

비선형 경계조건을 가진 보의 정규모드진동

°김 현 기* 이 원 경**

Normal Mode Vibrations of a Beam with a Nonlinear Boundary Condition

Hyun Ki Kim and Won Kyoung Lee

Abstract

In order to check the validity of nonlinear normal modes of continuous systems by means of the energy-based formulation, we consider a beam with a nonlinear boundary condition. The initial and boundary value problem consisting of a linear partial differential equation and a nonlinear boundary condition is reduced to a linear boundary value problem consisting of an 8th order ordinary differential equations and linear boundary conditions. After obtaining the asymptotic solution corresponding to each normal mode, we compare this with numerical results by the finite element method.

1. 서 론

대칭 회복력을 가지는 비선형다자유도계에서도 선형계에서와 마찬가지로 정규모드진동 즉, 각 물체들이 동시에 평형점과 최대변위점을 지나는 주기운동을 가질 수 있다는 Rosenberg⁽¹⁻³⁾의 선구적인 연구이래로 많은 연구자들이 비선형 정규모드 진동을 연구해 오고 있다. 그 중 일부를 소개하자면, 박철희⁽⁴⁾는 강제진동응답의 특성을 이해하는데 비선형정규모드의 개념을 활용해왔으며, 연속계의 정규모드를 구하려는 노력의 일환으로 Szemplica-Stupnika⁽⁵⁾는 Ritz방법과 조화균형법을 사용하였다. 또한 Shaw와 Pierre⁽⁶⁾는 정규모드의 정의가 계의 위상공간내의 특정곡면(two-dimensional invariant manifold) 위에서의 동역학으로 주어질 수 있다는 점에 착안하여 비선형 연속계의 정규모드를 결정하는 일반적인 방법을 소개하였다. 이 아이디어에 착안하여 King과

Vakakis⁽⁷⁾는 정규모드진동 중에는 연속계의 임의의 점의 운동이 모드함수를 이용하면 어떤 기준점의 운동으로 표현할 수 있다는 점과 에너지보존을 활용하여 연속계의 비선형정규모드를 점근적으로 결정하는 방법을 소개하였다. 한편, Nayfeh 등⁽⁸⁻¹¹⁾은 연속계의 정규모드를 위해 invariant manifold 개념과 다중시간법(method of multiple scale)을 사용하였으며 기존의 정규모드의 개념을 확장함으로써 비대칭 회복력을 갖는 비선형계의 정규모드도 소개하였다.

본 연구에서는 King과 Vakakis⁽⁷⁾가 소개한 방법의 타당성을 검증해보기 위하여, 한 쪽은 고정되고 다른 한 쪽은 비선형스프링으로 구속된 보 즉, 비선형경계조건을 가지는 보를 선택하였다. 선형 편미분방정식과 비선형 경계조건으로 주어지는 비선형 초기치 및 경계치문제를 8계 선형상미분방정식과 선형경계조건을 가지는 선형경계치문제로 변환하여 비선형정규모드를 구한 후, 유한요소법을 사용하여 이 정규모드의 타당성을 조사하였다.

* 정회원, 영남대학교 공업기술연구소

** 정회원, 영남대학교 기계공학부

2. 운동방정식

Fig. 1에서와 같이 한쪽은 고정되어 있고 다른 한쪽은 비선형스프링으로 구속된 보의 지배방정식은 다음과 같이 주어진다.^(12, 13)

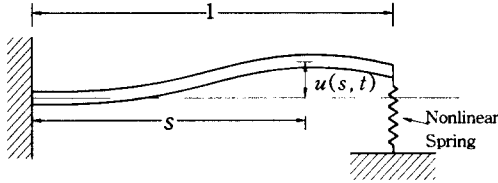


Fig.1 A schematic diagram of a beam with a nonlinear boundary condition

$$-\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$s=0 \text{ 에서 } u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (2)$$

$$s=1 \text{ 에서 } \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \alpha u + \epsilon \gamma u^3 = 0 \quad (4)$$

여기서, α 와 $\epsilon \gamma$ 는 각각 스프링의 선형계수와 비선형계수를 나타낸다.

비선형 정규모드운동을 하는 동안 기준점 $s = s_0$ 에서 보의 변위는 $u_0(t) \equiv u(s_0, t)$ 로 표기한다. 다른 모든 점들의 변위는 아래와 같이 기준점(reference point)에서의 변위 즉, $u_0(t)$ 로 표현할 수 있다. 그리고, 기준점(s_0)은 정규모드의 절점이 되지 않아야 한다.

$$u(s, t) = U(s, u_0(t)) \quad (5)$$

위 식에서 $U(\cdot, \cdot)$ 는 고려된 비선형모드의 진동형을 나타내기 위해 사용되어지는 모드함수이다. 비선형모드진동을 하는 동안 보의 총 에너지는 아래 식과 같다.

$$E_{tot} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\int_0^1 u_1^2 ds + \int_0^1 u_2^2 ds + \alpha u^2(1, t) + \frac{\epsilon \gamma}{2} u^4(1, t) \right) \quad (6)$$

여기서 아래첨자 t 와 s 는 각 변수에 대한 편미분을 의미한다. chain-rule을 사용하여 식 (6)을 다시 표현하면 아래 식과 같다.

$$E_{tot} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(u_0^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial u_0} \right)^2 ds + \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial s} \right)^2 ds + \alpha U^2(1, u_0(t)) + \frac{\epsilon \gamma}{2} U^4(1, u_0(t)) \right) \quad (7)$$

여기서 \cdot 은 시간 t 에 대한 상미분을 나타낸다. 식 (7)을 이용하여 다음과 같이 기준점에서의 속도를 구할 수 있다.

$$\dot{u}_0^2 = \frac{2E_{tot} - \int_0^1 U_s^2 ds - \alpha U^2(1, u_0(t)) - \frac{\epsilon \gamma}{2} U^4(1, u_0(t))}{\int_0^1 U_{u_0}^2 ds} \quad (8)$$

식 (8)과 운동방정식 (1)을 이용하면 $U(s, u_0(t))$ 을 지배하는 다음과 같은 편미분방정식과

$$\frac{2E_{tot} - \int_0^1 U_s^2 ds - \alpha U^2(1, u_0(t)) - \frac{\epsilon \gamma}{2} U^4(1, u_0(t))}{\int_0^1 U_{u_0}^2 ds} \frac{\partial^2 U}{\partial u_0^2} - \{U_{sss}\}_{s=s_0} \frac{\partial U}{\partial u_0} = -U_{sss} \quad (9)$$

경계조건및 적합조건

$$U(0, u_0(t)) = U_s(0, u_0(t)) = U_s(1, u_0(t)) = 0$$

$$U_{ss}(1, u_0(t)) = \alpha U(1, u_0(t)) + \epsilon \gamma U^3(1, u_0(t)) \quad (10)$$

$$U(s_0, u_0(t)) = u_0(t)$$

을 얻을 수 있다. 보의 위치에너지가 최대일 때 즉 보의 속도가 0일 때 식 (9)는 아래 식을 만족한다.

$$\left\{ -\{U_{sss}\}_{s=s_0} \frac{\partial U}{\partial u_0} + U_{sss} \right\}_{u_0(t)=u_0} = 0 \quad (11)$$

보의 위치에너지가 최대가 아닐 때 식 (9) ~ (11)의 접근해를 다음과 같이 멱급수로 전개하기로 하자.

$$U(s, u_0(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} U^{(k)}(s, u_0) \quad (12)$$

여기서,

$$U^{(0)}(s, u_0) = a_1^{(0)}(s) u_0(t) \quad (13)$$

$$U^{(k)}(s, u_0) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} a_m^{(k)}(s) u_0^m(t), \quad k \geq 1 \quad (14)$$

이다. 계 (1) ~ (4)가 3차의 비선형성만 가지므로 급수식 (14)에서는 홀수 항만 나타난다. 그리고 함수 $U^{(k)}$ 와 이들의 모든 편도함수들을 다음과 같이 가정하기로 한다.

$$\frac{\partial^n U^{(k)}}{\partial s^n} = O(\epsilon^k), \quad k \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

적합성 때문에 $a_1^{(0)}(s_0) = 1$ 과 $a_m^{(k)}(s_0) = 0$, $m = 1, 3, 5, \dots$, $k \geq 1$ 을 만족해야 한다. ϵ 의 여러 차수에 해당하는 근사해는 식 (12)을 식 (9) ~ (11)에 대입하면 계산할 수 있는데 본 연구에서는 $O(1)$ 과 $O(\epsilon)$ 에 해당하는 근사해만을 구해보기로 한다.

$O(1)$ 근사

$O(1)$ 근사에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$-\{U_{ssss}^{(0)}\}_{s=s_0} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial u_0} = -U_{ssss}^{(0)} \quad (16)$$

식 (16)에 식 (13)을 대입하면 다음과 같은 $a_1^{(0)}(s)$ 에 대한 4계 상미분방정식을 얻는다.

$$a_1^{(0)''''} - \{a_1^{(0)''''}\}_{s=s_0} a_1^{(0)} = 0 \quad (17)$$

경계조건과 적합조건은

$$a_1^{(0)}(0) = a_1^{(0)'}(0) = 0 \quad (18a)$$

$$a_1^{(0)''}(1) = 0, \quad a_1^{(0)''''}(1) = \alpha a_1^{(0)}(1) \quad (18b)$$

$$a_1^{(0)}(s_0) = 1 \quad (18c)$$

이되며, 위 식에서 위 첨자 '은 s 에 대한 상미분이다. 따라서 $O(1)$ 근사문제는 공간변수(s)의 4계 상미분방정식으로 정리된다. 적합조건 $a_1^{(0)}(s_0) = 1$ 을 적용하면 $a_1^{(0)}(s)$ 는 다음과 같다.

$$a_1^{(0)}(s) = \frac{B_1 \cos(\lambda s) + B_2 \cosh(\lambda s) + B_3 \sin(\lambda s) + B_4 \sinh(\lambda s)}{B_1 \cos(\lambda s_0) + B_2 \cosh(\lambda s_0) + B_3 \sin(\lambda s_0) + B_4 \sinh(\lambda s_0)} \quad (19)$$

위 식에서 B_i 는 임의의 상수로서 경계조건 (18a, b)에 의해 결정된다. 식 (19)를 식 (18a)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$B_1 = -B_2, \quad B_3 = -B_4 \quad (20)$$

다시 식 (19)를 식 (18b)의 두 경계조건에 대입하고 식 (20)을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2 (B_2 (\cos(\lambda s) + \cosh(\lambda s)) + B_4 (\sin(\lambda s) + \sinh(\lambda s)))}{-B_2 (\cos(\lambda s_0) - \cosh(\lambda s_0)) - B_4 (\sin(\lambda s_0) - \sinh(\lambda s_0))} = 0 \\ & \frac{\lambda^3 (B_1 \cos(\lambda s) + B_1 \cosh(\lambda s) - B_2 \sin(\lambda s) + B_2 \sinh(\lambda s))}{-B_2 \cos(\lambda s_0) + B_2 \cosh(\lambda s_0) - B_1 \sin(\lambda s_0) + B_1 \sinh(\lambda s_0)} \\ & = \frac{\alpha (-B_2 \cos(\lambda s) + B_2 \cosh(\lambda s) - B_1 \sin(\lambda s) + B_1 \sinh(\lambda s))}{-B_2 \cos(\lambda s_0) + B_2 \cosh(\lambda s_0) - B_1 \sin(\lambda s_0) + B_1 \sinh(\lambda s_0)} \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)에서 B_2 와 B_4 가 동시에 0이 되지 않기 위해서는 계수행렬의 행렬식이 영이 되어야 한다. 즉,

$$\lambda^3 (1 + \cos \lambda \cosh \lambda) + \alpha (\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda) = 0 \quad (22)$$

이 만족되어야 한다. 식 (22)를 만족하는 λ^2 은 계 (1) ~ (4)의 선형화계의 고유진동수이다. 연립방정식 (21)을 풀면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{B_4}{B_2} \\ &= -\frac{\alpha (\cos(\lambda) - \cosh(\lambda)) - \lambda^3 (\sin(\lambda) - \sinh(\lambda))}{\lambda^3 (\cos(\lambda) + \cosh(\lambda)) + \alpha (\sin(\lambda) - \sinh(\lambda))} \end{aligned}$$

β 을 이용하면 $O(1)$ 근사해 $a_1^{(0)}(s)$ 는 다음과 같다.

$$a_1^{(0)}(s) = \frac{\cosh(\lambda s) - \cos(\lambda s) + \beta (\sinh(\lambda s) - \sin(\lambda s))}{\cosh(\lambda s_0) - \cos(\lambda s_0) + \beta (\sinh(\lambda s_0) - \sin(\lambda s_0))} \quad (23)$$

$O(\epsilon)$ 근사

$O(\epsilon)$ 은 다음과 같은 방정식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \int_0^1 U_s^{(0)2} ds + \alpha U^{(0)2}(1, u_0(t)) \right\}_{u_0 = u_0^i} \right. \\ & - \left. \int_0^1 U_s^{(0)2} ds - \alpha U^{(0)2}(1, u_0(t)) \right] / \int_0^1 U_{u_0}^{(0)2} ds - \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial u_0^2} \quad (24) \\ & - \{ U_{ssss}^{(1)} \}_{s=s_0} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial u_0} - \{ U_{ssss}^{(0)} \}_{s=s_0} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial u_0} = - U_{ssss}^{(1)} \end{aligned}$$

그리고, 최대 위치에너지에서 해의 해석적 연속성 (analytic continuation)을 위한 $O(\varepsilon)$ 조건은 다음과 같다.

$$- \{ U_{ssss}^{(1)} \}_{s=s_0} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial u_0} - \{ U_{ssss}^{(0)} \}_{s=s_0} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial u_0} = - U_{ssss}^{(1)} \quad (25)$$

식(24)에 $U^{(1)}(s, u_0) = a_1^{(1)}(s)u_0(t) + a_3^{(1)}(s)u_0^3(t) + \dots$ 을 대입하고, 좌우변의 $u_0(t)$ 의 계수들을 같게 두면 $a_3^{(1)}(s)$ 와 $a_1^{(1)}(s)$ 로 이루어진 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{6a_3^{(1)}(s) \int_0^1 a_1^{(0)}(s)^{\prime\prime 2} ds}{\int_0^1 a_1^{(0)}(s)^2 ds} + \frac{6\alpha u^* a_1^{(0)}(1)^2 a_3^{(1)}(s)}{\int_0^1 a_1^{(0)}(s)^2 ds} \\ & - a_1^{(0)}(s) a_1^{(1)}(s_0)^{(iv)} - a_1^{(1)}(s) a_1^{(0)}(s_0)^{(iv)} = - a_1^{(1)}(s)^{(iv)} \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)으로부터 다음과 같은 $a_3^{(1)}(s)$ 와 $a_1^{(1)}(s)$ 사이의 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & a_3^{(1)}(s) = \\ & \frac{\int_0^1 a_1^{(0)}(s)^2 ds (a_1^{(1)}(s)^{(iv)} - a_1^{(0)}(s) a_1^{(1)}(s_0)^{(iv)} - a_1^{(1)}(s) \lambda^4)}{6u^* (\int_0^1 a_1^{(0)}(s)^{\prime\prime 2} ds + \alpha (a_1^{(0)}(1))^2)} \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)을 식 (25)에 대입하고 정리하여 $a_1^{(1)}(s)$ 에 대한 다음의 8계 선형 비제차 상미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & u^* \int_0^1 a_1^{(0)}(s)^2 ds a_1^{(1)}(s)^{(viii)} - \Gamma a_1^{(1)}(s)^{(iv)} \\ & + \lambda^4 (\Gamma - u^* \lambda^4 \int_0^1 a_1^{(0)}(s)^2 ds) a_1^{(1)}(s) \\ & = ((u^* \int_0^1 a_1^{(0)}(s)^2 ds) a_1^{(1)}(s_0)^{(viii)} - \Gamma a_1^{(1)}(s_0)^{(iv)}) a_1^{(0)}(s) \end{aligned} \quad (28)$$

여기서,

$$\Gamma = 6u^* \int_0^1 a_1^{(0)}(s)^{\prime\prime 2} ds + 6\alpha u^* a_1^{(0)}(1)^2 + 4u^* \lambda^4 \int_0^1 a_1^{(0)}(s)^2 ds$$

이며, $a_1^{(1)}(s)$ 에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$a_1^{(1)} = 0, \quad a_1^{(1)}(0)' = 0,$$

$$a_1^{(1)}(1)'' = 0, \quad a_1^{(1)}(1)''' = \alpha a_1^{(1)}(1),$$

$$a_1^{(1)}(0)^{(iv)} = 0, \quad a_1^{(1)}(0)^{(v)} = 0,$$

$$a_1^{(1)}(1)^{(vi)} = a_1^{(1)}(s_0)^{(iv)} a_1^{(0)}(1)''', \quad (29)$$

$$\begin{aligned} a_1^{(1)}(1)^{(vii)} &= \frac{1}{\int_0^1 a_1^{(0)}(s)^2 ds} (-6u^* (\int_0^1 a_1^{(0)}(s)^{\prime\prime 2} ds \\ & + \alpha a_1^{(0)}(1)^2) \varepsilon \gamma a_1^{(0)}(1)^3 \\ & + \alpha \lambda^4 a_1^{(1)}(1) + a_1^{(1)}(s_0)^{(iv)} a_1^{(0)}(1)''' \\ & + \alpha (a_1^{(1)}(1))^{(iv)} - \lambda^4 a_1^{(1)}(1) - a_1^{(1)}(s_0)^{(iv)} a_1^{(0)}(1) \end{aligned}$$

위의 경계조건 중 마지막 4개를 얻기 위해서는, 식 (10)의 U에 대한 경계조건으로부터 $a_3^{(1)}(s)$ 의 경계조건을 다음과 같이 구하고

$$a_3^{(1)} = 0, \quad a_3^{(1)}(0)' = 0, \quad a_3^{(1)}(1)'' = 0,$$

$$a_3^{(1)}(1)''' = \alpha a_3^{(1)}(1) + \varepsilon \gamma a_1^{(1)}(1)^3 \quad (30)$$

여기에 식 (27)을 대입하여야 한다. 경계치 문제 (28)과 (29)의 완전해(closed form solution)를 구하기는 매우 어려우므로 본 연구에서는 매개변수 α 와 $\varepsilon \gamma$ 의 어떤 고정된 값에 대하여 제차해(homogeneous solution)와 특수해(particular solution)를 수치적으로 구하기로 한다. $a_3^{(1)}(s)$ 는 $a_1^{(1)}(s)$ 을 식 (27)에 대입하여 구할 수 있다. $a_1^{(1)}(s)$ 와 $a_3^{(1)}(s)$ 을 식 (12)에 대입하면 모드함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(s, t) &= U(s, u_0(t)) \\ &= a_1^{(0)}(s) u_0(t) + a_1^{(1)}(s) u_0(t) + a_3^{(1)}(s) u_0(t)^3 \\ &+ O(\varepsilon u_0(t)^5, \varepsilon^2) \end{aligned} \quad (31)$$

3. 수치결과

수치예를 위하여 선택한 매개변수의 값은 $\epsilon\gamma=1.0$, $\alpha=3.0$ 이다. Fig. 2~4는 각각 제 1차~3차까지의 비선형정규모드를 보여주고 있는데, 각 그림에서 절점을 피하기 위해 기준점을 달리 잡았는데 제 1차모드의 경우엔 $s_0=0.5$, 제 2차모드의 경우엔 $s_0=0.5$, 제 3차모드의 경우엔 $s_0=0.25$ 로 잡았다. 이 세 그림의 각각에서 여러 진폭에 해당하는 정규모드를 보여 주기 위하여 u_0^* 가 0.2, 0.5, 0.8인 경우를 선택하였다. 여기서 점선은 선형 모드 즉, $O(1)$ 근사까지만을, 실선은 비선형 모드 즉 $O(\epsilon)$ 근사까지 해석하여 구한 결과를 나타내고 있는데 제 1차 모드인 경우에 선형모드와 비선형모드의 차이가 현저하지만 제 2, 3차 모드의 경우엔 두 모드가 잘 일치하고 있다. Fig. 5~7은 $u_0^*=0.5$ 인 경우에 해석적으로 구한 정규모드의 타당성을 검증하기 위하여, 초기에 해석적 정규모드의 변위와 영인 속도를 가지고 운동을 시작하여 한 cycle 후 속도가 0에 도달한 순간의 변위를 유한요소법으로 구한 결과를 보여주고 있는데 해석적으로 구한 정규모드는 수치해와 잘 일치함을 보여준다. Fig. 8은 2차원 configuration 공간 즉, 기준점 $s=s_0$ 와 보의 끝 $s=1$ 에서의 각 정규모드의 1 cycle 동안의 보의 변위를 보여주고 있는데 제 1차모드는 nonsimilar(곡선) 모드이며 제 2, 3차모드는 모두 similar(직선) 모드임을 보여주고 있다. 이 결과는 제 2, 3차 모드는 $O(\epsilon)$ 근사 즉 비선형모드가 선형모드(반드시 similar 모드)와 잘 일치하는 사실과도 부합한다.

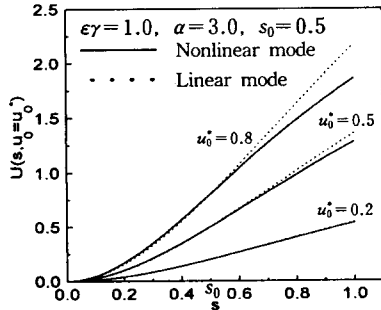


Fig. 2 Linear and nonlinear normal modes of a cantilever beam with a nonlinear boundary condition (first mode)

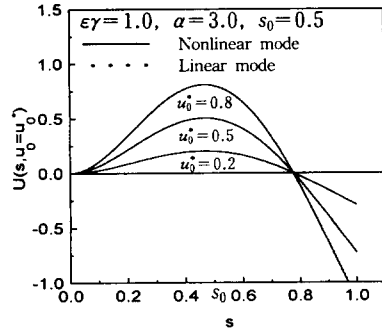


Fig. 3 Linear and nonlinear normal modes of a cantilever beam with a nonlinear boundary condition (second mode)

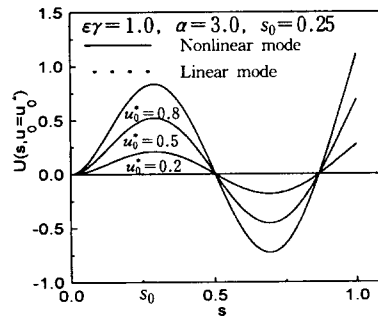


Fig. 4 Linear and nonlinear normal modes of a cantilever beam with a nonlinear boundary condition (third mode)

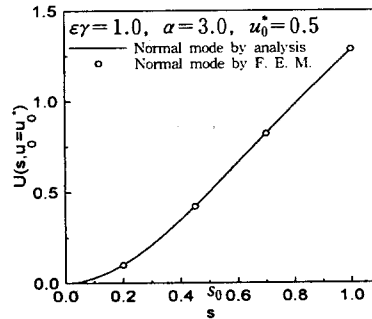


Fig. 5 Comparison between normal modes by analysis and F. E. M. (first mode).

4. 결론

연속계의 비선형정규모드를 구하기 위한 에너지 보존에 기초한 계산법(energy based formulation)의 타당성을 검증하기 위하여 한 쪽은 고정되고 다른 한 쪽은 비선형스프링으로 구속된 보 즉, 비선형경계조건을 가지는 보를 선택하였다. 선형 편미분방정식과 비선형 경계조건으로 주어지는 비선형 초기치 및 경계치문제를 8계 선형상미분방정식과 선형경계조건을 가지는 선형경계치문제로 변환하여 비선형정규모드를 구한 후, 유한요소법에 의한 정규모드와 비교한 결과 이 방법이 매우 효과적인 방법임을 확인하였으며, 제 1차모드는 비선형모드가 선형해석으로 구한 모드와 차이가 있어서 configuration 공간에서 nonsimilar 모드로 나타났으나 제 2, 3차모드는 similar 모드임을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) Rosenberg, R. M., 1964, "On The Existence of Normal Mode Vibration of Nonlinear Systems With Two-Degree-of-Freedom", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 22, No. 3, pp. 217~234.
- (2) Rosenberg, R. M., 1966, "Steady-state Forced Vibrations", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 1, pp. 95~108
- (3) Rosenberg, R. M., 1966, "On Nonlinear Vibrations of Systems With Many Degrees-of-Freedom", Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, pp. 155~242.
- (4) 박철휘, 1990, "정규모우드를 활용한 비선형 2 자유도계의 강제진동 연구", 한국 이론 및 응용역학회
- (5) Szemplinska-Stupnicka, W., 1982, "Non-Linear Normal Modes" and the Generalized Ritz Method in the Problems of Vibrations of Non-linear Elastic Continuous Systems", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 18, No. 2, pp. 149~165.
- (6) Shaw, S. W., and Pierre, C., 1991, "Nonlinear Normal Modes and invariant

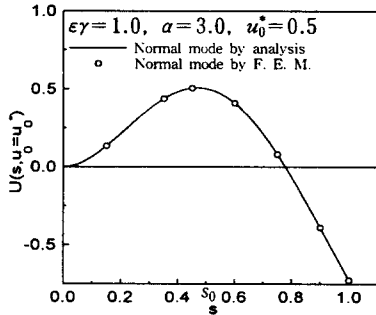


Fig. 6 Comparison between normal modes by analysis and F. E. M.(second mode).

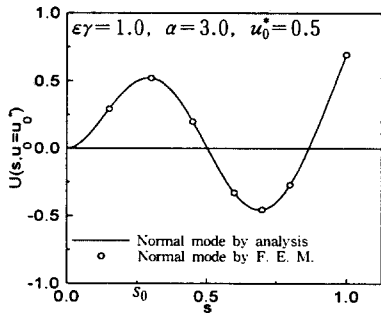


Fig. 7 Comparison between normal modes by analysis and F. E. M.(third mode).

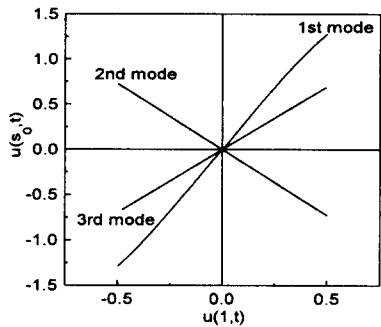


Fig. 8 Nonlinear normal modes in a two-dimensional configuration space

- Manifolds” , Journal of Sound and Vibration, Vol. 150, No. 1, pp. 170~173.
- (7) King, M. E., and Vakakis, A. F., 1994, “An Energy-Based Formulation for Computing Nonlinear Normal Modes in Undamped Continuous Systems” , ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 116, pp. 332~340.
- (8) Nayfeh, A. H., and Nayfeh, S. A., 1994, “On Nonlinear Modes of Continuous Systems”, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 116, pp. 129~136.
- (9) Nayfeh, A. H., and Nayfeh, S. A., 1995, “Nonlinear Normal Modes of a Continuous System With Quadratic Nonlinearities”, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 117, pp. 199~205.
- (10) Nayfeh, A. H., Chin, C., and Nayfeh, S. A., 1995, “Nonlinear Normal Modes of a Cantilever Beam”, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 117, pp. 477~481.
- (11) Nayfeh, A. H., Chin, C., and Nayfeh, S. A., 1996, “On Nonlinear Normal Modes of Systems With Internal Resonance”, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 118, pp. 340~345.
- (12) 이원경, 여명환, 1997, “비선형 경계조건을 가진 보의 정상상태 진동응답” 대한기계학회논문집 (A) 제 21권 제 2호, pp. 337-345.
- (13) Lee, W. K. and Yeo, M. H., 1998, “Two-Mode Interaction of a Beam with a Nonlinear Boundary Condition”, ASME Journal of Vibration and Acoustics, in press.