

동일 평면상에서 연성된 평판구조물 진동의 파워흐름해석

°박도현*, 홍석윤**, 길현권***

Vibration Power Flow Analysis of Coupled Co-planar Plate Structures

°D. H. Park*, S. Y. Hong**, H. G. Kil***

Abstract

In this paper, the power flow analysis(PFA) method is applied to the prediction of the vibrational energy density and intensity of coupled co-planar plates. To cover the energy transmission and reflection at the joint of the plates, the wave transmission approach is introduced with the assumption that all the incident waves are normal to the joint. By changing the frequency ranges and internal loss factors, we have obtained the PFA results, and compared them with the analytical exact solutions.

1. 서론

선박, 항공기, 자동차를 비롯한 제반 산업기계 및 건축물과 같은 복합구조물의 고주파 영역에서의 진동현상은 소음 발생의 주요 원인이 되기 때문에 관심의 초점이 되고 있다. 저주파 영역에서의 진동해석에는 운동방정식을 기반으로 하는 유한요소법(Finite Element Method)이, 고주파 영역에서는 통계적 에너지해석법(Statistical Energy Analysis)이 널리 사용되고 있으나 통계적 에너지해석법의 경우 가진되는 모드수가 커야 하는 제한 조건 때문에 가진주파수폭이 좁고 모드밀도가 크지 않은 중주파수 영역에서의 진동해석에는 적합하지 못하며 구조물 각 요소내에서의 진동에너지의 공간적인 분포를 알 수 없으므로 구조요소내의 부분적인 감쇠처리가 힘들다는 단점이 있다. 유한

요소법의 경우 주파수가 증가할수록 주파수와 공간의 미소 변화에도 진동변위가 민감하게 변하기 때문에 구조물을 더욱 작은 구조요소로 나누어 계산해야 하므로 고주파 영역에서 많은 계산시간을 요하는 단점이 있다.

유한요소법과 통계적 에너지해석법의 한계를 보완하면서 진동하는 구조물의 거동과 진동에너지의 전달 경로를 파악하기 위해 여러 근사법들이 연구되어 왔다. Belov등에 의해 처음 제안된 파워흐름해석법(Power Flow Analysis, PFA)은 진동에너지의 공간적인 분포와 진동파워의 전달경로를 제시하며 고주파 영역뿐만 아니라 중주파수 영역에 까지 확대 적용될 수 있는 방법으로 인식되었다. Nefske와 Sung은 파워흐름해석법을 보의 횡진동에 적용하였고 Wohlever와 Bernard는 보의 횡진동과 종진동에 대한 에너지지배방정식을 제시하였다. Bouthier와 Bernard는 이차원 박막과 평판에 대한 에너지지배방정식을 제시하여 파워흐름해석법을 이차원 구조물의 진동해석에 적용하였다. 일반적으로 복합구조물들을 구성하는데 있어서 가장 많이 사용되는 구조요소중의 하나가 평판요소이므

* 서울대학교 조선해양공학과 대학원

** 서울대학교 조선해양공학과

*** 수원대학교 기계공학과

로 평판요소들에 대한 진동해석은 동적 구조물 진동해석에 대단히 중요한 비중을 차지한다고 할 수 있다.

본 논문에서는 중고주파수 영역에서 진동하는 평판요소로 이루어진 복합구조물의 진동에너지 밀도와 진동파워흐름의 분포를 알아 보기 위해, 동일 평면상에서 동적 특성이 서로 다른 직사각형 평판요소들로 나란히 연결된 평판구조물의 가장자리가 모두 단순지지되어 있는 경우에 대하여 파워흐름 해석법을 적용하였다. 이때 평판요소간의 임피던스 차이에 의해 진동에너지의 반사와 투과가 발생하는데 이를 고려하기 위해 연결부분에서의 평판을 무한평판으로 치환하는 파동전달법(wave transmission approach)을 도입하였다. 구해진 에너지 밀도와 파워는 진동변위로 표현되는 운동방정식으로부터 얻어지는 해석적인 엄밀해와 비교하였고 이로부터 파워흐름해석법이 적용가능한 주파수 영역과 내부손실계수의 범위등을 살펴보았다.

2. 파워흐름해석법에 의한 진동해석

2.1 평판의 횡진동에 대한 에너지지배방정식

주파수 ω 로 횡진동하는 두께가 얇은 평판에서 횡방향 변위가 작고 내부손실에너지도 충분히 작을 경우($\eta \ll 1$) 정상상태($\partial/\partial t=0$)에서 진동에너지 밀도는 열전도방정식과 유사한 형태의 다음 방정식을 만족한다.

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 e + \eta\omega e = \Pi \quad (2.1.1)$$

여기서 e 는 원거리영역(farfield)에서의 시간과 굽힘파의 한파장에 대해 공간 평균한 평판의 진동에너지 밀도이고 Π 은 단위면적에 작용하는 가진력에 의한 입력파워이다. η 는 구조감쇠에 의한 내부손실계수이고 c_g 는 굽힘파의 군속도로서 전파속도의 두배에 해당한다. 이때 진동파워는 (2.1.1)식으로부터 구해진 에너지 밀도와 다음의 관계식을 사용하여 구한다.

$$q = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla e \quad (2.1.2)$$

여기서 q 는 원거리영역에서의 시간과 굽힘파의 한파장에 대해 공간 평균한 평판의 진동 인텐시티(단위면적당 진동파워)이다. (2.1.2)식은 열의 경우처럼 진동파워도 진동에너지가 높은 곳에서 낮은 곳으로 흐른다는 것을 의미한다.

2.2 연성된 평판구조물의 파워흐름해석

Fig. 1(a)은 동일 평면상에서 서로 동적 특성이 다른 두 개의 직사각형 평판이 나란히 연결되어 구성된 평판구조물의 가장자리가 모두 단순지지되어 있고 횡방향의 점가진력 $Fe^{j\omega t}$ 에 의해 진동파워가 입력되고 있는 경우를 보여준다. 이때 평판구조물 전체를 가진력이 작용하는 위치와 요소간의 연결선(joint line)을 기준으로 세 영역(①,②,③)으로 나누면 각 영역에서의 진동에너지 밀도는 모두 (2.2.1)식과 같은 제차편미분방정식의 해가 된다.

$$-\frac{c_{gi}^2}{\eta\omega} \nabla^2 e_i + \eta\omega e_i = 0 \quad (2.2.1)$$

그리고 각 영역에서의 인텐시티와 에너지 밀도와 의 상관관계는 다음과 같다.

$$q_i = -\frac{c_{gi}^2}{\eta\omega} \nabla e_i \quad (2.2.2)$$

여기서 i 는 영역 ①,②,③을 나타내고 e_i 와 q_i 는 해당 영역 i 에서의 에너지 밀도와 인텐시티의 원거리영역 성분으로서 시간과 공간에 대한 평균값이다. c_{gi} 는 영역 i 에서의 굽힘파의 군속도이다.

(2.2.1)식의 일반해를 구하기 위하여 해석적인 방법의 하나로 실제값에 빨리 수렴한다고 알려진 Lévy해 형태의 단일급수를 이용하였다. 먼저 x 축에 평행한 경계선 $y=0$ 와 $y=L$,가 모든 영역에 걸쳐 단순지지되어 있고 외부에 더 이상 연결된 부재가 없기 때문에 경계로부터 흘러나가는 파워는 없다고 가정하였다. 따라서 에너지 밀도는 (2.2.3)식과 같이 y 에 관한 cosine의 급수로 표현할 수 있다.

$$e_i(x_i, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{in}(x_i) \cos k_n y \quad (2.2.3)$$

여기서 $e_{in}(x_i)$ 는 영역 i 에서 에너지 밀도 $e_i(x_i, y)$ 급수의 n 번째 성분의 계수이고 k_n 은 $n\pi/L_y$ 이다. (2.2.3)식을 (2.2.1)식에 대입하면 다음과 같이 $e_{in}(x_i)$ 에 관한 관계식을 얻는다.

$$-\frac{d^2 e_{in}(x_i)}{dx_i^2} + (k_n^2 + \Phi_i^2) e_{in}(x_i) = 0 \quad (2.2.4)$$

여기서 Φ_i 는 $\eta\omega/c_{gi}$ 이다. (2.2.4)식은 x 에 관한 2차상미분방정식이므로 다음과 같이 $e_{in}(x_i)$ 의 일반해를 구할 수 있다.

$$e_{in}(x_i) = e_{in}^+(x_i) + e_{in}^-(x_i) \quad (2.2.5)$$

여기서 $k_n^2 + \Phi_i^2$ 를 λ_{in}^2 라 두면

$$e_{in}^+(x_i) = A_{in}^+ \exp(-\lambda_{in} x_i) \quad (2.2.6)$$

$$e_{in}^-(x_i) = A_{in}^- \exp(\lambda_{in} x_i) \quad (2.2.7)$$

로 표현된다. 위첨자로 표시된 +와 -는 +x 방향과 -x 방향으로의 에너지 전달을 의미한다.

(2.2.3)식, (2.2.5)식, (2.2.6)식, 그리고 (2.2.7)식을 (2.2.2)식에 대입하면 영역 i 에서의 x 방향 인텐시티 성분 $q_{ix}(x_i, y)$ 와 y 방향 성분 $q_{iy}(x_i, y)$ 의 일반해도 다음과 같이 얻어진다.

$$q_{ix}(x_i, y) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{ixn}(x_i) \cos k_n y \quad (2.2.8)$$

$$q_{iy}(x_i, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{iyn}(x_i) \sin k_n y \quad (2.2.9)$$

여기서 $q_{ixn}(x_i)$ 는 $q_{ix}(x_i, y)$ 급수의 n 번째 성분의 계수이며 (2.2.5)식과 유사한 형태로 표현할 수 있다.

$$q_{ixn}(x_i) = q_{ixn}^+(x_i) - q_{ixn}^-(x_i) \quad (2.2.10)$$

$$q_{ixn}^+(x_i) = \frac{C_{gi}^2}{\eta\omega} \lambda_{in} e_{in}^+(x_i) \quad (2.2.11)$$

$$q_{ixn}^-(x_i) = \frac{C_{gi}^2}{\eta\omega} \lambda_{in} e_{in}^-(x_i) \quad (2.2.12)$$

$q_{iy}(x_i, y)$ 급수의 n 번째 성분의 계수인 $q_{iyn}(x_i)$ 도 위 식들처럼 표현하면 다음과 같다.

$$q_{iyn}(x_i) = q_{iyn}^+(x_i) + q_{iyn}^-(x_i) \quad (2.2.13)$$

$$q_{iyn}^+(x_i) = \frac{C_{gi}^2}{\eta\omega} k_n e_{in}^+(x_i) \quad (2.2.14)$$

$$q_{iyn}^-(x_i) = \frac{C_{gi}^2}{\eta\omega} k_n e_{in}^-(x_i) \quad (2.2.15)$$

한편, 점가진력에 의한 입력파워도 에너지 밀도와 마찬가지로 y 에 관한 cosine의 급수로 전개되어야 한다. 만약 Π 크기의 파워가 (x_o, y_o) 의 위치에 입력된다면 입력파워는 (2.2.16)식처럼 표현될 수 있다.

$$\Pi \delta(x - x_o) \delta(y - y_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(x) \cos k_n y \quad (2.2.16)$$

이때 (x_o, y_o) 는 가진력이 작용하는 위치이고, $\Pi_n(x)$ 는 급수의 n 번째 성분의 계수인데 n 의 값에 따라 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\Pi_n(x) = \begin{cases} \frac{\Pi}{L_y} \delta(x - x_o) & (n=0) \\ \frac{2\Pi}{L_y} \cos k_n y_o \delta(x - x_o) & (n \neq 0) \end{cases} \quad (2.2.17)$$

지금까지 진동에너지 밀도와 인텐시티의 일반해를 y 에 관한 급수로 구하였으며 다음은 각 영역에서의 미지수 A_{1n}^+ , A_{1n}^- 와 A_{2n}^+ , A_{2n}^- 그리고, A_{3n}^+ , A_{3n}^- 을 결정해야되는데 이를 위해서 평판구조물의 경계조건들을 이용하였다. 먼저 y 에 평행한 평판구조물의 좌우 양단의 경계선 $x_1=0$ 와 $x_3=L_x$ 에서는 더 이상 연결된 부재가 없으므로 흘러나가는 파워가 없다는 조건으로부터 다음의 관계식들을 얻는다.

$$q_{1x}(0, y) = 0, \quad q_{3x}(L_x, y) = 0 \quad (2.2.19)$$

또한 가진력에 의해 파워가 입력되는 위치 즉 영역 ①과 영역 ②의 경계선 $x_1=x_o$, $x_2=x_o-L_x$ 에

서는 에너지 밀도의 연속성과 파워의 평형조건을 만족해야 한다.

$$e_1(x_o, y) = e_2(x_o - L_x, y) \quad (2.2.20)$$

$$q_{2x}(x_o - L_x, y) = q_{1x}(x_o, y) + \Pi \delta(y - y_o) \quad (2.2.21)$$

여기서 입력파워 Π 는 다음 (2.2.22)식으로부터 구할 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2} |F|^2 \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z} \right\} \quad (2.2.22)$$

Z 는 가진력이 작용하는 위치에서의 임피던스인데 파워흐름해석법에서는 다음과 같이 무한평판의 임피던스를 이용한다.

$$\text{Re}(Z) = 8(D\rho h)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.23)$$

여기서 D, ρ, h 는 평판의 굽힘강성, 밀도, 두께를 각각 의미한다. 마지막으로 두 평판요소의 연결선 즉 영역 ②와 영역 ③의 경계선 $x_2=0, x_3=0$ 에서는 평판요소간의 임피던스 차이로 인해 진동에너지를 투과와 반사가 발생하는데 이에 따른 경계조건을 고려하기 위해서는 파동전달법(wave transmission approach)을 적용하였다. 연결선에서 영역 ②와 영역 ③으로 흘러 나가는 파워 성분 q_{2x}^- 와 q_{3x}^+ 는 영역 ②와 영역 ③에서 연결선으로 들어오는 파워 성분 q_{2x}^+ 와 q_{3x}^- 의 부분적인 반사와 투과에 의해 결정되는데 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$q_{2x}^-(0, y) = r_{22} q_{2x}^+(0, y) + r_{32} q_{3x}^-(0, y) \quad (2.2.24)$$

$$q_{3x}^+(0, y) = r_{23} q_{2x}^+(0, y) + r_{33} q_{3x}^-(0, y) \quad (2.2.25)$$

여기서 r_{ij} 는 영역 i 에서 연결선으로 입사되는 입사파의 파워에 대한 반사파의 파워 비로 표현되는 파워반사계수이고 r_{ij} 는 영역 i 에서 연결선으로 입사되는 입사파의 파워에 대한 영역 j 로 투과된 파동에 의한 파워 비로 표현되는 파워투과계수를 나타내는데 이들은 입사파의 연결선에 대한 입사각에 따라 서로 다른 값을 갖는다. 단일주파수로

가진되는 경우 연결선상에서의 입사각의 분포를 알면 반사계수와 투과계수를 결정할 수 있다. 그러나 입사각의 분포를 파악하기는 쉽지 않으며 해당되는 계수값들을 일일이 고려해야 하므로 계산 과정은 대단히 복잡해진다. 따라서 이러한 계산량을 줄이기 위해서는 단일주파수로 가진되는 경우 인정할 수 있는 오차범위내에서 대표되는 입사각 또는 파워투과계수를 제안할 필요가 있다. 파동전달법에서는 유한평판(finite plate)을 무한평판(infinite plate)으로 확장하였기 때문에 가진위치와 연결선 사이의 거리도 그만큼 충분히 멀어졌다고 생각할 수 있으므로 본 논문에서는 모든 파동이 연결선에 수직으로 입사한다고 가정하였고, 이때의 파워투과계수를 대표값으로서 사용하였다.

(2.2.19)-(2.2.25)식의 경계조건식들을 이용하여 미지수들을 결정함으로써 각 영역에서의 시간 및 공간에 대한 평균 에너지 밀도와 인텐시티를 구할 수 있다.

3. 계산 결과의 비교 및 검토

파워흐름해석법을 이용하여 해석적으로 구한 에너지 밀도와 인텐시티(PFA solution)를 진동변위로 표현되는 운동방정식으로부터 얻어진 해석적인 엄밀해(부록 참조)와 몇가지 사례를 통해 비교해 보았다. 본 연구에서는 Fig. 1(a)과 같이 두께가 다르고 탄성계수 $E=7.1 \times 10^{10}$, 포아송비 $\nu=0.33$, 밀도 $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$ 인 동일 알루미늄 평판을 점가진력에 의해 단일 주파수로 가진하고 가장자리는 단순지지되어있는 경우를 대상으로 하였는데 이에 해당되는 에너지 경계조건은 Fig. 1(b)처럼 평판의 한지점에 가진력에 의한 파워가 입력되고 구조물의 가장자리에서는 외부로 흘러나가는 파워가 없다고 설정하였다. Fig. 2-5는 평판의 두께가 왼쪽 평판은 $h_l=1 \text{ cm}$ 이고 오른쪽 평판은 $h_r=2 \text{ cm}$ 로 오른쪽 평판이 두꺼운 경우이고, Fig. 6과 7은 $h_l=2 \text{ cm}$ 이고 $h_r=1 \text{ cm}$ 로 왼쪽 평판이 두꺼운 경우이다. Fig. 2와 3에서 보듯이 파워흐름해석법에서 얻어진 결과는 중고주파수로 진동하는 연성된 평판구조물의 전반적인 진동에너지 분포와 파워

전달경로동이 잘 예측됨을 알 수 있다. 그리고 파워흐름해석법은 유한평판을 무한평판으로 치환하는 파동전달법과 함께 적용되기 때문에 감쇠가 작거나 진동 주파수가 낮을수록 결과의 정확성이 떨어질 것이다. 그러나 주파수가 높은 경우($f=20000$ Hz)에는 Fig. 5(a)와 Fig. 7(a)로부터 감쇠가 작아도 비교적 정확한 결과가 예측되었으며 Fig. 4(b)와 Fig. 6(b)에서 보듯이 감쇠가 큰 경우($\eta=0.2$) 진동 주파수 200Hz와 같은 낮은 주파수 영역에서도 에너지 분포가 잘 표현됨을 알 수 있었다.

4. 결론

단일주파수로 가진되는 연성된 평판구조물의 진동에너지의 분포와 인텐시티를 예측하기 위해 가장자리가 모두 단순지지되어 있고 두께가 다른 평판요소로 이루어진 경우를 대상으로 파워흐름해석법을 Lévy해 형태의 단일급수를 이용하여 해석적인 방법으로 적용해 보았다. 아울러 평판요소간의 연성으로 인한 진동파워의 부분적인 투과와 반사를 고려하기 위해 연결부분으로 입사하는 모든 파동은 수직을 이룬다는 가정과 함께 유한평판을 무한평판으로 치환하는 파동전달법을 도입하였고 파워흐름해석법으로부터 얻어진 결과들을 여러 경우에 대해 해석적인 엄밀해와 비교하였다. 결과로, 파워흐름해석법은 중고주파수 영역에서 진동하는 동일 평면상에서 연성된 평판구조물 진동의 에너지 밀도와 인텐시티의 전반적인 분포를 예측하는데 대단히 유용하게 이용될 수 있음이 확인되었고, 감쇠가 큰 경우에는 200Hz 근처의 저주파 영역에서도 적용가능함을 알 수 있었다. 파워흐름해석법은 고주파수 영역에서 가진주파수가 어느정도 대역폭(band width)을 가지고 있는 경우 주파수에 대한 평균적인 결과를 얻기 위해 적용되어 왔는데 본 연구에서는 단일주파수로 가진되는 연성된 평판구조물에 파워흐름해석법의 적용범위를 확장하였다는 점에서 그 의미를 찾을 수 있었다.

평판으로 구성된 복합구조물들은 평판요소가 일정 각도를 가지고 여러면으로 연성된 경우가 보다 일반적인 특성을 보여주므로 향후 이에 대한 연구가 더욱 연속적으로 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

- [1] R.H. Lyon, 1975, "Statistical Analysis of Dynamic Systems: Theory and Applications," MIT Press.
- [2] D.J. Nefske, S.H. Sung, 1989, "Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems : Basic Theory and Application to Beams," J. Vib. Acoustics, Stress and Reliability in Design, 111, pp.94-100.
- [3] O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, 1992, "Models of Space-Averaged Energetics of Plates," AIAA J., 30(3), pp.616-623.
- [4] O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, 1995, "Simple Models of the Energetics of Transversely Vibrating Plates," J. Sound Vib., 182(1), pp.149-164.
- [5] O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, C. Wohlever, 1990, "Energy and Structural Intensity Formulations of Beam and Plate Vibrations," 3rd International Congress on Intensity Techniques, pp.37-44.
- [6] P.E. Cho and R.J. Bernhard, 1993, "A Simple Method for Predicting Energy Flow Distributions in Frame Structures," 4th International Congress on Intensity Techniques, pp.347-354.
- [7] P.E. Cho, 1993, "Energy Flow Analysis of Coupled Structures," Ph.D. Dissertation, Purdue University.
- [8] L. Cremer, M. Heckl, E.E. Ungar, 1973, Structure-Borne Sound, Springer-Verlag, Berlin.
- [9] M.J. Sablick, 1982, "Coupling Loss Factors at a Beam L-joint Revisited," J. Acoust. Soc. Am., 72(4), pp.1285-1288.
- [10] J.C. Wohlever, R.J. Bernhard, 1992, "Mechanical Energy Flow Models of Rods and Beams," J. Sound Vib., 153(1), pp.1-19.
- [11] J.D. Palmer, E.J. Williams, C.H.J. Fox, 1992, "High Frequency Power Flow in Structures,"

10th IMAC, pp.701-707.

- [12] R.S. Langley, 1995, "On the Vibrational Conductivity Approach to High Frequency Dynamics For Two-Dimensional Structural Components," J. Sound Vib., 182(4), pp.637-657.
- [13] S. Timoshenko, W. Woinowski-Krieger, 1959, "Theory of Plates and Shells," 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
- [14] D.j. Gorman, 1982, "Free Vibration Analysis of Rectangular Plates," Elsevier, New York.
- [15] 길현권, 홍석윤, 1997, "보형상의 복합구조물 진동의 파워흐름해석", 대한조선학회 추계학술대회논문집, pp.530-534.

부록

Fig. 1(a)로부터 두평판을 세 영역으로 나누면 각 영역에서 평판의 운동방정식은 다음과 같다.

$$D_{ci} \nabla^4 w_i + (\rho h)_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (A.1)$$

여기서 w_i 는 각 영역에서의 횡방향 진동변위이고 D_{ci} 는 평판의 굽힘강성(bending stiffness)으로서 내부감쇠가 있기 때문에 복소수 형태로 표현된다. 한편 x 축에 평행한 경계선 $y=0$ 와 $y=L_y$ 가 모든 영역에 걸쳐 단순지지되어 있으므로 (A.1)식의 일반해는 y 에 대한 sine의 단일급수로 나타낼 수 있다.

$$w_i(x_i, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{in}(x_i) \sin k_n y \quad (A.2)$$

여기서 $w_{in}(x_i)$ 는 급수의 n 번째 성분의 계수이다. 이를 운동방정식 (A.1)식에 대입하면 $w_{in}(x_i)$ 의 x 에 관한 4차상미분방정식을 얻을 수 있는데 이로부터 $w_{in}(x_i)$ 의 일반해는 다음과 같다.

$$w_{in}(x_i) = C_i^+ \exp(-\alpha_{in} x_i) + C_i^- \exp(\alpha_{in} x_i) + D_i^+ \exp(-\beta_{in} x_i) + D_i^- \exp(\beta_{in} x_i) \quad (A.3)$$

여기서 $\alpha_{in}^2 = k_n^2 + k_i$, $\beta_{in}^2 = k_n^2 - k_i$ 이고 k_i 는 영역 i 에서의 굽힘파의 파동수(wave number)이다. 그리고 평판구조물에 작용하는 가진력 역시 y 에 대한 sine의 단일급수로 나타내져야 한다.

$$F \delta(x-x_o) \delta(y-y_o) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \sin k_n y \quad (A.4)$$

$$F_n(x) = \frac{2}{L_y} F \sin k_n y_o \delta(x-x_o) \quad (A.5)$$

(A.3)식에 있는 영역 i 에서의 미지수 C_i^+ 와 C_i^- 그리고 D_i^+ 와 D_i^- 를 결정하기 위해서는 평판구조물의 경계조건을 사용해야 하는데 먼저 좌우 양단의 경계선 $x_1=0$ 와 $x_3=L_x$ 은 단순지지되어 있으므로 변위와 굽힘모멘트가 없다. 그리고 가진력이 작용하는 위치와 두 평판이 연결된 부분에서는 인접한 두 영역에 대해 변위의 연속성, 각도의 일치성, 수직방향의 힘과 모멘트의 평형조건이 만족되어야 한다.

경계조건으로부터 미지수들을 결정하면 각 영역에서의 횡방향 진동변위 w_i 를 구할 수 있다. 따라서 에너지 밀도와 인텐시티의 엄밀해는 다음과 같이 횡방향 진동변위와의 관계식으로부터 얻어진다.

$$e_i = \frac{D_i}{4} \left\{ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_i^*}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_i^*}{\partial y^2} + 2\nu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_i^*}{\partial y^2} + 2(1-\nu_i) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial y} \frac{\partial^2 w_i^*}{\partial x_i \partial y} \right\} + \frac{(\rho h)_i}{4} \frac{\partial w_i}{\partial t} \frac{\partial w_i^*}{\partial t} \quad (A.6)$$

$$q_{ix} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -Q_{ixi} \frac{\partial w_i}{\partial t} + M_{xxi} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial t} + M_{xyi} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y \partial t} \right\} \quad (A.7)$$

$$q_{iy} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -Q_{yxi} \frac{\partial w_i}{\partial t} + M_{yyi} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y \partial t} + M_{xyi} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial t} \right\} \quad (A.8)$$

$$\text{여기서 } M_{xxi} = -D_{ci} \left\{ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \nu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right\} \quad (A.9)$$

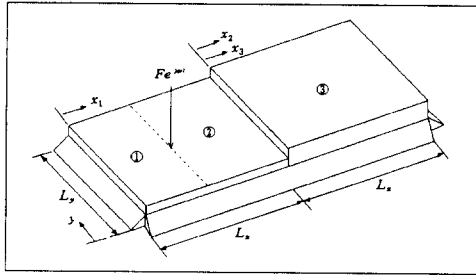
$$M_{yyi} = -D_{ci} \left\{ \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \nu_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right\} \quad (A.10)$$

$$M_{xyi} = M_{yxi} = -D_{ci} (1-\nu_i) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial y} \quad (A.11)$$

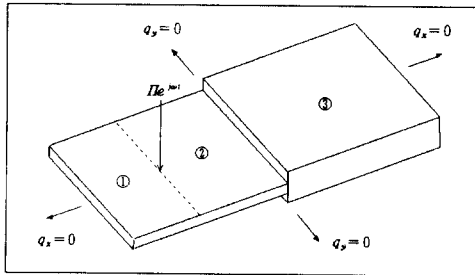
$$Q_{xzi} = -D_{\alpha i} \left\{ \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3} + \nu_i \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i \partial y^2} \right\} \quad (\text{A.12})$$

$$Q_{yzi} = -D_{\alpha i} \left\{ \frac{\partial^3 w_i}{\partial y^3} + \nu_i \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^2 \partial y} \right\} \quad (\text{A.13})$$

여기서 e_i 는 평판에서 굽힘파의 시간평균된 에너지 밀도이고 q_{ix} 와 q_{iy} 는 각각 시간평균된 인텐시티의 x 방향성분과 y 방향성분이다.

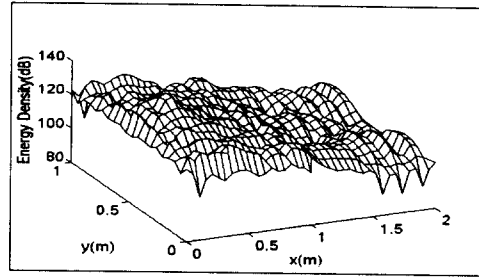


(a)

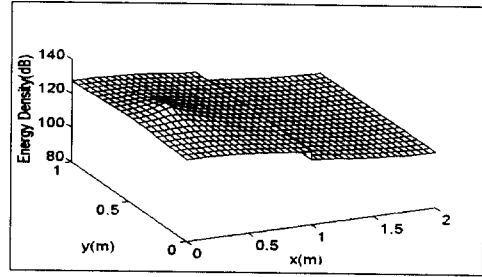


(b)

Fig. 1 Boundary conditions of coupled plate structures. (a) simple supports and (b) corresponding energy boundary conditions

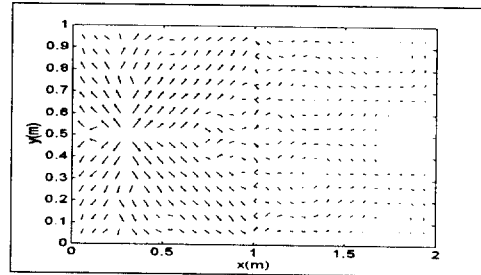


(a)

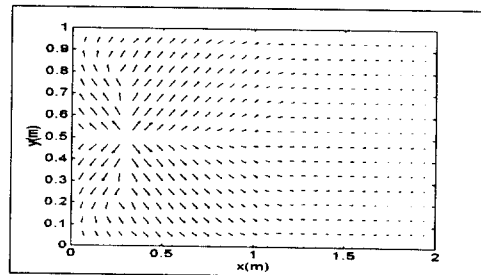


(b)

Fig. 2 The energy density distributions of coupled aluminum plates when $f=2000\text{Hz}$, $\eta=0.2$, $h_1=1\text{cm}$, $h_2=2\text{cm}$, $L_x=L_y=1\text{m}$. (a) exact solution and (b) PFA solution

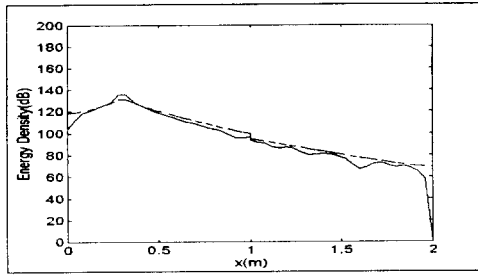


(a)

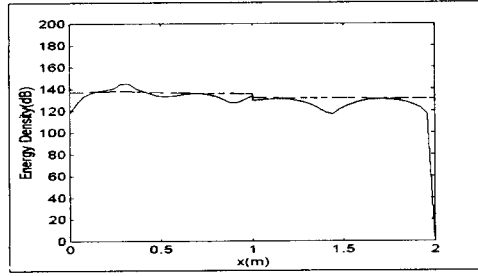


(b)

Fig. 3 The intensities of coupled aluminum plates when $f=2000\text{Hz}$, $\eta=0.2$, $h_1=1\text{cm}$, $h_2=2\text{cm}$, $L_x=L_y=1\text{m}$. (a) exact solution and (b) PFA solution

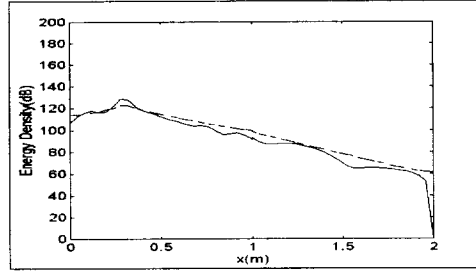


(a)

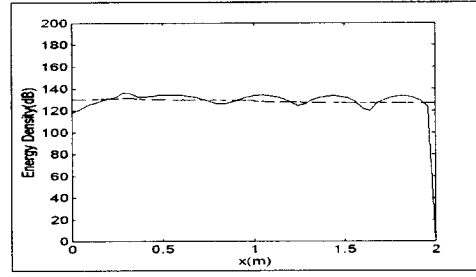


(b)

Fig. 4 The energy density distributions of coupled aluminum plates along the $y=0.5\text{m}$ when $\eta=0.2$, $h_i=1\text{cm}$, $h_r=2\text{cm}$, $L_x=L_y=1\text{m}$. (a) $f=20000\text{Hz}$ and (b) $f=200\text{Hz}$, —: exact solution, --: PFA solution.

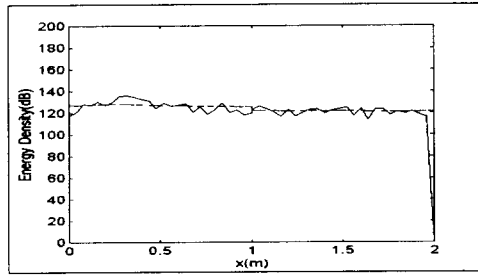


(a)

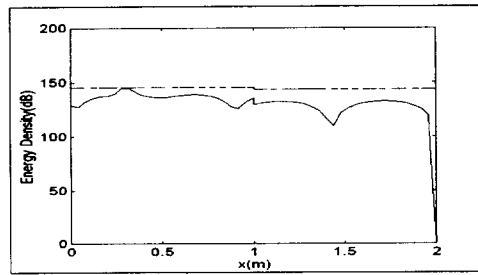


(b)

Fig. 6 The energy density distributions of coupled aluminum plates along the $y=0.5\text{m}$ when $\eta=0.2$, $h_i=2\text{cm}$, $h_r=1\text{cm}$, $L_x=L_y=1\text{m}$. (a) $f=20000\text{Hz}$ and (b) $f=200\text{Hz}$, —: exact solution, --: PFA solution.

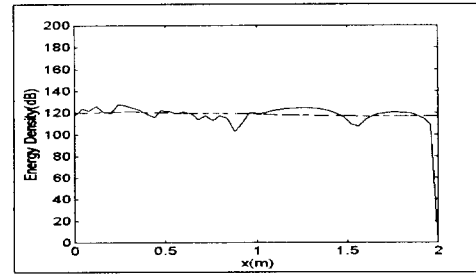


(a)

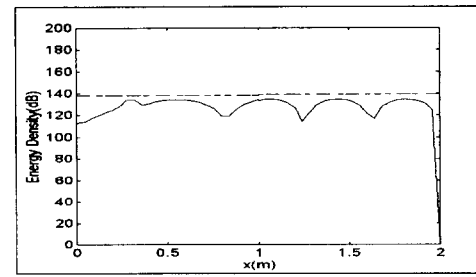


(b)

Fig. 5 The energy density distributions of coupled aluminum plates along the $y=0.5\text{m}$ when $\eta=0.02$, $h_i=1\text{cm}$, $h_r=2\text{cm}$, $L_x=L_y=1\text{m}$. (a) $f=20000\text{Hz}$ and (b) $f=200\text{Hz}$, —: exact solution, --: PFA solution.



(a)



(b)

Fig. 7 The energy density distributions of coupled aluminum plates along the $y=0.5\text{m}$ when $\eta=0.02$, $h_i=2\text{cm}$, $h_r=1\text{cm}$, $L_x=L_y=1\text{m}$. (a) $f=20000\text{Hz}$ and (b) $f=200\text{Hz}$, —: exact solution, --: PFA solution.