선형관계에 의해 방향성 주파수 응답 함수를 구하기 위하여 세개의 입력 신호 $g(t), \bar{g}(t), \bar{\hat{g}}(t)$ 를 다루는데 이들은 상호 비정상 신호가 된다. 이들의 관계는 $\bar{g}(t)$ 와 $\bar{\hat{g}}(t)$ 가 완전 상관관계가 있다는 것을 제외하면 양방향 가진방법에서의 관계와 형태는 모두 같으며, 이들 입력 신호의 구조는 부록에서와

같다. 방향성 주파수 응답 함수를 구하기 위한 더블 주파수 스펙트럼 분포 함수는 각각 $j\omega_1$ 와 $j\omega_2$ 의 고정된 주파수에서 정의되며 [8], 이들의 관계는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} S_{gu}(j\omega_1, j\omega_2) &= E[\hat{G}(j\omega_1)U(j\omega_2)] \\ S_{\bar{g}u}(j\omega, j\omega) &= E[\hat{\bar{G}}(j\omega_1)U(j\omega_2)] \\ S_{\hat{g}u}(j\omega_1, j\omega_2) &= E[\hat{G}(j\omega_1)U(j\omega_2)] \end{aligned} \quad (20)$$

만일 복소 입력 신호 $g(t)$, $\bar{g}(t)$, $\hat{g}(t)$ 가 $(j\omega_1, j\omega_2)$ 의 평면에서 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ 인 선상에서 완전한 상관 관계만 없으면 역방향성 주파수 응답 함수, $H_{\bar{g}p}(j\omega)$ 는 다음과 같이 추정될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} H_{\bar{g}p}' \\ H_{\bar{g}p} \\ \frac{H_{\bar{g}p}}{2} \\ \frac{\hat{H}_{\bar{g}p}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{gg} & S_{g\bar{g}} & S_{g\hat{g}} \\ S_{\bar{g}\bar{g}} & S_{\bar{g}g} & S_{\bar{g}\hat{g}} \\ S_{\hat{g}\hat{g}} & S_{\hat{g}g} & S_{\hat{g}\bar{g}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{gu} \\ S_{\bar{g}u} \\ S_{\hat{g}u} \end{bmatrix} \quad (21)$$

부록의 (A10), (A11), (A22), (A23), (A26), (A27)관계로부터 충분히 긴 시간 데이터 $T \gg \pi/2\Omega$ 라면 입력 신호는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} S_{g\bar{g}}(j\omega, j\omega) &= S_{\bar{g}g}(j\omega, j\omega) = 0 \\ S_{\bar{g}\hat{g}}(j\omega, j\omega) &= S_{\hat{g}\bar{g}}(j\omega, j\omega) = 0 \\ S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega, j\omega) &= S_{\hat{g}g}(j\omega, j\omega) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)와 같이 입력의 상호 상관 관계가 없을 때 즉 $S_{ik}(j\omega, j\omega) = 0$ 여기서 $i, k = g(t), \bar{g}(t), \hat{g}(t)$ 이고, $i \neq k$ 일때, 역방향성 주파수 응답 함수는 다음과 같은 단일 입력, 단일 출력의 관계로부터 구할 수 있다.

$$H_{\bar{g}p}(j\omega) = 2 \frac{S_{\bar{g}u}(j\omega, j\omega)}{S_{\bar{g}\bar{g}}(j\omega, j\omega)} \quad (23)$$

이것은 비대칭 회전체의 비대칭 정도를 나타내는 역방향성 주파수 응답함수는 1개 센서와 1개의 가진기로도 추정이 가능함을 할 수 있다.

5. 수치 예제

제안된 비대칭 회전체의 모드 시험 방법의 유용성을 알아 보기 위해 축의 강성 비대칭을 갖는 회전체에 대한 수치 해석을 수행하였다. 베어링 강성이 축의 강성에 비해 충분히 크고, 디스크의 각운동이 병진운동으로부터 분리될 수 있다는 가정을 하면 운동방정식은 다음과 같다.

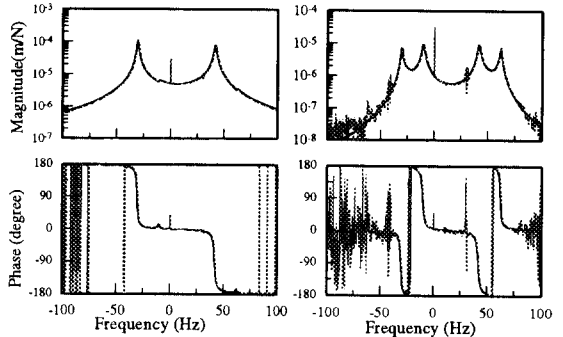
$$\begin{bmatrix} m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & \Omega_p \\ -\Omega_p & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + \Delta k \cos 2\Omega t & \Delta k \sin 2\Omega t \\ \Delta k \sin 2\Omega t & k - \Delta k \cos 2\Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서 m, c, Ω_p 는 각각 질량, 감쇠, 자이로 효과를 나타내고, $k, \Delta k$ 는 각각 강성과 비대칭 효과를 나타낸다. 수치 해석을 위하여 사용된 수치 값은 각각 $m = 4.0, c =$

$50.0, k = 2.0e5, \Delta k = -2.0e4, \Omega_p = 300.0, \Omega = 100.0$ 이다.

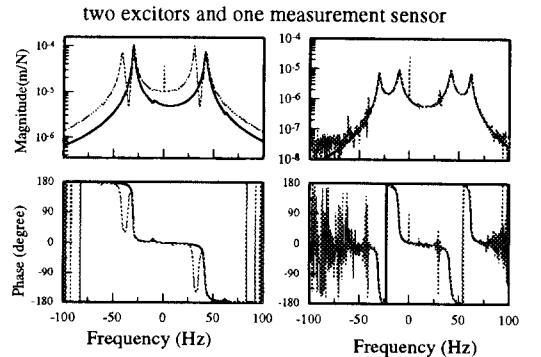
양방향 가진력 $g(t) = f_y(t) + jf_z(t)$ 위하여 식 (12)를 만족시키도록 $f_y(t)$ 와 $f_z(t)$ 를 가우스 분포를 갖는 랜덤 신호를 발생시켰다. 운동 방정식은 수치 적분 방법을 사용하여 복소 응답 $p(t) = y(t) + jz(t)$ 을 얻었다. 단방향 가진을 위해서 y 방향의 랜덤 가진 $g(t) = f_y(t)$ 를 사용하였고, 단일 측정 방법으로는 y 방향의 응답 $u(t) = y(t)$ 를 사용하였다. 방향성 주파수 응답 함수의 추정을 위하여 Hanning 창함수를 사용한 2048개의 스펙트럼 데이터를 구하였고, 200번 평균을 계산하였다. 출력 신호의 잡음을 고려하기 위하여 10퍼센트의 신호 대 출력 비를 갖도록 랜덤 잡음을 추가시켰다.

센서 및 가진기 갯수에 따른 모의 실험 결과는 그림 3과 4에서 비교 하였다. 실험 3에서 알 수 있듯이 센서의 갯수는 양방향 가진 방법으로 줄일 수 있었으며, 결과는 이론적인 것과 잘 일치 하였다. 그림 4는 1개의 센서와 1개의 가진기를 사용한 경우의 방향성 주파수 응답 함수를 나타내며, 비대칭 회전체의 비대칭성의 정도인 역방향성 주파수 응답 함수인 경우에 이론적인 값과 일치함을 볼 수 있다. 기존의 결과와 함께 센서 및 가진기의 갯수의 관점으로 정리하면 표 1과 같이 된다. 이와 같이 회전체의 종류에 따라서 보다 간단한 가진 및 측정방법을 선정하게 됨으로써 효율적인 모드 시험이 가능하게 된다.



(a) normal dFRF, $H_{gp}(j\omega)$ (b) reverse dFRF, $H_{\bar{g}p}(j\omega)$

Figure 3. Magnitude-phase plots of dFRFs for the simple asymmetric rotor



(a) normal dFRF, $H_{gp}(j\omega)$ (b) reverse dFRF, $H_{\bar{g}p}(j\omega)$

Figure 4. Magnitude-phase plots of dFRFs for the simple asymmetric rotor

one excitor and one measurement sensor
 theoretical estimated

6. 결론

양방향 가진 방법이 사용되었을 때 비대칭, 혹은 등방 회전체의 경우 1개의 센서만으로 모드 시험이 가능한 시험 방법을 제안하고, 모의 실험을 통해 검증하였다. 또한 비대칭 회전체의 비대칭 정도인 역방향성 주파수 응답함수인 경우에는 1개 센서 그리고 1개 가진기로 추정됨이 가능함을 보였다. 이는 회전체의 종류에 따라 보다 간단한 시험 방법이 가능하기 때문에 효율적인 모드 시험 방법이다.

References

1. LEE, C.W., "A Complex Modal Testing Theory for Rotating Machinery", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 5, No. 2, 1991, pp. 119-137.
2. JOH, Y.D., and LEE, C.W., "Excitation Methods and Modal Parameter Identification in Complex Modal Testing for Rotating Machinery", *International Journal of Analytical And Experimental Modal Analysis*, Vol. 8, No 3, 1993, pp. 179-203.
3. LEE, C.W., and JOH, Y.D., "Theory of Excitation Methods and Estimation of Frequency Response Functions in Complex Modal Testing of Rotating Machinery", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 7, No. 1, 1993, pp. 57-74.
4. JOH, C.Y., and LEE, C.W., "Use of dFRFs for Diagnosis of Asymmetric/Anisotropic Properties in Rotor-Bearing System", *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, 1996, pp. 64-69.
5. LEE, C.W., and JOH, C.Y., "Development of the Use of Directional Frequency Response Functions for the Diagnosis of Anisotropy and Asymmetry in Rotating Machinery: Theory", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 8, No. 6, 1994, pp. 665-678.
6. LEE, C.W., and LEE, S.K., "An Efficient Complex Modal Testing Theory for Asymmetric Rotor Systems: Use of Unidirectional Excitation Method", *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 206, No. 3, pp 327-338.
7. GENTA, G., "Whirling of Unsymmetrical Rotors : A Finite Elements Approach Based on Complex Co-ordinates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 124, No. 1, pp. 27-53.
8. BENDAT, J.S., and PIERSOL, A.G., *Random Data : Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley & Sons, 1986.

Table 1 Summary of identification methods

No. of excitor	No. of sensor	System
2	2	General rotor $H_{gp}, H_{\bar{g}p}, H_{\bar{g}p}$
1	2	Isotropic rotor H_{gp}
2	1	Asymmetric rotor $H_{gp}, H_{\bar{g}p}$
1	1	Asymmetric reverse $H_{\bar{g}p}$

부록: 입력 신호의 스펙트럼 구조

복소 랜덤 입력 $\{g(t)\}$ 가 정상신호이고 평균값이 0 이라고 할때, 두개의 복소 랜덤 신호 $\{g(t)\}$ 와 $\{\bar{g}(t)\}$ 는 서로 넓은 의미의 정상 신호 (jointly WSS)이고, 평균값이 0 이 된다. 그러나, 만일 $\{g(t)\}$, $\{\bar{g}(t)\}$ 가 완전히 상관관계가 없던지, 로터의 회전속도 Ω 가 0 이 아니면, 입력 신호 $\{g(t)\}$, $\{\bar{g}(t)\}$, 각각은 넓은 의미의 정상 신호가 되나, 상호적으로는 넓은 의미의 정상 신호는 (not jointly WSS) 아니다[6]. 본 연구에서의 비정상 복소 신호의 스펙트럼 구조를 설명하기 위하여, 이중 시간 상호 상관관계와 (double time cross-correlation) 이중 주파수 상호 스펙트럼 분포 함수 (double frequency cross-spectral density function)은 다음과 같다 [8].

$$R_{g\bar{g}}(t_1, t_2) = E[\bar{g}(t_1)g(t_2)] \quad (A1)$$

$$S_{g\bar{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = E[\hat{G}(j\omega_1)\bar{G}(j\omega_2)] \quad (A2)$$

다음 변환 관계에서 상관 관계와 주파수 구조를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$t_1 = t - \frac{\tau}{2}, \quad t_2 = t + \frac{\tau}{2}, \quad \omega_1 = \omega - \frac{\chi}{2}, \quad \omega_2 = \omega + \frac{\chi}{2} \quad (A3)$$

$$R_{ik}(t_1, t_2) = R_{ik}\left(t - \frac{\tau}{2}, t + \frac{\tau}{2}\right) = R_{ik}(\tau, t), \quad i, k = g, \bar{g} \quad (A4)$$

$$S_{ik}(j\omega_1, j\omega_2) = S_{ik}\left\{j\left(\omega - \frac{\chi}{2}\right), j\left(\omega + \frac{\chi}{2}\right)\right\} = S_{ik}(j\omega, j\chi), \quad i, k = g, \bar{g} \quad (A5)$$

$$S_{ik}(j\omega_1, j\omega_2) = S_{ik}(j\omega, j\chi) = \iint R_{ik}(\tau, t) e^{-j(\omega\tau + \chi t)} dt d\tau, \quad i, k = g, \bar{g} \quad (A6)$$

여기서 R, S 는 평면 (t_1, t_2) , $(j\omega_1, j\omega_2)$ 과 평면 (τ, t) and $(j\omega, j\chi)$ 으로 부터 구별하기 위해 R, S 을 대신하여 사용하였다. $g(t), \bar{g}(t)$ 의 이중 시간 상호 상관(the double time cross-correlation) 그리고 이중 주파수 상호 스펙트럼 밀도 함수(double frequency cross-spectral density function)는 $\bar{g}(t) = \bar{g}(t)e^{j2\Omega t}$ 의 관계와 식(A1), (A2), (A6)으로부터 다음과 같이 구할수 있다 [6].

$$R_{g\bar{g}}(\tau, t) = R_{g\bar{g}}(t_1, t_2) = R_{g\bar{g}}(t_2 - t_1)e^{j2\Omega t_2} = R_{g\bar{g}}(\tau)e^{j\Omega\tau}e^{j2\Omega t} \quad (A7)$$

$$S_{g\bar{g}}(j\omega, j\chi) = 2\pi S_{g\bar{g}}\left\{j(\omega - \Omega)\right\}\delta_1(\chi - 2\Omega) \quad (A8)$$

여기서 $S_{g\bar{g}}(j\omega)$ 는 $g(t), \bar{g}(t)$ 의 양쪽 스펙트럼 밀도 함수이고, $\delta_1(j\omega)$ 는 다음과 같이 정의되는 유한 델타 함수(finite delta function)이다.

$$\delta_1(\omega) = \begin{cases} \frac{T}{2\pi}, & \left(-\frac{\pi}{T}\right) < \omega < \left(\frac{\pi}{T}\right) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (A9)$$

식(A3)과 식(A5)의 관계에 의해서 식(A8)은 다음과 같이 된다.

$$S_{g\bar{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{g\bar{g}}\left\{j\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - \Omega\right)\right\}\delta_1(\omega_2 - \omega_1 - 2\Omega) \quad (A10)$$

그리고 (A10)과 마찬가지로 다음 관계를 구할 수 있다.

$$S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{\hat{g}\hat{g}} \left\{ j \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - \Omega \right) \right\} \delta_1(\omega_2 - \omega_1 + 2\Omega) \quad (\text{A11})$$

여기서 $S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega)$ 는 $\hat{g}(t)$ 와 $g(t)$ 의 양쪽 스펙트럼 밀도 함수이다.

복소 입력 신호들의 관계 $\{\hat{g}(t)\}, \{\bar{g}(t)\}$ 와 $\{\bar{g}(t)\}, \{\hat{g}(t)\}$ 와 $\{\bar{g}(t)\}, \{\bar{g}(t)\}$ 그리고 $\{g(t)\}, \{\bar{g}(t)\}$ 도 역시 마찬가지로 확장 될 수 있다. $\{\bar{g}(t)\}$ 와 $\{\hat{g}(t)\}$ 의 이중 시간 상호 상관 함수와 이중 주파수 상호 스펙트럼 밀도 함수도 마찬가지로 유도 될 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{\bar{g}\bar{g}}(t_1, t_2) &= R_{\bar{g}\bar{g}}(t_2 - t_1) e^{j2\Omega t_2} \\ &= R_{\bar{g}\bar{g}}(\tau) e^{j\Omega \tau} e^{j2\Omega t_1} \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

$$S_{\bar{g}\bar{g}}(j\omega, j\chi) = 2\pi S_{\bar{g}\bar{g}} \{j(\omega - \Omega)\} \delta_1(\chi - 2\Omega) \quad (\text{A13})$$

변환관계 (A3)와 (A5)의 관계로 부터 식(A13)은 다음과 같이 쓸 수 있게 된다.

$$S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{\hat{g}\hat{g}} \left\{ j \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \Omega \right) \right\} \delta_1(\omega_2 - \omega_1 - 2\Omega) \quad (\text{A14})$$

그리고 (A14)과 마찬가지로 다음 관계를 구할 수 있다.

$$S_{\bar{g}\bar{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{\bar{g}\bar{g}} \left\{ j \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \Omega \right) \right\} \delta_1(\omega_2 - \omega_1 + 2\Omega) \quad (\text{A15})$$

여기서 $S_{\bar{g}\bar{g}}(j\omega)$ 는 $\bar{g}(t)$ 의 자기 스펙트럼 밀도 함수이다.

$\{\bar{g}(t)\}$ 와 $\{\hat{g}(t)\}$ 의 더블 시간 상호 상관과 더블 주파수 상호 스펙트럼 함수는 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{\hat{g}\hat{g}}(t_1, t_2) &= R_{\hat{g}\hat{g}}(t_2 - t_1) e^{-j2\Omega t_2} \\ &= R_{\hat{g}\hat{g}}(\tau) e^{-j\Omega \tau} e^{-j2\Omega t_1} \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

$$S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega, j\chi) = 2\pi S_{\hat{g}\hat{g}} \{j(\omega + \Omega)\} \delta_1(\chi + 2\Omega) \quad (\text{A17})$$

식(A18)은 식(A3)과 (A5)의 관계로 부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{\hat{g}\hat{g}} \left\{ j \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Omega \right) \right\} \delta_1(\omega_2 - \omega_1 + 2\Omega) \quad (\text{A18})$$

그리고 (A18)과 마찬가지로 다음 관계를 구할 수 있다.

$$S_{\bar{g}\bar{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{\bar{g}\bar{g}} \left\{ j \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Omega \right) \right\} \delta_1(\omega_2 - \omega_1 - 2\Omega) \quad (\text{A19})$$

$\{\bar{g}(t)\}, \{\hat{g}(t)\}$ 의 입력 관계도 마찬가지로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{\bar{g}\bar{g}}(t_1, t_2) &= R_{\bar{g}\bar{g}}(t_2 - t_1) e^{-j2\Omega t_1} e^{-j2\Omega t_2} \\ &= R_{\bar{g}\bar{g}}(\tau) e^{-j4\Omega t_1} \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

$$S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega, j\chi) = 2\pi S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega) \delta_1(\chi + 4\Omega) \quad (\text{A21})$$

식(A21)은 식(A3)과 (A5)의 관계로 부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{\hat{g}\hat{g}} \left\{ j \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right\} \delta_1(\omega_2 - \omega_1 + 4\Omega) \quad (\text{A22})$$

그리고 (A22)과 마찬가지로 다음 관계를 구할 수 있다.

$$S_{\bar{g}\bar{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{\bar{g}\bar{g}} \left\{ j \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right\} \delta_1(\omega_2 - \omega_1 - 4\Omega) \quad (\text{A23})$$

$\{g(t)\}, \{\bar{g}(t)\}$ 의 입력관계도 마찬가지로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{g\bar{g}}(t_1, t_2) &= R_{g\bar{g}}(t_2 - t_1) e^{-j2\Omega t_2} \\ &= R_{g\bar{g}}(\tau) e^{-j\Omega \tau} e^{-j2\Omega t_1} \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

$$S_{g\bar{g}}(j\omega, j\chi) = 2\pi S_{g\bar{g}} \{j(\omega + \Omega)\} \delta_1(\chi + 2\Omega) \quad (\text{A25})$$

식 (A25)은 식 (A3)과 (A5)의 관계로 부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_{g\bar{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{g\bar{g}} \left\{ j \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Omega \right) \right\} \delta_1(\omega_2 - \omega_1 + 2\Omega) \quad (\text{A26})$$

그리고 (A26)과 마찬가지로 다음 관계를 구할 수 있다.

$$S_{\hat{g}\hat{g}}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{\hat{g}\hat{g}} \left\{ j \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Omega \right) \right\} \delta_1(\omega_2 - \omega_1 - 2\Omega) \quad (\text{A27})$$

여기서 $S_{g\bar{g}}(j\omega)$ 는 $g(t)$ 의 자기 스펙트럼 밀도 함수이다.

정상 복소 랜덤 입력 $\{g(t)\}, \{\bar{g}(t)\}, \{\hat{g}(t)\}, \{\bar{g}(t)\}$ 들의 이중 시간 자기 상관관계 (double time autocorrelation)와 이중 주파수 자기 스펙트럼 분포 함수 (double frequency autospectral density functions)는 다음과 같이 구할 수 있다 [6,8].

$$\begin{aligned} R_{ii}(t, t) &= R_{ii}(0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint S_{ii}(j\omega_1, j\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int S_{ii}(j\omega_2) d\omega_2 \quad i = g, \bar{g}, \hat{g}, \bar{g} \end{aligned} \quad (\text{A28})$$

여기서, $S_{ii}(j\omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int S_{ii}(j\omega_1, j\omega_2) d\omega_1$ 이다.

마찬가지로 다음의 관계가 성립한다.

$$S_{ii}(j\omega_1, j\omega_2) = 2\pi S_{ii}(j\omega_2) \delta_1(\omega_2 - \omega_1). \quad (\text{A29})$$

따라서 이중 주파수 자기 스펙트럼 함수 $S_{ii}(j\omega_1, j\omega_2), i = g, \bar{g}, \hat{g}, \bar{g}$, ω_1 와 ω_2 이 $2\pi/T$ 만큼 떨어져 있다면 $(j\omega_1, j\omega_2)$ 의 평면에서 $\omega_1 = \omega_2$ 의 선상에서만 존재하게 된다.