

다양한 경계조건을 갖는 링보강 복합재료 원통셀의 진동특성해석

이 영 신*, °김 영 완**, 최 명 환***, 류 충 현***, 신 도 섭***

Vibration Characteristics of Ring-Stiffened Composite Cylindrical Shells with Various Edge Boundary Conditions

Young-Shin Lee*, °Young-Wann Kim**, Myoung-Hwan Choi***,
Chung-Hyun Ryu*** and Do-Seob Shin***

ABSTRACT

The effects of boundary conditions on natural frequencies for the ring stiffened composite cylindrical shells are investigated by theoretical method. The Love's thin shell theory and the discrete stiffener theory with beam functions in the Ritz procedure are used to derive the frequency equation. Five different boundary conditions such as clamped-clamped, simply supported-simply supported, free-free, clamped-free, clamped-simply supported are considered in this study. Also, the experimental investigation is presented to validate the theoretical results.

1. 서 론

링보강 원통셀은 항공기, 우주선, 잠수함, 미사일 및 원자로 등에 널리 이용되고 있는 구조 요소로써 이들 구조물은 다양한 형태의 동적 하중을 받을 수 있으며, 구조물들이 동적 하중을 받으면 진동, 파괴 또는 좌굴 등이 발생할 수 있다. 따라서 이런 구조물의 진동특성을 규명함으로써 동적 하중으로 인해 발생할 수 있는 공진 등과 같은 구조물의 동적 거동을 예측하여 보다 좋은 구조설계에 이용될 수 있다. 한편 섬유강화 복합재료는 금속재료에 비해 큰 강성 대 중량 비, 큰 강도 대 중량 비등의 뛰어난 기계적 성질 때문에 최근 경량화가 요구되는 항공기 및 우주비행 구조물에 많이 이용되고 있는 실정이다. 복합재료의 이러한 기계적 특성을 이용하여 구조물의 두께를 보다 얇게 할 수 있다는 커다란 이점이 있으나, 이러한 얇은 구조물이 동적 하중을 받으면서 나타날 수 있는

여러 가지 문제점을 예측할 수 있어야 한다.

등방성 재료로 만들어진 링보강 원통셀에 대한 연구는 비교적 많이 수행되었다^[1~4]. 그러나 보강 복합재료 구조물에 대한 연구는 이론적 해법보다는 유한요소법 등을 이용한 연구^[5]가 많은 실정이며, 복합재료 원통셀에 대한 이론적 해석은 단지 Bert 와 Kim^[6]의 연구에서 찾아 볼 수 있다. 이들의 연구는 단순지지 경계조건만을 고려하였으며, 보강재의 비틀림 강성은 무시하여 해석을 하였다.

앞에서 제시된 것처럼 본 연구에서 고려하고자 하는 링보강 복합재료 원통셀에 대한 연구는 매우 미미한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 여러 가지 경계조건을 갖는 링으로 보강된 복합재료 원통셀에 대해 Love의 셸이론과 보강재의 비틀림 강성은 고려한 이산보강이론을 적용하여 지배방정식을 유도하고 에너지법과 Rayleigh-Ritz법을 적용하여 진동수방정식을 이론적으로 유도하여 보강재 및 여러 가지 경계조건에 따른 진동특성을 분석하였다. 또한 해의 검증을 위해 실험을 통하여 얻은 결과를 비교하였다.

* 정회원, 충남대학교 기계설계공학과 교수

** 여수대학교 기계공학과 전임강사

*** 충남대학교 기계설계공학과 대학원

2. 수식화

본 연구에서 고려된 링 보강 원통셀에 대한 형상을 Fig. 1 에 제시하였다. 여기서 R , L 과 h 는 각각 셀의 반경, 길이 및 두께이며, b 와 d 는 보강재의 폭과 높이를 나타낸다.

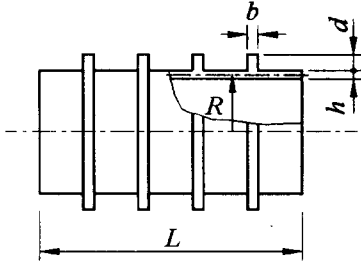


Fig. 1 The ring stiffened cylindrical shell

고려된 복합재료 원통셀에 대한 변형에너지는 복합재료에 대한 강성계수 A , D 를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L [A_{11}\epsilon_x^2 + 2A_{12}\epsilon_x\epsilon_\phi + A_{22}\epsilon_\phi^2 + A_{66}\epsilon_{x\phi}^2 + D_{11}\kappa_x^2 + 2D_{12}\kappa_x\kappa_\phi + D_{22}\kappa_\phi^2 + D_{66}\kappa_{x\phi}^2] R dx d\phi \quad (1)$$

Love의 셸이론으로 부터 각 방향에 대한 변형률 ϵ_i 및 곡률 κ_i 은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} & \epsilon_\phi &= \frac{1}{R}(v_{,\phi} + w) \\ \epsilon_{x\phi} &= \frac{u_{,\phi}}{R} + v_{,x} & \kappa_x &= -w_{,xx} \\ \kappa_\phi &= -\frac{1}{R^2}(w_{,\phi\phi} - v_{,\phi}) & \kappa_{x\phi} &= -\frac{1}{R}(2w_{,x\phi} - v_{,x}) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 변위 성분 u 는 축방향, v 는 원주방향, w 는 수직방향에 대한 변위 성분이며, (,)는 공간에 대한 미분을 나타낸다.

셸의 중앙면에서 z 만큼 떨어진 보강재에 대한 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$u_r = u - zw_{,x} \quad v_r = v = \frac{z}{R} w_{,\phi} \quad w_r = w \quad (3)$$

한편 N_r 개의 링으로 보강될 경우 링에 대한 변

형에너지는 이산 보강이론에 의거 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_r = \sum_{i=1}^{N_r} \left\{ \frac{E_r}{2} \int_0^{2\pi} \int_{A_i} \epsilon_{r\phi}^2 R dA_i d\phi + \frac{GI}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(w_{r,\phi})^2}{R} d\phi \right\} \quad (4a)$$

$$\epsilon_{r\phi} = \frac{1}{R}(v_{r,\phi} + w_r) \quad (4b)$$

여기서 $\epsilon_{r\phi}$ 는 링의 원주방향 변형률이며, GI 는 비틀림강성이다.

보강되지 않은 원통셀에 대한 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \rho_k h_k \int_0^{2\pi} \int_0^L [u^2 + v^2 + w^2] R dx d\phi \quad (5)$$

여기서 (·) 는 시간에 대한 미분을 나타내며, ρ_k 와 h_k 는 각각 (k)번째층에 대한 밀도 및 두께이다.

링에 대한 운동에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i \int_0^{2\pi} \int_{A_i} [v_r^2 + w_r^2] R dA_i d\phi \quad (6)$$

고려된 셸의 양단 경계조건을 만족하는 축방향 모드에 대해 빔모드함수가 이용되었으며, C-C, C-S, C-F경계조건에 대해서는 식(7a)가, F-F경계조건에 대해서는 식(7b)가 이용되며, 단순지지조건에 대해서는 $\sin(m\pi x/L)$ 이 이용된다.

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \cosh \frac{\lambda_m}{L} x - \cos \frac{\lambda_m}{L} x \\ &- \sigma_m \left(\sinh \frac{\lambda_m}{L} x - \sin \frac{\lambda_m}{L} x \right) \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \cosh \frac{\lambda_m}{L} x + \cos \frac{\lambda_m}{L} x \\ &- \sigma_m \left(\sinh \frac{\lambda_m}{L} x + \sin \frac{\lambda_m}{L} x \right) \end{aligned} \quad (7b)$$

여기서 계수 σ_m 는 경계조건으로 부터 결정될 계수이며, λ_m 는 축방향 진동모드에 관계된 계수로 정수일 필요는 없다. 복합재료 원통셀에 대해 여러 가지 경계조건을 포함시킬 수 있는 변위식은 다음과 같이 일반적인 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
u(x,\phi,t) &= \sum_{m=1}^M U_{mn}(L/\lambda_m)\Psi'(x)\cos n\phi\cos\omega_{mn}t \\
v(x,\phi,t) &= \sum_{m=1}^M V_{mn}\Psi(x)\sin n\phi\cos\omega_{mn}t \\
w(x,\phi,t) &= \sum_{m=1}^M W_{mn}\Psi(x)\cos n\phi\cos\omega_{mn}t
\end{aligned} \tag{8}$$

여기서 U_{mn} , V_{mn} 과 W_{mn} 은 각 방향으로의 진폭을 나타내며, m 은 길이방향 반파수, n 은 원주방향 반파수, 그리고 ω_{mn} 은 각 진동모드(m,n)에서의 각진동수를 표시한다.

본 연구에서 고려된 경계조건은 C-C, S-S, F-F, C-S, C-F의 5가지이다. 고정 경계조건은 횡방향변위 및 회전율, 단순지지 경계조건은 횡방향 변위와 굽힘모멘트를, 자유 경계조건은 굽힘모멘트와 회전단력을 허용하지 않는다. 따라서 축방향 모드함수로 고려된 경계조건을 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{고정경계조건(C)} \quad \Psi = \Psi' = 0 \tag{9a}$$

$$\text{단순지지 경계조건(S)} \quad \Psi = \Psi'' = 0 \tag{9b}$$

$$\text{자유경계조건(F)} \quad \Psi'' = \Psi''' = 0 \tag{9c}$$

본 연구에서 고려된 일단 고정, 타단 자유인 경계조건을 만족하는 축방향 모드함수와 축방향 진동모드를 나타내는 특성방정식은 Table 1과 같다.

Table 1 Characteristic Equations and σ_m for boundary conditions

B.C.	Characteristic Equation	Fomula for σ_m
C-C F-F	$\cos\lambda_m \cosh\lambda_m - 1 = 0$	$\sigma_m = \frac{\cosh\lambda_m - \cos\lambda_m}{\sinh\lambda_m - \sin\lambda_m}$
C-S	$\tan\lambda_m - \tanh\lambda_m = 0$	$\sigma_m = \frac{\cosh\lambda_m + \cos\lambda_m}{\sinh\lambda_m + \sin\lambda_m}$
C-F	$\cos\lambda_m \cosh\lambda_m + 1 = 0$	$\sigma_m = \frac{\cosh\lambda_m + \cos\lambda_m}{\sinh\lambda_m + \sin\lambda_m}$

각각의 에너지를 Rayleigh-Ritz법을 적용하면 링보강 복합재료 원통셀에 대한 진동수방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial X_i}(T_i - U_i) &= 0, \quad X_i = U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} \\
T_i &= T_s - T_c \quad U_i = U_s - U_c
\end{aligned} \tag{10}$$

결과적으로 링보강 복합재료 원통셀에 대한 진동수방정식은 다음과 같이 행렬형태로 이루어진다.

$$[K]\{X_i\} - \omega_{mn}^2[M]\{X_i\} = 0 \tag{11}$$

여기서 행렬 $[K]$, $[M]$ 은 강성 및 질량행렬로써 3×3 의 부행렬로 이루어지며, 부행렬은 $M \times M$ 의 크기를 갖는다. 그리고 식(11)이 유용해를 얻기 위해서는 행렬식이 0이 되어야 한다.

3. 수치결과 및 토의

본 해의 정확도를 검증하기 위해 Table 1에 제시된 물성을 갖는 평직 GFRP 복합재료 원통셀에 대해 실험을 통한 결과와 비교하였다. 진동실험은 가장 일반적으로 사용되고 있는 충격해머와 가속도계를 사용한 충격가진법을 이용하여 진동수와 진동모드를 측정하였으며, 신호의 오차를 줄이기 위하여 같은 점을 8회 가진하여 이들을 평균하여 얻었다. 또한 모드형상을 결정하기 위해 가진점은 원주방향으로 16점, 길이방향으로 9점으로 균일한 간격으로 결정하였다. 한편 고려된 경계조건을 구현하기 위해 고정 경계조건은 셀고정용 지그를 제작한 후 에폭시로 부착하고 이를 베드(bed)에 볼트로 고정하였다. 그리고 단순지지 경계조건은 많은 볼트(24개)로 지지하도록 제작된 지그에 설치하여 구현하였다. 실험에 사용된 원통셀의 길이는 315mm, 반경은 80mm, 두께는 3mm이며, 보강재의 크기는 $b \times d = 5 \times 5$ mm이며, 보강재의 위치는 Fig. 2에 제시되었다. Table 3~7에서는 다섯 가지 경계조건(고정-고정, 고정-단순지지, 고정-자유, 자유-자유, 단순지지-단순지지)을 갖는 원통셀에 대한 이론해석결과와 실험결과를 제시하였다. 표에서 나타난 것처럼 이론해석 결과와 실험결과간의 차이는 전반적으로 10%미만으로 잘 일치하고 있으며, 이 들간의 차이는 $[(f_{Ray} - f_{exp})/f_{exp}] \times 100(\%)$ 로 계산된 값으로 f_{Ray} 는 본 이론에 의한 진동수이고, f_{exp} 는 실험을 통해 얻은 결과이다. 실험과 이론해와 차이가 나는 것은 시험편의 결함 및 경계조건을의 구현 등에 따른 실험적 오차에 기인한다. 모든 셀에 대한 결과의 수렴은 식(8)에서 축방향 진동모드 $M=12 \sim 15$ 에서 이루어지고 있어 앞으로의 이론 결과는 이를 기준으로 해석된 값이다.

4개의 링으로 보강되고 $h/R=0.0125$ 인 원통셸에 대해 여러 가지 길이 대 반경 비(L/R)의 변화에 대해 기본진동수에 미치는 경계조건의 영향을 Table 8에 나타냈다. 모든 경계조건에 대해 L/R 비가 커질수록 기본진동수는 감소하는 결과를 보이고 있으며, 원주방향 반파수가 작은 쪽으로 접근하는 것을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 길이가 길어짐으로써 원통셸 구조물은 셸의 거동이 아닌 빔의 거동을 하게 되는 것을 의미한다. 셸의 양단이 동일한 경계조건을 갖는 경우(C-C, S-S, F-F) L/R 비가 비교적 작은 곳에서는 F-F 경계조건을 갖는 셸이 가장 큰 진동수를 갖지만 큰 L/R 비에서는 C-C경계조건을 갖는 셸이 가장 큰 진동수를 갖는다. 그리고 한단 고정이고 타단이 다른 경계조건을 갖는 경우 C-C 경계조건과 C-S 경계조건을 갖는 셸은 거의 유사한 진동수를 갖는다.

한편 링 보강재의 수에 따른 기본진동수의 거동을 Table 9에 제시하였다. 표에 나타난 것처럼 보강을 함으로써 모든 경계조건에 대해 진동수가 크게 증가하는 것을 볼 수 있다. 하나의 링으로 보강하는 경우 보강하지 않는 셸에 비해 약 20~60% 정도 진동수가 증가한 것을 알 수 있다. S-S 경계조건의 경우 약 60%정도 증가량이 가장 컸으며, C-F 경계조건의 경우 약 20%정도를 나타내고 있다. 그리고 보강재의 수가 8 이상이 되면 진동수가 서서히 감소하는 경향을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 보강을 함으로써 셸의 강성도 증가를 하지만 질량의 증가도 동시에 일어나기 때문에 이 이상이 되면 질량증가가 강성증가보다 그 영향이 크게 나타나고 있기 때문으로 판단된다. 여기서 또 하나의 현상은 보강을 함으로써 기본진동수가 나타나는 원주방향 반파수가 변화되는 것을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 보강재가 원주방향으로 보강되는 링이기 때문에 셸이 보강됨으로써 원주방향에 대해 보다 저항력이 강해졌기 때문이다.

4. 결론

여러 가지 경계조건을 갖는 링으로 보강된 복합재료 원통셸에 대해 Love의 셸이론과 이산보강이론을 적용하여 지배방정식을 유도하였고, 에너지법과 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 진동수방정식을 이론적으로 유도하였으며, 각각의 경계조건에 대해 서로 비교하였으며, 보강을 함으로써 진동수 및 진

동모드에 미치는 영향을 분석하였다. 해의 검증을 위해 실험을 수행하여 그 결과를 비교하였다.

※ 참고문헌

- (1) A. M. Al-Najafi, and G. B. Warburton, 1970, "Free Vibration of Ring-Stiffened Cylindrical Shells," J. of Sound and Vibration, Vol. 13, pp. 9-25.
- (2) B. A. J. Musfafa and R. Ali, 1989, "An Energy Method for Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells," Computers & Structures, Vol. 32, pp. 355-363.
- (3) B. Yang and J. Zhou, 1995, "Analysis of Ring-Stiffened Cylindrical Shells," J. of Applied Mechanics, Vol. 62, pp. 1005-1014.
- (4) M. Wang, S. Swaddiwudhipong and J. Tian, 1997, "Ritz Method for Vibration Analysis of Cylindrical Shells with Ring Stiffeners," J. of Engineering Mechanics, Vol. 123, pp. 134-142.
- (5) S. Goswami and M. Mukhopadhyay, 1995, "Finite Element Free Vibration Analysis of Laminated Composite Stiffened Shell," J. of Composite Materials, Vol. 29, pp. 2388-2422.
- (6) C. W. Bert, C. D. Kim and V. Birman, 1993, "Vibration of Composite-Material Cylindrical Shells with Ring and/or Stringer Stiffeners," Composite Structures, Vol. 25, pp. 477-484.

Table 2 Woven fabrics composite material properties

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	ρ (kg/m ³)
24.0	24.0	4.2	0.15	1750

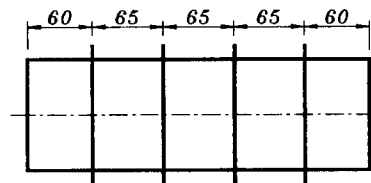


Fig. 2 Shell geometry used in Table 3~7

Table 3 Comparison of predicted and experimental results for ring stiffened plain weave GFRP composite cylindrical shell with C-C boundary condition

Mode (<i>m,n</i>)	Predicted Frequency (Hz)					Exp. Freq.(Hz)	Disp.(%)
	M=6	M=10	M=12	M=14	M=15		
(1,2)	1116.6	1092.7	1088.4	1086.7	1085.4	1025.0	5.9%
(1,3)	1355.5	1274.7	1264.0	1263.5	1213.1	1275.0	-4.9%
(1,1)	1670.6	1645.1	1638.7	1634.2	1630.8	1625.0	0.4%
(2,3)	1899.0	1836.8	1824.2	1822.3	1822.3	1862.5	-2.2%
(1,4)	2213.2	1986.7	1959.7	1959.6	1959.4	1975.0	-0.8%

Table 4 Comparison of predicted and experimental results for ring stiffened plain weave GFRP composite cylindrical shell with C-F boundary condition

Mode (<i>m,n</i>)	Predicted Frequency (Hz)					Exp. Freq.(Hz)	Disp.(%)
	M=6	M=10	M=12	M=14	M=15		
(1,2)	523.6	507.5	505.9	504.3	503.6	465.0	8.3%
(1,1)	690.6	685.9	685.0	684.4	684.1	715.0	-4.3%
(1,3)	985.5	951.5	946.7	940.0	936.9	915.0	-2.4%
(2,2)	1274.2	1254.3	1249.8	1247.3	1245.9	1270.0	-2.0%
(2,3)	1352.6	1285.6	1273.1	1271.9	1271.1	1340.0	-5.1%

Table 5 Comparison of predicted and experimental results for ring stiffened plain weave GFRP composite cylindrical shell with C-S boundary condition

Mode (<i>m,n</i>)	Predicted Frequency (Hz)					Exp. Freq.(Hz)	Disp.(%)
	M=6	M=10	M=12	M=14	M=15		
(1,2)	1020.4	1003.9	1000.5	997.97	999.6	962.5	3.9%
(1,3)	1300.6	1225.7	1209.9	1209.7	1209.6	1225.0	-13%
(1,1)	1592.3	1581.1	1578.3	1576.4	1575.7	1475.0	6.8%
(2,3)	1804.8	1746.9	1729.2	1727.9	1727.6	1812.5	-4.7%
(1,4)	2190.1	1975.9	1936.5	1936.2	1936.1	1962.5	-1.3%

Table 6 Comparison of predicted predictions and experimental results for ring stiffened plain weave GFRP composite cylindrical shell with S-S boundary condition

Mode (<i>m,n</i>)	Predicted Frequency (Hz)					Exp. Freq.(Hz)	Disp.(%)
	M=6	M=10	M=12	M=14	M=15		
(1,2)	872.0	860.3	855.5	855.5	855.5	912.5	6.2%
(1,3)	1240.8	1173.9	1148.7	1148.5	1148.4	1187.5	-3.3%
(1,1)	1459.0	1458.5	1458.3	1458.3	1458.3	1362.5	7.0%
(2,3)	1821.8	1771.5	1750.8	1750.4	1750.4	1837.5	-4.7%
(2,2)	1933.7	1925.2	1921.4	1921.3	1921.3	1962.5	-2.1%

Table 7 Comparison of predicted and experimental results for ring stiffened plain weave GFRP composite cylindrical shell with F-F boundary condition

Mode (<i>m,n</i>)	Predicted Frequency (Hz)					Exp. Freq.(Hz)	Disp.(%)
	M=6	M=10	M=12	M=14	M=15		
(1,3)	1359.3	1331.6	1324.2	1321.0	1318.8	1400.0	3.6%
(1,2)	1675.7	1670.2	1668.8	1668.0	1667.7	1675.0	-0.4%
(1,4)	1811.7	1724.2	1708.1	1703.9	1700.1	1850.0	-8.1%
(2,3)	2225.2	2198.1	2190.2	2188.9	2188.7	2162.0	-1.2%
(2,4)	2377.8	2289.1	2266.2	2265.0	2264.8	2387.0	-5.1%

Table 8 Comparison of fundamental frequencies of stiffened shell with different *L/R* ratio for various boundary conditions(*R*=80mm, *h/R*=0.0125)

<i>L/R</i>	Fundamental Frequency (Hz)				
	C-C	F-F	S-S	C-F	C-S
1	2573.0(3)	4250.6(5)	2476.3(3)	1517.8(2)	2490.4(3)
2	1571.7(3)	2145.7(4)	1570.1(2)	832.4(2)	1509.3(3)
5	770.4(2)	861.3(3)	638.5(2)	379.0(2)	697.8(2)
10	418.4(2)	405.3(2)	384.7(1)	164.0(1)	382.1(2)
20	221.1(1)	200.1(2)	125.9(1)	60.2(1)	174.1(1)
50	55.4(1)	51.4(1)	40.4(1)	27.5(1)	46.1(1)

Table 9 Comparison of fundamental frequencies of stiffened shell with number of stiffeners for various boundary conditions(*R*=80mm, *L/R*=5, *h/R*=0.0125)

No. of Stiffener	Fundamental Frequency (Hz)				
	C-C	F-F	S-S	C-F	C-S
0	504.8(4)	556.6(4)	346.4(3)	218.2(2)	436.2(3)
1	708.9(3)	767.7(3)	553.3(2)	256.9(2)	650.8(3)
2	765.6(2)	775.8(3)	567.8(2)	303.7(2)	686.8(2)
4	770.4(2)	861.3(3)	589.9(2)	379.0(2)	697.8(2)
8	814.3(2)	1081.7(2)	661.6(2)	428.5(1)	751.9(2)
12	803.8(2)	1058.0(2)	666.3(2)	401.3(1)	746.8(2)
16	789.0(2)	1025.3(2)	663.5(2)	378.9(1)	736.7(2)