

# 고유진동수의 실험값을 사용한 복합재 적층판의 동적 모델링 개선

°홍단비<sup>1</sup>, 유정규<sup>2</sup>, 박성호<sup>3</sup>, 김승조<sup>4</sup>

## Dynamic model updating of the laminated composite plate Using natural frequencies measured from modal test

Danbi Hong, Jung-kyu Ryou, Sungho Park, and Seung Jo Kim

### ABSTRACT

In order to improve the prediction of dynamic behavior in structures, several lower vibration modes from FFT analysis through experiments are used to update the mechanical properties followed by the updated frequencies from numerical analysis. Performance index consists of the sum of error norms between the chosen frequencies and corresponding frequencies from numerical analysis. As an updating process of the natural frequencies, the optimization algorithm based on conjugate gradient method is adopted. The gradient of performance index is calculated using the sensitivity of selected eigenvalues with respect to each design parameter. The mechanical properties of lamina,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  and  $G_{12}$ , are design parameters for the updating process. The proposed method is applied to predict the dynamic behavior of composite laminated plates of  $[0]_{8T}$  and  $[\pm 45]_{2S}$  separately or interchangeably. Also, the mixed case for  $[0]_{8T}$  and  $[\pm 45]_{2S}$  is examined to check the possibility for the improved prediction generally. The good agreement is obtained between the measured frequencies and the numerical ones. Based on the results for all the cases studied, the proposed approach has a clear potential in characterizing the mechanical properties of composite lamina.

### 1. 서론

효과적인 구조물의 진동 제어를 위해서는 구조물의 동적 거동을 정확히 모사할 수 있는 해석적 모델을 확보하는 것이 중요하다. 그런데 일반적으로 해석적 모델은 실험결과와는 일치하지 않는 동적 특성을 보인다[1,2]. 특히 복합재 적층판의 경우 더욱 그러하다. 그러므로 본 연구에서는 변수식별(parametric identification) 방법을 사용한 최적화 과정을 통해 새로운 구조물의 기계적 특성값을 얻고, 그 값들을 사용함으로써 구조물의 고유진동수를 보다 정확하게 예측할 수 있도록 하였다. 본 연구에서는 시편의 고유진동수를 측정하기 위

한 감지기로서 스트레인 게이지를 사용하였다. 스트레인 게이지의 위치는 자유진동하는 구조물의 주 변형률(principal strain)을 계산하여 결정하였다. 시편을 충격가진한 후 스트레인 게이지로부터 측정된 신호를 고속 푸리에 변환(FFT)을 통해 고유진동수를 측정하였다.

실험에 사용한 복합재 적층판의 경우 길이와 폭에 비해 두께가 상당히 얇으므로 구조물의 모델링을 위해 고전적층판이론(CLPT)을 적용하여 4절점 키르히호프 평판 요소(Kirchhoff plate element)를 사용하였다. 복합재 판의 기계적 특성값인  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ 를 설계변수로 하여 변수식별 과정을 수행하였다. 적층순서가  $[0]_{8T}$ ,  $[\pm 45]_{2S}$ 인 적층판에 대해 각각 변수식별을 수행하였고, 각각의 결과를 다른 적층판에 교차적용 하여 고유진동수를 예측해 보

1 서울대학교 대학원 항공우주공학과  
2 국방과학연구소  
3 서울대학교 대학원 항공우주공학과  
4 서울대학교 공과대학 항공우주공학과

았다. 변수식별을 위한 최적화 방법으로는 conjugate gradient method를 사용하였다[3]. 설계변수에 대한 고유치의 민감도 해석을 통해 성능지수의 구배(gradient)를 계산하여 고유치의 실험값과 수치해석값 사이의 오차로 구성된 성능지수를 최소화하였다.

## 2. 시스템 모델

고전 판이론을 도입하면 변위장  $(u, u_2, u_3)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z,t) &= u(x,y,t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2(x,y,z,t) &= v(x,y,t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3(x,y,z,t) &= w(x,y,t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $(u, u_2, u_3)$ 는  $x, y, z$ 축에 대한 점  $(x, y, z)$ 에서의 변위이고  $(u, v, w)$ 는 시간  $t$ 일 때 중립면  $(x, y, 0)$  위의 점에 대한 좌표이다.

구조물의 유한요소 이산화화를 위해 각 절점에서 수직변위  $w$ 와 회전각인  $\theta_x, \theta_y$ 를 자유도로 하는 4절점 키르히호프 평판 요소를 사용한다. 그러면 지배방정식 속의 질량행렬  $\mathbf{M}$ 과 강성행렬  $\mathbf{K}$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV; \quad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{H}$ 는 변위보간 행렬,  $\mathbf{B}$ 는 변형률-변위관계 행렬,  $\mathbf{C}$ 는 탄성행렬이고,  $\rho$ 는 밀도를 나타낸다. 그러면 구조물의 동적 거동은 다음과 같은 지배방정식으로 표시된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{M}$ 은  $\rho$ 의 함수인 질량행렬이고,  $\mathbf{K}$ 는 이방성인 복합재의 경우  $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ 의 함수이다. 벡터  $\mathbf{U}$ 는 구조물의 총 자유도를,  $\mathbf{F}$ 는 외력을 나타낸다.

## 3. 변수식별을 위한 최적화 방법

### 설계변수

변수식별을 위한 설계변수로서 무차원화한 기계적 특성값의 집합  $\mathbf{X}$ 를 도입한다.

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} & \dots & x_{n0} \\ x_{10} & x_{20} & \dots & x_{n0} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

여기서  $x_{i0}$ 는 구조물의 기계적 특성값의 초기값이다. 그러므로 무차원화한 설계변수 집합의 초기값은  $[1 \ 1 \ \dots \ 1]$ 이 된다. 이 방법은 설계변수 중 포아송비(Poisson's ratio)가 다른 기계적 특성값들에 비해 상당히 작기 때문에 생기는 성능지수의 큰 이심률(eccentricity)을 감소시키기 위해 제안되었다. 이것은 수학적으로 최적화하는 과정에서 수렴성을 증진시키는 것으로 알려져 있다[4].

### 민감도 해석

식(3)으로부터 다음과 같이 정의되는 고유치 문제를 유도할 수 있다[5].

$$\mathbf{K}\phi_j = \lambda_j \mathbf{M}\phi_j \quad (4)$$

여기에서  $\phi_j$ 는  $j$ 번째 모드의 고유벡터이고,  $\lambda_j$ 는  $j$ 번째 모드의 고유치이다. 고유벡터는 다음의 조건을 만족시킨다.

$$\phi_j^T \mathbf{K}\phi_j = \lambda_j, \quad \phi_j^T \mathbf{M}\phi_j = 1 \quad (5)$$

식(4)를 무차원화된  $i$ 번째 설계변수에 대해 미분하면

$$\left[ \mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M} \right] \frac{\partial \phi_j}{\partial X_i} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial X_i} \mathbf{M} \right] \phi_j \quad (6)$$

식(6)의 양변에  $\phi_j^T$ 를 앞에 곱한 후 정리하면

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial X_i} = \phi_j^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right] \phi_j \quad (7)$$

이 된다. 여기서  $\partial \lambda_j / \partial X_i$ 는  $i$ 번째 설계변수에 대한  $j$ 번째 고유치에 대한 민감도를 나타낸다. 식

(7)에서 행렬  $\mathbf{K}$ 의 미분값은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} = \int_v \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial X_i} \mathbf{B} dV \quad (8)$$

### 성능지수

실험에서 측정된 고유진동수와 수치적 모델로부터 계산된 고유진동수를 사용하여 다음과 같이 성능지수  $J$ 를 구성할 수 있다.

$$J = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(\log \lambda_i - \log \alpha_i)^2}{(\log \lambda_i)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

여기서  $\alpha_i$ 는 실험에서 측정한 고유치,  $\lambda_i$ 는 수치적인 고유치이고,  $n$ 은 사용된 모드의 개수를 나타낸다. 식(9)은 logarithmic scale인 고유치의 실험값과 그에 각각 상응되는 수치해석값 사이의 정규화된 error norm을 의미한다. 성능지수를 최소화하기 위한 최적화 방법으로서 conjugate gradient method를 채택하였다. 성능지수의 구배(gradient)는 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{G} = [G_1 \ G_2 \ G_3 \ G_4]^T; \quad G_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial X_j} \quad (9)$$

## 4. 실험방법 및 결과

### 시편제작

본 연구에서는 적층순서가  $[0]_{8T}$ ,  $[\pm 45]_{2S}$ 인 복합재 적층판을 사용하여 크기가  $150\text{mm} \times 100\text{mm} \times 1.2\text{mm}$ 인 시편을 제작하였다. 시편은 폭 방향의 한쪽 변이 고정된 경계조건을 갖는다. 구조물의 고유진동수를 측정하기 위해서 스트레인 게이지를 적층판 위에 부착하였다. 자유진동하는 시편의 주 변형률(principal strain)을 계산하여 스트레인 게이지의 부착한 위치와 각도를 결정하였다. 제작된 시편의 모습은 Fig. 2 및 Fig. 3과 같다. 그리고 Fig. 1은 실험장치의 구성을 나타낸다.

### 실험방법

고유진동수를 측정하기 위해 충격망치로 시편을 가진한 후 스트레인 게이지로부터 측정된 신호를 고속 푸리에 변환(FFT)하였다.  $[0]_{8T}$ 의 경우 66, 106, 344, 415, 487 Hz,  $[\pm 45]_{2S}$ 의 경우 34, 182, 206, 565, 581 Hz가 측정되었다.

## 5. 수치최적화를 통한 변수식별

Table 1은 복합재 판의 기계적 특성값의 초기값을 나타낸다. 각 특성값을 이 초기값으로 무차원화한다. 앞서 언급하였듯이 무차원화한 기계적 특성값을 설계변수로 하여 다음과 같이 네 가지 경우를 고려해 보았다.

**CASE 1**  $[0]_{8T}$ 에 대한 고유진동수만 사용하여 성능지수를 구성한 후 변수식별

**CASE 2**  $[\pm 45]_{2S}$ 에 대한 고유진동수만 사용하여 성능지수를 구성한 후 변수식별

**CASE 3** CASE 1과 2의 결과를 교차 적용

**CASE 4**  $[0]_{8T}$ 와  $[\pm 45]_{2S}$ 의 고유진동수를 동시에 사용하여 성능지수를 구성한 후 변수식별

### CASE 1

이 경우 성능지수는  $[0]_{8T}$ 에 대한 1차부터 4차까지 모드의 고유치로 구성되었다. 10회의 반복계산 후 수렴된 결과를 Tables 2와 3에 정리했다. 얻어진 결과를 사용하면 보다 정확한 고유진동수의 예측이 가능하다는 것을 Table 3을 통해 확인할 수 있다. 실험값에 대한 고유진동수의 오차가 무시할 수 있을 만큼 작은 크기로 감소한 것을 볼 수 있다. 성능지수에 포함되지 않았던 5차 고유진동수에 대한 오차도 9.24%에서 -3.75%로 크게 감소하였다.

### CASE 2

$[45]_{2S}$ 에 대한 1차부터 4차까지 모드의 고유치를 사용하여 성능지수를 구성하였다. 10회의 반복계산을 통해 얻어진 결과는 Tables 4와 5에 나타난 바와 같다. 고유진동수에 대한 수치적 예측의 정

확도가 상당히 개선된 것을 볼 수 있다. 초기에 가장 큰 오차를 가졌던 4 차 모드에 대한 고유진동수의 오차는 5.52%에서 -1.96%로 크기가 감소되었다. 1 차부터 3 차 모드까지의 고유진동수는 오차가 거의 0 에 가까울 정도로 정확한 예측이 가능하다는 것을 확인하였다.

### CASE 3

일단 CASE 1 과 2 의 결과를 사용하여 보다 정확하게 고유진동수를 예측할 수 있다는 것을 확인하였다. 이번에는 앞서 구한 개선된 기계적 특성값의 일반적인 사용 가능성을 확인해 보았다. 이를 위해 CASE 1 과 2 의 결과로 얻어진 개선된 기계적 특성값을 서로 교차적용하여 보았다. 결과는 Tables 6 과 7 과 같다. Tables 3 과 5 에 비해 만족스럽지 못한 결과를 보인다. 이것은 CASE 1 과 2 에서 각 설계변수에 대한 고유치의 민감도 경향이 서로 다르기 때문이다.

### CASE 4

개선된 기계적 특성값의 일반적인 사용을 위해 다음과 같은 방법을 제안하였다. 앞서 제시된 CASE 에 대해 설계변수에 대한 고유치의 민감도 해석을 고려하여, 성능지수는  $[0]_{8T}$  에 대한 1, 2, 3 차 고유치와  $[\pm 45]_{2S}$  에 대한 1, 2, 5 차 고유치로 구성된다. 각 설계변수 사이의 고유치에 대한 coupling 효과를 최소화하기 위해 선택적으로 고유치를 사용하였다. 결과는 Tables 8, 9 와 10 에 나타내었다. Tables 9 와 10 의 결과를 살펴보면 CASE 1 과 2 의 결과에 비해 다소 정확도가 감소된 것을 볼 수 있다. 그러나 CASE 3 의 결과와 비교하면 선택된 모드에 대해서는 상당한 오차의 감소를 확인할 수 있었고, 전체적으로도 개선된 것을 알 수 있었다. 그러므로 복합재 구조물의 동적 거동을 보다 정확히 예측하기 위해서 CASE 4 의 개선된 특성값을 사용하는 것은 타당하다고 할 수 있다.

## 6. 결론

본 연구에서는 고유진동수의 실험값과 수치해석값의 차이를 최소화하기 위해 변수식별을 통해 복합재 구조물의 기계적 특성값을 개선하였다. 무차원화된 특성값이 설계변수로서 사용되었고, 최적화 방법으로는 conjugate gradient method 를 채택하였다.  $[0]_{8T}$  와  $[\pm 45]_{2S}$  에 대해 각 적층판에 대한 변수식별(CASE 1 과 2)을 수행하였다. 확장적인 개념으로서, 개선된 기계적 특성값의 범용적인 사용을 위해 앞선 두 결과의 교차적용(CASE 3)과 두 적층판에 대한 고유치를 함께 사용한 변수식별(CASE 4)을 수행하였다. 결과적으로 제안된 방법을 통해 보다 정확하게 복합재 적층판의 동적 거동을 예측할 수 있었다. 결과적으로 본 연구에서 수행된 방법은 번거로운 coupon test 를 해보지 않아도 복합재 단층의 기계적 특성을 평가할 수 있는 방법을 제시하였다.

## 7. 참고문헌

- [1] J. D. Collins, G. C. Hart, T. K. Hasselman, and B. Kennedy, "Statistical Identification of Structures", *AIAA Journal*, 12, pp. 185-190, 1974.
- [2] P. Swilder, B. Le Fichoux, and G. Jacquet-Richardet, "Dynamic modelling of a composite plate, a mixed numerical and experimental approach", *Composite Structures*, 34, pp. 301-308, 1996.
- [3] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, Chap. 4, John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [4] R. L. Fox, *Optimization Methods for Engineering Design*, pp. 90-96, Addison-Wesley, Reading, 1971.
- [5] M. I. Friswell, and J.E. Mottershead, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Chap. 2, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1995

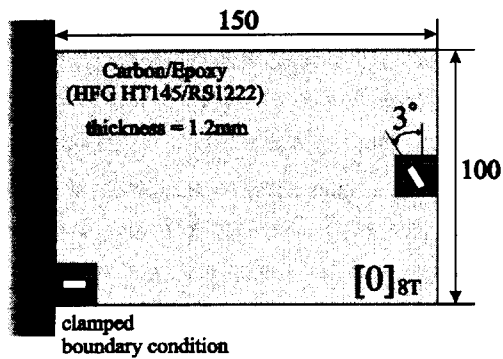


Fig. 1 The plane figure of Specimen made of  $[0]_{8T}$

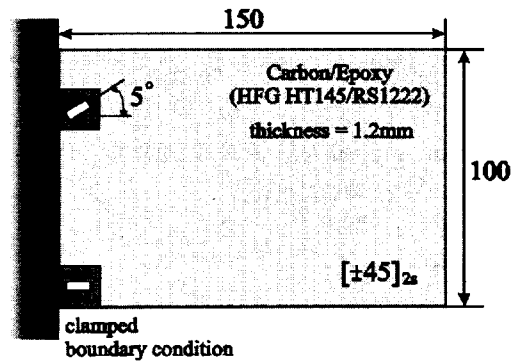


Fig. 2 The plane figure of Specimen made of  $[45]_{2s}$

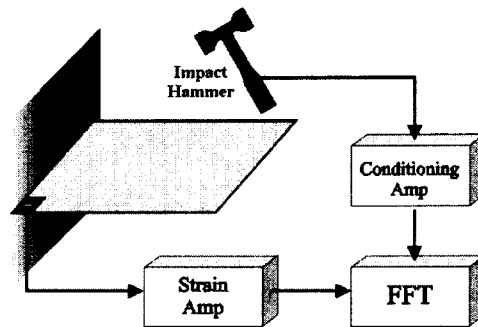


Fig. 3 Experimental Setup

Table 1 The baseline set of mechanical properties for Carbon/Epoxy

$E_1$	$E_2$	$\nu_{12}$	$G_{12}$	Density	Thickness
122.5 GPa	7.929 GPa	0.329	3.585 GPa	1500 kg/m <sup>3</sup>	0.150 mm

Table 2 Update of design parameters for  $[0]_{8T}$  (CASE 1)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
Baseline	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Updated	0.7135	1.1067	0.9973	1.0750

**Table 3 Update of frequencies and errors for  $[0]_{ST}$  using data from CASE 1**

Mode	$\omega_{EXP}$ (Hz)	$\omega_{BASE}$ (Hz)	Error(%)	$\omega_{UPDATE}$ (Hz)	Error(%)
1 <sup>st</sup>	66	78.03	18.23	66.00	0.01
2 <sup>nd</sup>	106	112.31	5.95	105.80	-0.19
3 <sup>rd</sup>	344	332.28	-3.41	343.35	-0.19
4 <sup>th</sup>	415	489.44	17.94	414.76	-0.06
5 <sup>th</sup>	487	532.01	9.24	468.76	-3.75

**Table 4 Update of design parameters for  $[\pm 45]_{2S}$  (CASE 2)**

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
Baseline	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Updated	0.8626	0.9178	0.8986	0.8523

**Table 5 Update of frequencies and errors for  $[\pm 45]_{2S}$  using data from CASE 2**

Mode	$\omega_{EXP}$ (Hz)	$\omega_{BASE}$ (Hz)	Error(%)	$\omega_{UPDATE}$ (Hz)	Error(%)
1 <sup>st</sup>	34	36.60	8.24	34.20	0.58
2 <sup>nd</sup>	182	196.56	8.00	183.05	0.58
3 <sup>rd</sup>	204	220.38	8.03	204.48	0.24
4 <sup>th</sup>	565	596.20	5.52	553.94	-1.96
5 <sup>th</sup>	581	606.80	4.44	564.78	-2.79

**Table 6 Update of frequencies and errors for  $[\pm 45]_{2S}$  using data from CASE 1**

Mode	$\omega_{EXP}$ (Hz)	$\omega_{BASE}$ (Hz)	Error(%)	$\omega_{UPDATE}$ (Hz)	Error(%)
1 <sup>st</sup>	34	36.60	8.24	33.99	-0.02
2 <sup>nd</sup>	182	196.56	8.00	170.82	-6.14
3 <sup>rd</sup>	204	220.38	8.03	205.22	0.60
4 <sup>th</sup>	565	596.20	5.52	529.83	-6.22
5 <sup>th</sup>	581	606.80	4.44	549.45	-5.43

**Table 7 Update of frequencies and errors for  $[0]_{8T}$  using data from CASE 2**

Mode	$\omega_{EXP}$ (Hz)	$\omega_{BASE}$ (Hz)	Error(%)	$\omega_{UPDATE}$ (Hz)	Error(%)
1 <sup>st</sup>	66	78.03	18.23	72.47	9.80
2 <sup>nd</sup>	106	112.31	5.95	104.02	-3.69
3 <sup>rd</sup>	344	332.28	-3.41	315.58	-8.26
4 <sup>th</sup>	415	489.44	17.94	454.51	7.70
5 <sup>th</sup>	487	532.01	9.24	495.42	1.52

**Table 8 Update of design parameters in CASE 4**

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
Baseline	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Updated	0.7667	1.1301	0.9824	1.0539

**Table 9 Update of frequencies and errors for  $[0]_{8T}$  in CASE 4**

Mode	$\omega_{EXP}$ (Hz)	$\omega_{BASE}$ (Hz)	Error(%)	$\omega_{UPDATE}$ (Hz)	Error(%)
1 <sup>st</sup>	66	78.03	18.23	68.41	3.66
2 <sup>nd</sup>	106	112.31	5.95	106.90	0.85
3 <sup>rd</sup>	344	332.28	-3.41	346.44	0.71
4 <sup>th</sup>	415	489.44	17.94	429.65	3.53
5 <sup>th</sup>	487	532.01	9.24	482.28	-0.97

**Table 10 Update of frequencies and errors for  $[\pm 45]_{2S}$  in CASE 4**

Mode	$\omega_{EXP}$ (Hz)	$\omega_{BASE}$ (Hz)	Error(%)	$\omega_{UPDATE}$ (Hz)	Error(%)
1 <sup>st</sup>	34	36.80	8.24	34.32	0.97
2 <sup>nd</sup>	182	196.56	8.00	175.17	-3.75
3 <sup>rd</sup>	204	220.38	8.03	205.57	0.76
4 <sup>th</sup>	565	596.20	5.52	541.47	-4.16
5 <sup>th</sup>	581	606.80	4.44	554.18	-4.62