

방향성 조화 웨이블릿 해석 기법

한윤식, 이종원*

(Directional Harmonic Wavelet Analysis)

(Yun-Sik Han, Chong-Won Lee)

ABSTRACT

A new signal processing technique, the directional harmonic wavelet map(dHWM), is presented to characterize the instantaneous planar motion of a measurement point in a structure from its transient complex-valued vibration signal. It is proven that the auto-dHWM essentially tracks the shape and directivity of the instantaneous planar motion, whereas the phase of the cross-dHWM indicates its inclination angle. Finally, the technique is successfully applied to an automobile engine for characterization of its transient motion during crank-on/idling/engine-off.

1. 서론

운전 중 진동 신호의 해석은 기계 내부의 상황을 가장 잘 대변해 주는 특징들을 추출하는데 중요한 역할을 한다. 소위 리사쥬 패턴(Lissajous pattern)이라 불리는 선화 궤적은 기계 내부의 한점의 평면 운동을 잘 나타내 주나, 일반적으로 여러 주파수 성분들이 포함되어 있어 형태가 복잡하여 기계내의 잠재적인 결함 등을 직접적으로 연관시키는데 어려움이 있다. 스펙트럼 해석은 결함 등의 메카니즘에 따른 진동 신호의 주파수, 진폭, 그리고 위상이 체계적으로 나타나기 때문에 기계 신호 처리 방법으로 가장 널리 사용되어 왔다. 그러나 기존의 신호 처리 방법은 운전 중 진동 신호를 실수값으로 취급하여 스펙트럼상에서 물리적으로 중요한 궤적의 방향성에 관한 정보를 상실하고 있다 [1, 2].

최근에 복소표기법을 근간으로 하는 복소 신호의 방향성 파워 스펙트럼 해석 방법이 회전 기계와 왕복 기관의 효과적인 진단 방법으로 사용되었다 [3-7]. 기본 아이디어는 수직 및 수평 방향 진동 신호를 복소 신호로 구성 후 이의 푸리에 변환으로부터 얻어지는 방향성 파워 스펙트럼은 평면 운동을 하는 선화 궤적의 전방과 후방 조화 성분들을 주파수 영역에서 분리해 낼 수 있다. 이때 양(음)의 주파수 영역에 나타나는 성분들은 전방(후방) 선화 성분들로 직접적인 대응이 된다. 그리하여 전방과 후방 성분의 변화는 선화 궤적이나 리사쥬 패턴의 변화를 나타내게 되고, 결국 기계내의 결함 등을 진단하는데 유용하게 사용될 수 있다. 평면 운동의 방향성과 모양에 대한 정보와 추가로 경사각을 알아 내기 위해서 방향성 상호 스펙트럼이 사용될 수 있다[5]. 그러나, 기존의 스펙트럼은 신호의 기본적인

특성이 시간에 따라 변하는 비정상 상태의 신호의 경우에 적용하지 못하므로 시간-주파수 영역에서 그 신호를 해석하려는 기법들이 있어 왔다 [8]. 먼저 단시간 푸리에 변환(Short time Fourier transform: STFT)의 제곱으로 정의되는 스펙트로그램(Spectrogram)은 고정된 크기의 작은 창문 함수를 시간에 따라 이동하면서 푸리에 변환을 순차적으로 실행하는 방법이다. 그러나, 창문함수의 길이에 따라서 시간-주파수 분해능에 큰 영향을 미친다. 스펙트로그램에 비하여 위그너 분포함수(Wigner distribution)는 높은 분해능을 제공할 뿐만 아니라 창문 함수의 영향을 받지 않는다 [9]. 그러나, 간섭 성분의 발생은 응용을 어렵게 만드는 요인으로 작용한다. 이를 감소시키는 방법으로 스무딩(Smoothing)을 들 수 있으나, 이는 신호 성분의 분해능을 약화시킨다. 최근에 매 순간적인 평면 운동을 나타내는 과도 상태의 복소 신호를 고려하기 위한 방향성 위그너 분포함수가 제안되었다[10].

본 연구에서는 최근에 개발된 조화 웨이블릿 변환(Harmonic wavelet transform) 기법[11]을 방향성 스펙트럼에 사용하기 위해 확장하였고, 시간-주파수 평면 상에서 신호의 에너지 분포를 얻기 위해 방향성 조화 웨이블릿맵(Directional harmonic wavelet map)이 제안되었다. 이 방법은 가변 대역폭을 활용하여 계산상 효율적인 구현을 가능하게 할 뿐만 아니라 위그너 분포함수에서 발생하는 간섭 성분의 영향을 실질적으로 받지 않는다. 방향성 자기 조화 웨이블릿맵(Directional auto-harmonic wavelet map)은 주파수 영역에서 분리된 전방/후방 성분들에 의하여 매 순간적인 평면 운동의 모양과 방향성을 알 수 있게 하며, 방향성 상호 조화 웨이블릿맵 (Directional cross-harmonic wavelet map)이 위상은 평면 운동의 경사각을 나타낸다. 끝으로 제안된 방향성 신호 처리 방법의 유용성을 검증하기 위해서 엔진 블럭에서 측정된 과도 상태 진동 신호의 방향성 조화 웨이블릿맵이 측정점의 평면 운동을 규명하는데 사용하였다.

* 한국과학기술원 기계공학과
소음 및 진동제어 연구 센터

2. 이론

2.1 복소 표기법

복소 신호 $p(t)$ 와 그 신호의 공액 신호 $\bar{p}(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(t) = y(t) + jz(t), \quad \bar{p}(t) = y(t) - jz(t), \quad (1)$$

여기서 $y(t)$ 와 $z(t)$ 는 수직 및 수평 방향 응답 신호이고, j 는 허수 단위($=\sqrt{-1}$)를 의미하고, 그리고 '-'는 공액 복소수를 나타낸다. 그림1에서 보여 주는 것처럼 복소 신호 $p(t)$ 는 실수축과 허수축이 이루는 평면에서 원점에서부터 움직이는 한점으로 연관시킬 수 있다. 주파수 ω 를 가지는 복소 조화 신호는 오일러 공식을 사용하여 극좌표 형태로 표기할 수 있다 [1].

$$\begin{aligned} p(t) &= p^f(t) + p^b(t) \\ &= r^f e^{j\omega t} + r^b e^{-j\omega t} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}(y_c + z_s) + \frac{j}{2}(z_c - y_s) \right\} e^{j\omega t} + \left\{ \frac{1}{2}(y_c - z_s) + \frac{j}{2}(z_c + y_s) \right\} e^{-j\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $r^f = |r^f| e^{j\phi^f}$, $r^b = |r^b| e^{j\phi^b}$, 그리고 식(1)를 이용하여,

$$y(t) = y_c \cos \omega t + y_s \sin \omega t, \quad z(t) = z_c \cos \omega t + z_s \sin \omega t \quad (3)$$

여기서 하첨자 b 와 f 는 각각 후방(시계방향) 및 전방(반시계방향) 성분을 나타내며, y_c 와 y_s (z_c 와 z_s)는 $y(t)$ ($z(t)$)의 푸리에 계수이다. 복소항 $e^{j\omega t}$ ($e^{-j\omega t}$)는 주파수 ω 로 전방(후방) 원운동하는 단위 벡터이고 복소량 r^f (r^b)는 크기 $|r^f|$ ($|r^b|$)와 초기위상 ϕ^f (ϕ^b)의 곱이다. 그리하여 그림1에서 보여주는 것처럼 복소 좌표 신호는 각각 다른 크기와 초기 위상을 가진 두개의 원운동하는 벡터의 합으로 나타낼 수 있다 [1]. 타원 형태의 평면운동의 형태와 방향성은 다음과 같이 정해진다.

$$\begin{aligned} r^f (r^b) = 0 & : \text{후방(전방) 원운동} \\ |r^b| > |r^f| & : \text{후방 타원 운동} \\ |r^b| = |r^f| & : \text{직선운동} \\ |r^b| < |r^f| & : \text{전방 타원 운동} \end{aligned} \quad (4)$$

위에서의 형태와 방향성 정보를 정량화하기 위해서 SDI(shape and directivity index)라는 지수가 다음과 같이 정의된다.

$$-1 \leq \text{SDI} = \frac{|r^f| - |r^b|}{|r^f| + |r^b|} \leq 1 \quad (5)$$

그리고,

$$\begin{aligned} \text{SDI} = -1 & : \text{후방 원운동} \\ -1 < \text{SDI} < 0 & : \text{후방 타원 운동} \\ \text{SDI} = 0 & : \text{직선 운동} \\ 0 < \text{SDI} < 1 & : \text{전방 타원 운동} \\ \text{SDI} = 1 & : \text{전방 원운동} \end{aligned}$$

즉, SDI의 부호는 방향성을 결정하고, 절대값은 원운동과의 상관 관계를 나타내는 지수이다.

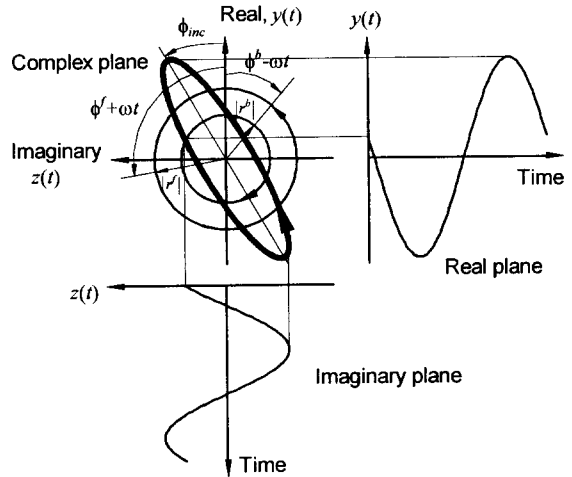


Figure 1. Representation of a complex-valued signal as the sum of two contra-rotating vectors.

y 축에 대해서 타원의 장축이 기울어진 경사각은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \phi_{inc} &= \frac{1}{2} (\phi^f + \phi^b) \\ &= \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \frac{z_c - y_s}{y_c + z_s} + \tan^{-1} \frac{z_c + y_s}{y_c - z_s} \right] \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2(y_c z_c + y_s z_s)}{y_c^2 + y_s^2 - z_c^2 - z_s^2} \end{aligned} \quad (6)$$

또한 타원의 장축과 단축의 반경은 다음과 같다.

$$|r|_{maj} = |r^f| + |r^b|, \quad |r|_{min} = \left| |r^f| - |r^b| \right| \quad (7)$$

$$\begin{aligned} |r^f| &= \frac{1}{2} \sqrt{(z_s + y_c)^2 + (z_c - y_s)^2}, \\ |r^b| &= \frac{1}{2} \sqrt{(y_s + z_c)^2 + (y_c - z_s)^2}. \end{aligned}$$

그러므로 타원 형태의 평면운동에 대한 정보를 알기 위해서 타원의 모양, 방향성, 그리고 경사각에 대한 정보가 필요하다.

2.2 방향성 웨이블릿 변환

푸리에 변환의 시간에 대한 종속성(dependency)을 부여하기 위해서 단시간 푸리에변환이 비정상상태 신호분석에 주로 이용되어왔다. 웨이블릿 변환은 시간-주파수 평면에서 해상도의 크기가 고정된 창문 함수를 사용하는 단시간 푸리에변환과는 달리 창문 함수의 크기를 가변시켜 관심있는 신호특성에 맞는 분석을 가능하게 해준다.

Morlet에 의해 소개된 연속 웨이블릿 변환(Continuous wavelet transform)은 복소신호에 대해서 다음과 같이 표현된다[12].

$$dW_p(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \bar{w}_{a,b}(t) dt, \quad a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0, \quad (8)$$

여기서 $w_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} w\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 이고, 웨이블릿 $w_{a,b}(t)$

는 보통 기본 혹은 mother 웨이블릿이라 부른다. a 는 팽창/축소와 관련된 스케일 상수이고, b 는 이동(translation)에 관련된 상수이며, \mathfrak{R} 은 실수영역을 나타낸다. 여기서 스케일 상수 a 가 클수록 긴 기저함수(Basis function)에 대응되고, 신호의 저주파 특성에 부합된다. 반면에 a 가 작을수록 기저는 짧고 고주파신호에 적합한 웨이블릿이 된다. 따라서 웨이블릿 변환의 경우 스케일 값에 따라서 기저함수는 임의의 대역폭을 가진 대역 통과 필터로써 신호를 분해한다 [13].

2.3 방향성 조화 웨이블릿 변환

웨이블릿 변환은 임의의 기저함수를 사용할 수 있다. 한편, 최근에 Newland에 의해 개발된 조화 웨이블릿은 주파수 영역에 대해서 아래와 같은 형태의 이상적으로 대역 제한된 필터 특성을 나타낸다[11].

$$W_h(\omega) = \frac{2\pi}{n-m}, \quad \text{for } m(2\pi) \leq \omega < n(2\pi), \quad (9)$$

$$= 0, \quad \text{elsewhere}$$

여기서 m 과 n 는 실수값을 갖는 상수이며, 이값들은 대역에 대해서 일정한 면적을 가지도록 해준다. 대응하는 조화 웨이블릿의 역푸리에 변환은 다음과 같다.

$$w_h(t) = \frac{\exp(jn2\pi t) - \exp(jm2\pi t)}{j(n-m)2\pi}, \quad (10)$$

즉 시간축에 대해서는 시간 t 에 대하여 상대적으로 $1/t$ 의 낮은 비율로 감쇠하여서 시간축의 국부화(localization)가 떨어지게 된다. 이를 개선하기 위한 방법으로 웨이블릿의 푸리에 변환의 양끝 데이터에 창문 함수를 사용한다. 조화웨이블릿은 $w_h(-t) = \bar{w}_h(t)$ 를 만족하기 때문에 convolution이론을 식(8)에

대입하면 방향성 조화 웨이블릿 변환을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dW_p(t, \omega) = \mathcal{F}^{-1} [P(\omega) \bar{W}_h(\omega)], \quad (11)$$

여기서 \mathcal{F}^{-1} 는 역푸리에 변환을 나타내며, $P(\omega)$ 는 복소신호의 두쪽 스펙트럼이고, $\bar{W}_h(\omega)$ 는 $w_h(t)$ 의 푸리에 변환이다.

그림2는 단시간 푸리에변환과 조화 웨이블릿 변환의 기저함수를 나타낸다. 단시간 푸리에변환은 모두 기저함수들이 같은 포락선(Envelope)를 가지나 창문 함수를 씌운 조화 웨이블릿 변환의 기저함수는 서로 다른 포락선을 가진다.

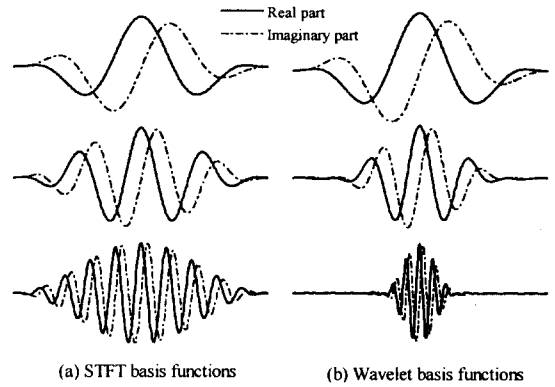


Figure 2 STFT and harmonic wavelet basis functions after weighting with the hanning window function.

그림3은 방향성 조화 웨이블릿 변환을 하는 과정을 간략히 나타낸 것이다. 특히 웨이블릿의 협대역폭은 관심있는 신호특성에 맞게 임의로 선정할 수 있다. 또한 시간-주파수 평면상의 신호의 개선된 결과를 얻기 위해서 주파수 영역의 겹침이 유용하며, 관심있는 주파수 영역만을 선택적으로 해석할 수 있다.

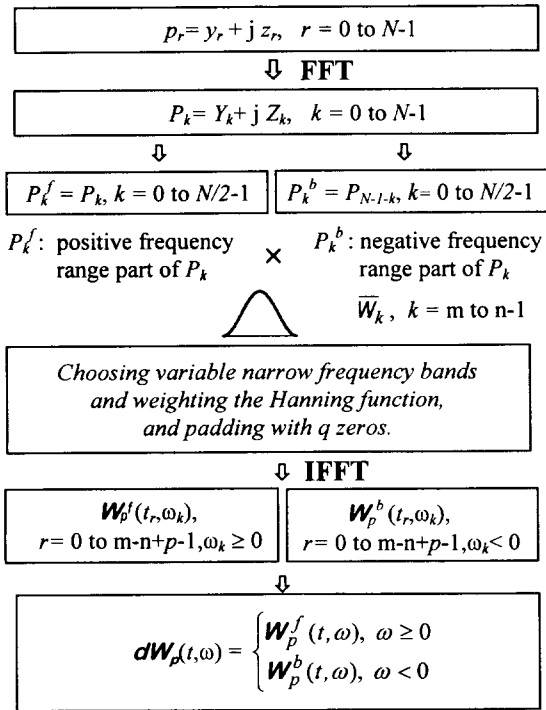


Figure 3 A schematic algorithm to compute the directional harmonic wavelet transform.

2.4 방향성 조화 웨이블릿 분포함수

복소신호 $p(t) = y(t) + jz(t)$ 의 방향성 조화 웨이블릿 분포함수는 방향성 웨이블릿 변환을 이용하여 정의할 수 있다.

$$dWMP_p(t, \omega) = \left| dW_p(t, \omega) \right|^2, \quad (12)$$

$$dWMP_{\bar{p}p}(t, \omega) = \overline{dW_{\bar{p}}(t, \omega)} \cdot dW_p(t, \omega),$$

여기서 $dWMP_p(t, \omega)$ 은 방향성 파워(자기) 조화 웨이블릿 분포함수이고, $dWMP_{\bar{p}p}(t, \omega)$ 은 방향성 상호 조화 웨이블릿 분포함수이다. 방향성 조화 웨이블릿 분포함수는 실수 신호의 조화 웨이블릿 분포함수로 나타낼 수 있다.

$$dWMP_p(t, \omega) = WM_y(t, \omega) + WM_z(t, \omega) + j \{ WM_{yz}(t, \omega) - WM_{zy}(t, \omega) \}$$

$$= WM_y(t, \omega) + WM_z(t, \omega) - 2 \cdot \text{Im} \{ WM_{yz}(t, \omega) \},$$

$$dWMP_{\bar{p}p}(t, \omega) = WM_y(t, \omega) - WM_z(t, \omega) + j \{ WM_{yz}(t, \omega) + WM_{zy}(t, \omega) \}$$

$$= WM_y(t, \omega) - WM_z(t, \omega) + j \cdot 2 \cdot \text{Re} \{ WM_{yz}(t, \omega) \}. \quad (13)$$

방향성 조화 웨이블릿 분포함수의 성질은 방향성 스펙트럼[5]과 밀접하게 관련되어 있다. 실수값을 가지는 신호의 경우 기존의 조화 웨이블릿 분포함수는 다음과 같은 성질을 나타낸다.

$$WM_y(t, -\omega) = \overline{WM_y(t, \omega)} = WM_y(t, \omega)$$

$$WM_{yz}(t, -\omega) = \overline{WM_{yz}(t, \omega)} = WM_{zy}(t, \omega), \quad (14)$$

여기서 $WM_y(t, \omega)$ 는 실수인 우함수이고, $WM_{yz}(t, \omega)$ 는 일반적으로 복소수이고 공역 우함수이다. 그리하여, 방향성 조화 웨이블릿 분포함수는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$dWMP_p(t, -\omega) = dWMP_{\bar{p}}(t, \omega), \quad (15)$$

$$dWMP_{\bar{p}p}(t, \omega) = \overline{dWMP_{\bar{p}p}(t, \omega)} = dWMP_{\bar{p}p}(t, -\omega),$$

결국 $dWMP_p(t, \omega)$ 는 항상 양수인 실수값을 가지나 반드시 ω 의 우함수는 아니다. 또한, $dWMP_{\bar{p}p}(t, \omega)$ 는 ω 의 공역 우함수이다. $dWMP_p(t, \omega)$ 는 스펙트로그램과 같이 시간-주파수 평면상에서 신호의 에너지 분포를 나타낸다. 그리고, 주파수 영역에서 전방/후방 성분의 분리를 가능하게 해 줄 뿐만 아니라 각각의 성분의 방향성에 관한 정보를 제공한다. 한편, $dWMP_{\bar{p}p}(t, \omega)$ 의 위상은 복소 평면 상에서의 다음과 같이 경사각 ϕ_{inc} 정보를 주게 된다.

$$\phi_{inc}(t, \omega) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im} \{ dHWM_{\bar{p}p}(t, \omega) \}}{\text{Re} \{ dHWM_{\bar{p}p}(t, \omega) \}} \right) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} \{ \phi^f(t, \omega) + \phi^b(t, \omega) \}.$$

3. 과도 상태 엔진 진동 시험

3.1 실험 장치 및 방법

운전 중 엔진의 관심있는 한 점은 3차원 공간 상에서 복잡한 궤적을 그리면서 진동할 것이다. 이때 임의의 평면상에 투영된 궤적은 복소 신호로써 정의될 수 있다. 본 연구에서는 엔진의 시동/공회전/정지시의 과도 상태의 진동 특성을 알기 위해서 4행정 4실린더 가솔린 엔진이 장착된 실차를 사용하였다. 실험은 데이터 취득 전에 충분히 운전시켰으며, 신호 취득은 엔진 블럭의 중앙 부근의 한점에 설치한 3축 가속도(B & K type 4321)를 사용하였다. 과도 상태 진동 신호는 연속적으로 엔진을 시동/공회전/정지시키면서, 아날로그 필터로 필터링 시킨 후 220Hz로 1024개의 샘플을 취득하였다. 엔진 블럭은 그림4에서 보여주는

깃처럼 6자유도 운동을 하는 강체로 생각할 수 있다. 따라서 3축 방향의 x, y, z 진동 신호를 사용하여 3개의 다른 평면운동을 정의할 수 있고 한 평면은 서로 다른 두 평면으로부터 만들어낼 수도 있다. 본 연구에서는 복소 신호 $r(t) = z(t) + jx(t)$ 를 사용하여 엔진의 롤링 운동을 다루었다.

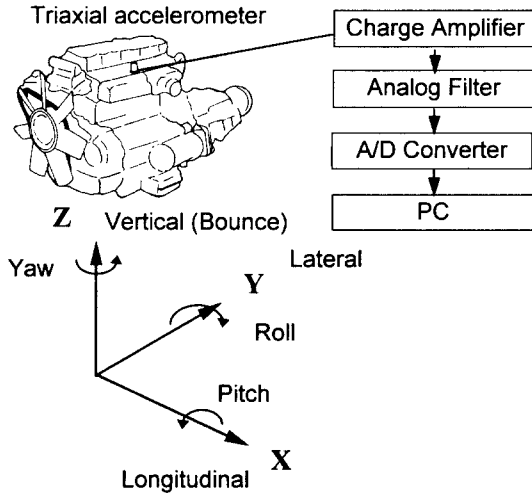


Figure 4 Experimental set-up and the coordinate system for engine vibration test.

3.2 실험 결과 및 고찰

그림5는 엔진의 시동/공회전/정지시의 과도 진동을 보여준다. 즉, 기동과 정지시의 전형적인 엔진 블럭의 급격한 요동과 공회전 상태가 관찰된다. 또한 수직(바운스)과 종(longitudinal)방향 진동치가 횡(lateral)방향치보다 더 크다는 것을 보여준다. 그림6는 대응하는 과도 엔진 진동의 순간적인 궤적을 보여준다. 궤적의 회전 방향은 크랭크 축의 회전 방향을 나타내며, 순간적인 평면운동의 모양과 방향성 그리고 경사각에 대한 정보를 보여준다. 그러나, 순간적인 궤적은 신호의 시간에 대한 주파수 변화에 대한 정보를 주지 않는다.

그림7은 과도 엔진 진동의 모양과 방향성을 추적하기 위해서 방향성 파워 조화 웨이블렛 분포 함수를 그린 것으로 엔진 시동 직후 속도가 대략 1500 rpm까지 상승하고 천천히 공회전 속도 820 rpm 으로 감속하는 것을 알 수 있다. 여기서 N_l 과 N_h 는 가장 낮은 주파수와 높은 주파수 영역에서의 푸리에 블럭의 크기를 의미하며, 그 크기는 선형적으로 증가한다. 그림8는 순간적인 SDI 값과 경사각을 나타내며, 특히 기동과 정지시에 급격한 변화를 알 수 있다.

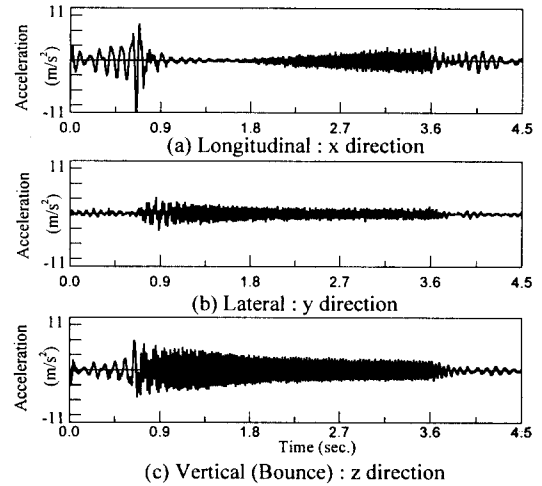


Figure 5 Trajectories of the transient engine vibrations during the crank-on/idling/engine-off.

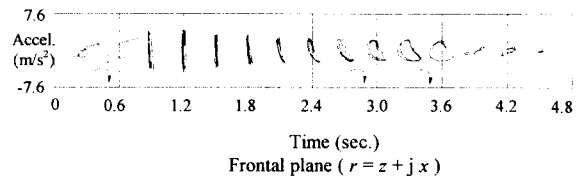
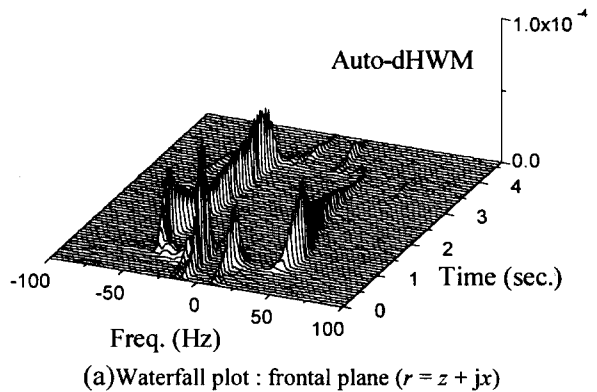
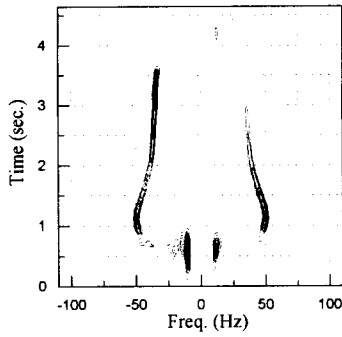


Figure 6 Trajectories of the transient engine vibrations during the crank-on/idling/engine-off.



(a) Waterfall plot : frontal plane ($r = z + jx$)



(b) Contour plot : frontal plane ($r = z + jx$)

Figure 7 Auto-dHWM of the transient engine vibrations during the crank-on/idling/engine-off : $f_s = 220$ Hz, $N = 1024$, $N_l = 50$, $N_h = 100$.

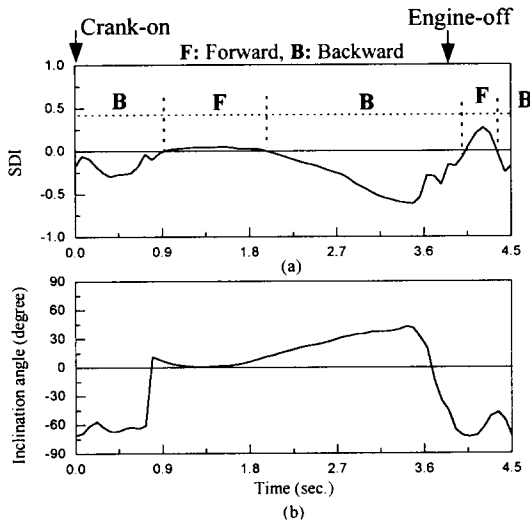


Figure 8(a) Instantaneous SDI and (b) inclination angle of the dominant transient engine vibration during the crank-on/idling/engine-off by the dHWMs: $f_s = 220$ Hz, $N = 1024$, $N_l = 50$, $N_h = 100$.

4. 결론

평면 운동을 나타내는 복소 진동 신호의 방향성 스펙트럼 해석 기법이 조화 웨이블릿을 이용하여 제안되었다. 연속적인 시동/공회전/정지시 과도 상태인 엔진 블럭의 운동을 알아내기 위한 실험 결과, 방향성 자기 및 상호 조화 웨이블릿 분포 함수를 활용하여 엔진의 순간적인 평면 운동의 모양과 방향성, 그리고 경사각을 효과적으로 알아낼 수 있음을 보였다.

5.참고 문헌

- 1 Lee, C.W., *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- 2 Lee, C.W., and Joh, Y.D., "A New Horizon in Modal Testing of Rotating Machinery," Keynote Paper, The Fourth Asia-Pacific Vibration Conference, Melbourne, Australia, Nov., 1991.
- 3 조치영, 이종원, "방향 스펙트럼을 이용한 회전체의 비대칭성 및 비등방성 진단," 한국 소음 진동 공학회지, 제3권, 제3호, 1993, pp.279-283.
- 4 Lee, C.W., and Park, J.P., "Inner Race Fault Detection in Rolling Element Bearings by Using Directional Spectra of Vibration Signals," Sixth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Oxford, U.K., Sep., 1996, pp.361-370.
- 5 Lee, C.W., Han Y.S. and Lee Y.S., "Use of Directional Spectra of Vibration Signals for Diagnosis of Misalignment in Rotating Machinery," 5th International Congress on Sound and Vibration, Adelaide, Australia, Dec., 1997, pp. 977-984..
- 6 Lee, C.W., Park J.P. and Han Y.S., "Use of Directional Spectra for Detection of Misfired Engine Cylinder," printing in Shock and Vibration Journal, 1998.
- 7 Southwick, D., "Using Full Spectrum Plots," Orbit, Vol.14, No.4, Dec., 1993, pp.19-21.
- 8 Cohen, L, *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall, 1995.
- 9 Qian, S., and Chen, D., *Joint Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall, 1996.
- 10 Lee, C.W., and Han, Y.S., "Directional Wigner Distribution and its Applications," accepted to Journal of Sound and Vibration, 1998.
- 11 Newland, D.E., "Practical Signal Analysis: Do Wavelets Make Any Difference?," Proceedings of DETC'97, ASME Design Engineering Technical Conference, Sacramento, USA, Sept. 1997, pp.1-12.
- 12 Combes, J.M., Grossmann, A., and Tchamitchian, Ph., *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space*, Springer-Verlag, Second Edition, 1990.
- 13 Rioul, O., and Vetterli, M., "Wavelet and Signal Processing," IEEE Signal Processing Magazine, Oct. 1991, pp.14-38.