

물과 접촉하는 동일한 두 원판의 동적 특성

°*정 경훈, *김 태완, *김 강수, **박 근배

Dynamic Characteristics of Two Identical Circular Plates in Contact with Water

°*Kyeong-Hoon Jeong, *Tae-Wan, Kim, *Kang-Soo Kim, **Keun-Bae Park

ABSTRACT

An analytical method for evaluating the free vibration of two circular plates coupled with water was developed by assuming the clamped boundary condition of the plates and an ideal fluid. The method was applied to analyze the transverse vibration modes, in-phase and out-of-phase, and the results were compared to those obtained by the finite element method (FEM) using a commercial ANSYS 5.2 software. It was found that the theoretical results can predict well the coupled natural frequencies for all in-phase modes with good accuracy. However, the analytical method shows some discrepancies compared with FEM analysis in predicting the coupled natural frequency of the out-of-phase modes, except when $m = 0$, the zero nodal circle. The analytical method also applied to evaluate the characteristics of the natural frequency with respect to the major parametric variation in mode numbers and distance between the circular plates.

1. 서론

유체 내부에 잠겨있거나 유체와 접촉하는 구조물의 동적특성은 공기중에서와 상당히 다르게 나타나고 있다고 알려져 있다. 특히 유체와 접촉하는 구조물의 경우, 공기중의 고유진동수보다 유체로 인한 부가질량의 증가로 접수구조물의 고유진동수는 상당히 감소하게 된다. 이러한 유체-구조물간의 상호 간섭문제는 많은 연구자들이 연구해 오고 있다. 최근에는 유체와 접촉하고 있는 원판, 사각판 및 무한판의 문제를 많이 다루고 있다. 무한 유체 위에 떠서 접촉하는 원판에 대해서는 Kwak [1, 2]이 연구하였고, 무한유체 위에 떠있는 환형판은 Amabili [3]가 연구하였다. Chiba [4]는 유체로 채워진 강체 원통형 바닥에 지지된 원판의 해석을 다루었다. 이 원판의 하부는 균일하게 탄성 지지된 것으로 간주하였다. Bauer [5]는 원통형 용기에 이상유체가 채워있고 상단에 원판 또는 원형막이 덮혀 있는 구조물에 대한 해석을 수행하였다.

De Santo [6]는 물속에 잠긴 다공판의 고유진동해석을 실험적으로 수행하였다. Montero de Espinosa [7]는 물에 잠긴 판의 저차모드의 진동문제를 근사해석 및 실험으로 다루었다. 그밖에 Hagedorn [8]과 Robinson [9]도 물위에 떠있는 사각평판과 무한평판의 진동해석을 수행하였다. 그러나 이러한 연구는 두 개의 평판이 서로 유체로 인하여 연성된 경우와는 다르다. 따라서 본 논문에서는 지금까지 수행된 적이 없는 두 평판 사이에 유체가 채워진 경우의 동적 특성에 대하여 이론적으로 전개시키고 고유진동수를 구한 다음 ANSYS 5.2라는 상용 코드를 이용하여 검증하고자 한다.

2. 이론적 해석

2.1 수식전개

Fig. 1은 유체로 연성된 두 개의 동일한 원판을 보여주고 있다. 여기서 R 과 h 는 두 원판의 반경과 두께를 각각 나타낸다. 이론적인 해석을 위하여 다음과 같은 가정을 설정하였다. (a) 유체의 운동이 매우 작아서 선형으로 취급할 수 있다. (b) 유체는 비압축성, 비점성 그리고 비회전성의 이상유체다. (c) 원판의 동적거동은 선형탄성 범위 내에 있다.

* 한국원자력연구소, 기계설계기술개발, 선임연구원, 정희원

**한국원자력연구소, 기계설계기술개발, 선임연구원

**한국원자력연구소, 기계설계기술개발, 책임연구원

(d) 공기중의 원판 모드형상과 물과 접하는 원판의 모드형상이 동일하다.

유체와 접하는 원판의 상하방향 변위 w_j 에 대한 운동방정식은 다음 식으로 나타난다.

$$\nabla^4 w_j + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} = \frac{p_j}{D} \quad j=1, 2 \quad (1)$$

여기서 $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ 는 원판의 강성도이며, ρ , μ , p_j 및 E 는 판의 밀도, Poisson 비, 판에 작용하는 유체압력, 그리고 탄성계수를 각각 나타낸다. 수식에서 첨자 1은 상부 원판을 나타내고 2는 하부 원판을 나타낸다. 또한 (2)식은 극좌표 (r, θ) 로 나타낸 Laplace 연산자이다.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2)$$

공기중에서 판의 변위는 다음과 같이 급수전개로 나타낼 수 있다.

$$w_j(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W_{mnj}(r) \cos(n\theta) \exp(i\omega t) \quad (3)$$

여기서,

$$W_{mnj}(r) = A_{mnj} J_n(\lambda_{mn} r) + B_{mnj} I_n(\lambda_{mn} r) \quad (4)$$

ω 와 λ_{mn} 은 원판의 공기중의 고유진동수와 주파수 파라미터를 나타낸다. J_n 와 I_n 는 각각 제 1종 Bessel 함수와 수정 Bessel 함수이다. 첨자 m 은 반경방향 모드수를 나타내고 첨자 n 은 원주방향 모드수를 나타낸다. 원판의 경계조건이 고정단을 갖는 경우, $r = R$ 에서, 변위와 기울기가 영이 되어야 하므로 다음 두 식을 만족해야 한다.

$$A_{mnj} J_n(\lambda_{mn} R) + B_{mnj} I_n(\lambda_{mn} R) = 0 \quad (5)$$

$$A_{mnj} J_n'(\lambda_{mn} R) + B_{mnj} I_n'(\lambda_{mn} R) = 0 \quad (6)$$

2.2 속도 포텐셜 (Velocity Potential)

다음은 두 개의 원판과 강제용기로 둘러싸인 이상유체에 대하여 생각하자. 유체의 운동은 다음과 같은 속도포텐셜의 Laplace 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 \Phi(x, r, \theta, t) = 0 \quad (7)$$

(7)식은 변수분리를 이용하면 (8)식으로 나타낼 수가 있다.

$$\Phi(x, r, \theta, t) = i\omega \phi(r, \theta, x) \exp(i\omega t) \quad (8)$$

$$= i\omega \phi(r, \theta) f(x) \exp(i\omega t)$$

따라서 (7)식의 일반해는 (9)식이 된다.

$$\phi(r, \theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left[J_n(\alpha_{sn} r) \left\{ \begin{array}{l} E_{sn} \sinh(\alpha_{sn} x) \\ + F_{sn} \cosh(\alpha_{sn} x) \end{array} \right\} \right] \cos(n\theta) \quad (9)$$

그런데 강제용기 벽에서 반경방향의 유속은 영이 되어야하므로 (10)식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=R} = 0 \quad (10)$$

(10)식에 (9)식을 대입하면 모든 α_{sn} 을 구할 수 있는 (11)식을 얻는다.

$$J_n'(\alpha_{sn} R) = 0 \quad (11)$$

유동속도의 대칭성을 고려하면 동위상 모드 (in-phase mode) 및 역위상 모드 (out-of-phase modes)에 대한 속도포텐셜은 다음 식을 만족해야 한다:

$$\frac{\partial \phi(r, \theta, -x)}{\partial x} = \frac{\partial \phi(r, \theta, x)}{\partial x} \quad (\text{동위상 모드의 경우}) \quad (12)$$

$$x = 0 \text{ 에서 } \frac{\partial \phi(r, \theta, x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{역위상 모드의 경우}) \quad (13)$$

(12)식과 (13)식을 적용하면 (9)식은 각각의 모드에 대하여 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

동위상 모드의 경우,

$$\phi(r, \theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} E_{sn} J_n(\alpha_{sn} r) \sinh(\alpha_{sn} x) \cos(n\theta) \quad (14)$$

역위상 모드의 경우,

$$\phi(r, \theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} F_{sn} J_n(\alpha_{sn} r) \cosh(\alpha_{sn} x) \cos(n\theta) \quad (15)$$

2.3 해석 방법

두 원판과 유체가 접하는 접수면에서의 연직방향의 유속은 동일해야 하므로 유체 운동에 대한 계수 E_{sn} 과 F_{sn} 을 원판의 운동을 나타내는 계수로 나타낼 수 있다.

$$x = d/2 \text{ 일 때, } w_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (16)$$

$$x = -d/2 \text{ 일 때, } w_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (17)$$

(4)식 및 (14)식과 (15)식을 (16)식과 (17)식에 대입하면 동위상 모드의 경우는 (18)식이 되고,

$$A_{mnl} \left[J_n(\lambda_{mn} r) - \frac{J_n(\lambda_{mn} R)}{I_n(\lambda_{mn} R)} I_n(\lambda_{mn} r) \right] = -\sum_{s=1}^{\infty} E_{sn} \alpha_{sn} J_n(\alpha_{sn} r) \cosh\left(\frac{\alpha_{sn} d}{2}\right) \quad (18)$$

역위상 모드의 경우는 (19)식이 된다.

$$A_{mnl} \left[J_n(\lambda_{mn} r) - \frac{J_n(\lambda_{mn} R)}{I_n(\lambda_{mn} R)} I_n(\lambda_{mn} r) \right] = -\sum_{s=1}^{\infty} F_{sn} \alpha_{sn} J_n(\alpha_{sn} r) \sinh\left(\frac{\alpha_{sn} d}{2}\right) \quad (19)$$

그런데 Bessel-Fourier 급수전개로 (18)식과 (19)식의 Bessel 함수 $J_n(\lambda_{mn} r)$ 과 $I_n(\lambda_{mn} r)$ 을 전개하면 (20)식을 얻는다[5, 10].

$$J_n(\lambda_{mn} r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{mns} J_n(\alpha_{sn} r),$$

$$I_n(\lambda_{mn} r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{mns} J_n(\alpha_{sn} r) \quad (20)$$

여기서,

$$a_{mns} = \frac{2(\lambda_{mn} R)(\alpha_{sn} R)^2 J_n'(\lambda_{mn} R)}{\{(\alpha_{sn} R)^2 - (\lambda_{mn} R)^2\} \{(\alpha_{sn} R)^2 - n^2\} J_n(\alpha_{sn} R)},$$

$$b_{mns} = \frac{2(\lambda_{mn} R)(\alpha_{sn} R)^2 I_n'(\lambda_{mn} R)}{\{(\alpha_{sn} R)^2 + (\lambda_{mn} R)^2\} \{(\alpha_{sn} R)^2 - n^2\} J_n(\alpha_{sn} R)} \quad (21)$$

따라서 계수 E_{sn} 과 F_{sn} 은 계수 A_{mnl} 의 함수로 나타난다.

$$E_{sn} = \Gamma_{mns} A_{mnl}, F_{sn} = \Lambda_{mns} A_{mnl}, \quad (22)$$

여기서 α_{sn} 은 (11)식의 해이고,

$$\Gamma_{mns} = \frac{a_{mns} - \frac{J_n(\lambda_{mn} R)}{I_n(\lambda_{mn} R)} b_{mns}}{\alpha_{sn} \cosh\left(\frac{\alpha_{sn} d}{2}\right)},$$

$$\Lambda_{mns} = \frac{a_{mns} - \frac{J_n(\lambda_{mn} R)}{I_n(\lambda_{mn} R)} b_{mns}}{\alpha_{sn} \sinh\left(\frac{\alpha_{sn} d}{2}\right)}. \quad (23)$$

계의 연성된 고유진동수를 계산하기 위하여 원판 및 유체의 운동에너지를 계산해야 한다. 먼저 유체의 운동에너지를 계산하면 (24)식이 된다[3].

$$T_F = -\frac{1}{2} \rho_o \kappa_{\theta} \left[\int_0^R W_{mn1} \phi\left(r, \frac{d}{2}\right) r dr + \int_0^R W_{mn2} \phi\left(r, -\frac{d}{2}\right) r dr \right] \quad (24)$$

여기서

$$\kappa_{\theta} = 2\pi \quad (n=0 \text{ 일 때}),$$

$$\kappa_{\theta} = \pi \quad (n>0 \text{ 일 때}). \quad (25)$$

상하 원판의 모드형상이 대칭이거나 동일하기 때문에 원판의 운동에너지는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_d = \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^R W_{mnl}^2 \cos^2(n\theta) r dr d\theta$$

$$= \rho h \kappa_{\theta} \int_0^R W_{mnl}^2 r dr \quad (26)$$

따라서 속도포텐셜로 나타나는 유체의 운동에너지와 변위로 나타나는 원판의 운동에너지를 이용하여 (27)식으로 유체와 원판이 연성된 계의 고유진동수를 구할 수 있다[1, 2, 3, 11].

$$\omega_f = \frac{\omega_o}{\sqrt{1 + T_F / T_d}} \quad (27)$$

여기서 ω_o 은 공기중에서 원판의 고유진동수를 나

타내고 ω_f 은 접수원판의 고유진동수를 각각 나타낸다.

3. 계산에 및 고찰

3.1 수치해석 모델 및 결과

(27)식에 따라서 고정된 두 개의 원판이 이상 유체로 연성된 경우, 고유진동수를 수치해석적인 방법으로 구할 수가 있다. 이 이론적인 방법의 타당성을 확인하기 위하여 상용 유한요소해석 코드인 ANSYS 5.2 를 이용하여 축대칭 2 차원 유한요소해석모델을 만들어 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 상하 원판은 알루미늄 재질로 되어 있다고 가정하였다. 이 동일한 두 원판의 반경은 120 mm 이고 두께는 2 mm 이며, 물성치는 다음과 같다: 탄성계수 = 69.0 GPa, Poisson 비 = 0.3, 밀도 = 2700 kg/m³. 원판 사이에 채워지는 유체는 물로서 밀도가 1000 kg/m³ 이다. 두 원판이 강체용기와 만나는 경계조건은 고정단으로 가정하였다. 이론해석 계산에서 Bessel-Fourier 급수전개항 s 는 190 값을 취하여 해가 충분히 수렴하도록 하였다.

유한요소 해석에서 Fig. 3 - 6 과 같은 해석모델은 2 차원 축대칭 유체요소(FLUID81)와 2 차원 축대칭 쉘요소(SHELL61)로 구성되었다. $r = 0$ 에서의 유체요소 절점은 반경방향으로만 구속하였고, 강체용기 벽에서도 반경방향의 유속만을 구속하였다. 그리고 원판과 접촉하는 유체의 절점이 원판의 절점과 연직방향으로만 같이 움직일 수 있도록 연성시켰다. 이것은 (16)식과 (17)식을 모사하게 된다. 판사이의 거리 $d = 40$ mm 인 경우, 유한요소모델은 Fig. 3 과 4 에서 보는 바와 같이 192 (8 X 24)개의 유체요소와 48 (2 X 24) 개의 쉘요소로 이루어져 있다. 반면에, 판사이의 거리, $d = 20$ mm 인 경우는, Fig. 5 와 6 에서 보는 바와 같이 96 (4 X 24)개의 유체요소와 48 (2 X 24) 개의 쉘요소로 이루어져 있다.

3.2 이론의 타당성 검증

Tables 1 ~ 4 까지는 유한요소해석의 결과 및 이론 해석 결과를 보여주고 있다. 이 해석들 간의 오차는 다음 식으로 정하였다.

$$\text{Discr.(\%)} = \frac{\text{Theoretical freq.} - \text{FEM freq.}}{\text{FEM freq.}} \times 100 \quad (28)$$

$d = 40$ mm 인 경우 최대 오차는 동위상 모드에서 $n = 0$ 이고 $m = 1$ 일 때 8.91% 이었으며, 역위상 모드에서 $n = 0$ 이고 $m = 1$ 일 때 40.51%였다. $d = 20$ mm 인 경우 최대 오차는 동위상 모드에서 $n = 0$ 이고 $m = 1$ 일 때 6.27%였으며, 역위상 모드에서 $n = 0$ 이고 $m = 1$ 일 때 45.13%였다. 동위상 모드의 경우

일반적으로 오차가 2% 이내에 있었으며 n 과 m 이 증가할수록 Table 1 과 2 에서 보는 바와 같이 감소하는 경향을 갖게 된다. 동위상 모드의 경우는 이론치 고유진동수와 유한요소 해석결과가 잘 일치하나, 반면에 역위상 모드의 경우는 이론치 고유진동수와 유한요소 해석결과가 $m = 0$ 인 경우를 제외하고는 잘 일치하지 않는다. 그 이유를 다음과 같이 설명할 수 있다. Fig. 2 와 3 에서 보는 바와 같이 공기중의 모드형상과 유체와 연성된 동위상 모드형상이 거의 일치하고 있다. Fig. 2 에서 보면 공기중의 원판 경우 첫번째 절점원의 반경이 약 $0.375R$ 인 곳에서 발생한다. 유체와 접하는 원판의 경우에는 $d = 40$ mm 일 때 해당되는 절점원의 반경도 약 $0.382R$ 에서 생기고 $d = 20$ mm 일 때는 약 $0.380R$ 에서 발생한다. 따라서 공기중의 판의 모드형상과 동위상 모드형상이 거의 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 또한 역위상 모드에서 절점원이 없는 $m = 0$ 인 경우도 절점원이 존재하지 않기 때문에 공기중의 모드와 모드 형상이 거의가 동일하다. 그러나 그 밖의 역위상 모드의 경우는 그렇지 못하다. Figs. 4 와 6 에서 보는 바와 같이 $n = 0$ 이고 $m = 1$ 에 대하여 $d = 40$ mm 일 때 역위상의 경우 절점원이 $0.482R$ 에서 생기며 $d = 20$ mm 인 경우 $0.524R$ 에서 생기게 된다. 따라서 역위상 모드의 경우는 유체와 접하는 원판의 모드 형상이 공기중의 모드형상과 같다는 2.1 절의 (d)번의 가정은 더 이상 사실이 아님을 알 수 있다. 모드 형상의 차이로 인하여 고유진동수 상에서 최대 45.13%의 오차가 발생하고 있음을 알 수 있다. 공기중의 모드형상에는 유체의 체적보존에 대한 요건이 적용되지 않지만 유체와 접하는 경우, 유체의 체적이 유지되어야 하는 또 하나의 요건이 필요하게 된다. 공기중의 모드를 유체와 접하는 본 연구의 경우에 사용하면 역위상 모드형상이 원판 진동시 감혀있는 유체의 체적을 일정하게 유지해 줄 수가 없게 된다. 그러나 이러한 경향도 반경방향 모드수가 증가할수록 체적변화의 차이가 점차 감소되는 경향을 갖게 된다. 따라서 역위상 모드의 경우 절점원의 수가 증가하면 할수록 오차는 줄어들게 된다. 원판에 미치는 유체의 영향을 정량화하기 위하여 유체와 접하는 원판의 고유진동수를 이 모드와 동일한 공기중의 고유진동수로 나누어 무차원 정규화된 고유진동수(non-dimensional normalized natural frequencies)를 정의하였다. 이 무차원 고유진동수는 유체의 부가 질량(added mass)의 영향으로 1 과 0 사이의 값을 갖는다. 일반적으로 모드수가 증가하면 유체와 접하는 구조물에서 무차원 고유진동수는 증가하게 된다. 이 효과를 분리효과(separation effect)라 하는데 셀의 경우에 대하여 참고문헌 [12]에서 Jeong 이 설명하고 있다. 판의 경우도 이 현상은 동일하게 나타나고 있음을 Table 1 - 4 에서 확인할 수가 있다.

또한 구조물과의 간격이 작을수록 유체의 연성효과가 커지고 있음을 알 수 있는데 이는 이미 다수의 봉들에 대하여 이미 밝혀져 있다[13]. 그리고 Table 1 - 4 에서 확인할 수 있듯이 항상 동위상 모드의 고유진동수가 대응되는 역위상 모드의 고유진동수보다 항상 크게 나타난다. 이 현상은 모드수가 낮을수록 구조물간의 간격이 작을수록 이들 연성된 고유진동수 사이의 차이가 커지고 있음을 확인할 수 있다.

4. 결론

물로 연성된 두 개의 동일한 원판에 대한 고유진동수를 구하는 해석방법을 제시하였다. 그리고 유체와 연성된 이 구조물의 동적 특성을 고찰하였다. 이 방법을 타당성을 검증하기 위하여 원판의 경계조건이 고정된 경우에 대하여 고유진동수를 이론적으로 구하고 상용 컴퓨터 코드로 검증하였다. 그 결과, 모든 고유진동 모드는 동위상 모드와 역위상 모드로 나뉘어 나타났다. 모든 동위상 모드와 반경방향의 절점이 없는 축대칭 역위상 모드의 경우는 이론값의 고유진동수와 유한요소 해석결과로 얻은 고유진동수가 잘 일치하였으나, 반경방향의 절점이 1 개 이상 있는 경우에는 상당한 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 이는 물의 체적보존에 대한 요건의 무시하여 나온 결과로 차후에 이 요건을 고려하면 이론값의 고유진동수와 유한요소 해석결과가 잘 일치하리라 판단된다. 또한 모드수가 증가할수록 분리효과로 무차원 고유진동수가 증가하고 있음을 확인하였고, 원판사이의 간격이 작을수록 유체의 연성효과가 커짐을 확인할 수 있었다.

참고 문헌

1. Kwak, M. K., 1991, "Vibration of circular plates in contact with water," *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 480-483.
2. Kwak, M. K. and Kim, K. C. 1991, "Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146, pp. 381-389.
3. Amabili, M. G., Frosali and Kwak, M. K., 1996, "Free vibrations of annular plates coupled with fluids," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 91, pp. 825-846.
4. Chiba, M., 1994, "Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, pp. 387-394.
5. Bauer, H. F., 1995, "Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.

180, pp. 689-694.

6. De Santo, D. F., 1981, "Added mass and hydrodynamic damping of perforated plates vibrating in water," *Transaction of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. **103**, pp. 175-182.
7. Montero de Espinosa, F. and Gallego-Juarez, J. A., 1984, "On the resonance frequencies of water-loaded circular plate," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **94**, pp. 217 - 222.
8. Hagedorn, P., 1994, "A note on the vibrations of infinite elastic plates in contact with water," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **175**, pp. 233-240.
9. Robinson, N. J. and Palmer, S. C., 1990, "A modal analysis of a rectangular plate floating on an incompressible liquid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **142**, pp. 453-460.
10. Sneddon, Ian N., 1951, *Fourier Transforms*, New York; McGraw - Hill; p. 82.
11. Zhu, F., 1995, "Rayleigh quotients for coupled free vibrations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **171**, pp. 641-649.
12. Jeong, K. H. and Lee, S. C., 1998, "Hydroelastic vibration of a liquid-filled circular cylindrical shell," *Computer and Structures*, Vol. **66**, pp. 173-185.
13. Chung, H., and Chen, S. S., 1977, "Vibration of a group of circular cylinders in a confined fluid", *Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics*, pp. 213-217.

Table 2. In-phase mode coupled natural frequencies of circular plates coupled with water for $d = 20$ mm

n	method	coupled natural frequency (Hz)			
		m = 0	m = 1	m = 2	m = 3
0	FEM	205.4	813.7	1873.7	3441.2
	Theory	205.6	864.7	1927.5	3484.3
	Discr.	0.10	6.27	2.87	1.25
	ω_f/ω_o	0.595	0.605	0.622	0.644
1	FEM	430.6	1261.1	2569.2	4415.9
	Theory	430.8	1260.2	2642.9	4463.1
	Discr.	0.05	-0.07	2.87	1.07
	ω_f/ω_o	0.599	0.614	0.634	0.657
2	FEM	711.9	1774.9	3339.5	5468.7
	Theory	712.5	1773.8	3323.0	5524.5
	Discr.	0.08	-0.06	-0.49	1.02
	ω_f/ω_o	0.604	0.621	0.643	0.668
3	FEM	1050.7	2359.0	4191.3	6611.9
	Theory	1052.2	2357.4	4166.6	6670.9
	Discr.	0.14	-0.07	-0.59	0.89
	ω_f/ω_o	0.609	0.629	0.653	0.678
4	FEM	1448.3	3015.1	5126.1	7846.3
	Theory	1451.1	3012.4	5090.1	7902.8
	Discr.	0.19	-0.09	-0.70	0.72
	ω_f/ω_o	0.615	0.637	0.662	0.687

Table 1. In-phase mode natural frequencies of circular plates coupled with water for $d = 40$ mm

n	method	coupled natural frequency (Hz)			
		m = 0	m = 1	m = 2	m = 3
0	FEM	162.7	676.9	1645.0	3157.0
	Theory	162.8	737.2	1712.0	3203.4
	Discr.	0.06	8.91	4.07	1.47
	ω_f/ω_o	0.471	0.503	0.546	0.591
1	FEM	348.3	1077.5	2308.4	4120.1
	Theory	348.3	1073.6	2405.1	4177.0
	Discr.	0.00	-0.36	4.19	1.38
	ω_f/ω_o	0.485	0.524	0.569	0.613
2	FEM	589.0	1553.6	3059.0	5171.3
	Theory	589.1	1545.8	3012.7	5239.0
	Discr.	0.02	-0.50	-1.51	1.31
	ω_f/ω_o	0.500	0.544	0.589	0.632
3	FEM	889.5	2109.7	3901.5	6319.9
	Theory	889.6	2096.1	3832.9	6390.4
	Discr.	0.01	-0.64	-1.76	1.12
	ω_f/ω_o	0.516	0.563	0.608	0.648
4	FEM	1253.4	2747.5	4836.0	7565.5
	Theory	1253.3	2726.0	4740.2	7629.9
	Discr.	-0.01	-0.78	-1.98	0.85
	ω_f/ω_o	0.532	0.581	0.625	0.663

Table 3. Out-of-phase coupled natural frequencies of circular plates coupled with water for $d = 40$ mm

n	method	coupled natural frequency (Hz)			
		m = 0	m = 1	m = 2	m = 3
0	FEM	N/A	399.7	1339.3	2869.4
	Theory	N/A	561.6	1459.7	2761.9
	Discr.	N/A	40.51	8.99	-3.75
	ω_f/ω_o	N/A	0.297	0.445	0.537
1	FEM	147.3	786.7	2018.9	3850.9
	Theory	146.9	550.4	2225.8	3924.2
	Discr.	-0.27	-30.04	10.25	1.90
	ω_f/ω_o	0.205	0.383	0.498	0.573
2	FEM	365.8	1282.5	2802.4	4929.1
	Theory	364.8	1119.5	1842.1	5066.1
	Discr.	-0.27	-12.71	-34.27	2.78
	ω_f/ω_o	0.310	0.449	0.540	0.602
3	FEM	667.0	1872.5	3683.5	6108.8
	Theory	664.0	1744.3	3068.6	6263.6
	Discr.	-0.45	-6.85	-16.69	2.53
	ω_f/ω_o	0.387	0.499	0.573	0.627
4	FEM	1046.2	2548.0	4656.0	7385.7
	Theory	1040.0	2435.4	4172.9	7533.1
	Discr.	-0.59	-4.42	-10.38	2.00
	ω_f/ω_o	0.444	0.539	0.601	0.647

Table 4. Out-of-phase coupled natural frequencies of circular plates coupled with water for $d = 20$ mm

n	method	coupled natural frequency (Hz)			
		$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
0	FEM	N/A	308.0	1132.9	2602.6
	Theory	N/A	447.0	1222.1	2358.2
	Discr.	N/A	45.13	7.87	-9.39
	ω_f/ω_o	N/A	0.229	0.376	0.487
1	FEM	107.3	633.7	1770.7	3576.4
	Theory	107.0	409.2	1959.2	3542.8
	Discr.	-0.28	-35.43	10.65	-0.94
	ω_f/ω_o	0.149	0.308	0.437	0.532
2	FEM	277.4	1073.8	2526.0	4654.9
	Theory	276.7	884.6	1415.9	4705.7
	Discr.	-0.25	-17.62	-43.95	1.09
	ω_f/ω_o	0.235	0.376	0.486	0.569
3	FEM	527.4	1620.9	3391.3	5839.7
	Theory	524.7	1447.3	2541.7	6670.9
	Discr.	-0.51	-10.71	-25.05	14.23
	ω_f/ω_o	0.306	0.432	0.528	0.599
4	FEM	859.9	2268.6	4359.7	7126.3
	Theory	853.0	2098.9	3621.2	7210.9
	Discr.	-0.80	-7.48	-16.94	1.19
	ω_f/ω_o	0.365	0.480	0.563	0.624

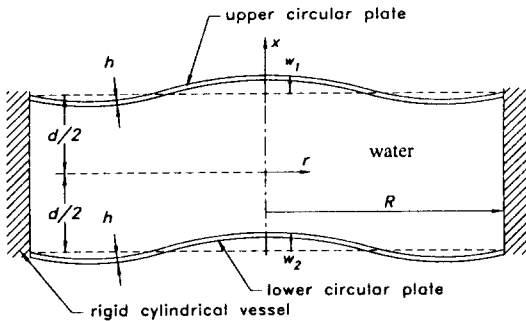


Fig. 1. Two circular plates coupled with water in a rigid cylindrical vessel.



Fig. 2. Mode shape of a circular plate for nodal circle $m = 1$ and nodal diameter $n = 0$.

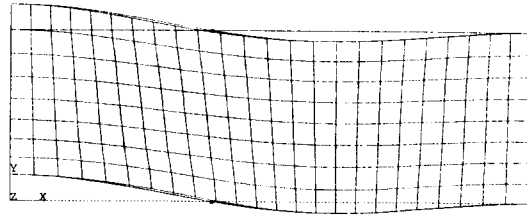


Fig. 3. In-phase mode shape of two circular plate coupled with fluid for nodal circle $m = 1$, nodal diameter $n = 0$, and $d = 40$ mm.

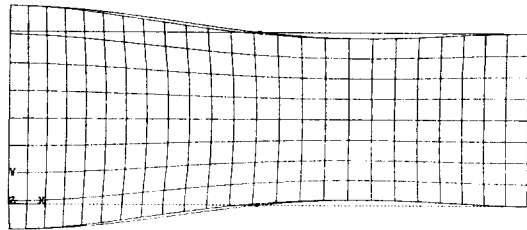


Fig. 4. Out-of-phase mode shape of two circular plate coupled with fluid for nodal circle $m = 1$, nodal diameter $n = 0$, and $d = 40$ mm.

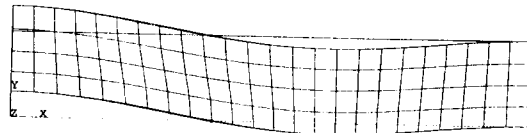


Fig. 5. In-phase mode shape of two circular plate coupled with fluid for nodal circle $m = 1$, nodal diameter $n = 0$ and $d = 20$ mm.

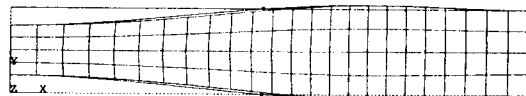


Fig. 6. Out-of-phase mode shape of two circular plate coupled with fluid for nodal circle $m = 1$, nodal diameter $n = 0$ and $d = 20$ mm.