한국소음진동공학회 1998년도 춘계학술대회논문집, pp. 399~406.

내부공진을 가진 탄성진자계의 불규칙진동응답을 위한 두 해석해의 비교

°조 덕 상* · 이 원 경**

Comparison Between Two Analytical Solutions for Random Vibration Responses of a Spring-Pendulum System with Internal Resonance

Duk Sang Cho and Won Kyoung Lee

Abstract

An investigation into the stochastic bifurcation and response statistics of an autoparameteric system under broad-band random excitation is made. The specific system examined is a spring-pendulum system with internal resonance, which is known to be a good model for a variety of engineering systems, including ship motions with nonlinear coupling between pitching and rolling motions. The Fokker-Planck equations is used to generate a general first-order differential equation in the dynamic moment of response coordinates. By means of the Gaussian and non-Gaussian closure methods the dynamic moment equations for the random responses of the system are reduced to a system of autonomous ordinanary differential equations. In view of equilibrium solutions of this system and their stability we examine the stochastic bifurcation and response statistics. The analytical results are compared with results obtained by Monte Carlo simulation.

1. 서 론

최근 확률과정(random process)과 확률미분방정식(stochastic differential equation)에 관한 수학적 이론이 크게 발전하여 불규칙 가진력을 받는 동역학계의 응답 및 안정성연구에 큰 진전을 보이고는 있지만 이 이론을 공학문제에 직접 적용하는 데는 많은 어려움이 따르고 있다. 그 이유는 어떤 계를 해석하기 위해 적용하는 방법이 다르면 해석결과도 판이하게 달라질 수 있기 때문이다. 이러한 어려움에도 불구하고 불규칙가진력을 받는 비선형 다자유도계의 응답특성에 미치는 내부공진효과에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다[1-9]. 이 중에서 Ibrahim과 그의 동료들[7,8]은 광대역 불규칙가진력를 받는 양단고정된 보에 축방향으로 좌굴이 발생하지 않도록 정하중이 가해진 경우와 좌굴이 발생하도록 정하중이 가해진 경우에 대하여 확률적 의미에서 분기를 고찰하였다. 좌굴이 발생하지 않도록 정하중이 가해진 경우, 직접가진이 되지 않는 2번째 모드는 non-Gaussian closure 방법과 Monte Carlo 시뮬레이션으로는 분기를 예측하였으나 Gaussian closure 방법으로는 분기를 예측하지 못하였다. 좌굴이 발생하도록 정하중이 가해진 경우는 Gaussian closure 방법으로 예측한 분기점이 시뮬레이션 결과와 일치함을 보여주었다. 또한 Yoon과 Ibrahim[9]은 수직으로 세워져 있는 외팔보에 협대역 불규칙가진력이 작용할 때 non-Gaussian closure 방법으로 예측한 분기점이 수치적 시뮬레이션과 일치함을 보여주었다.

* 정회원, 한국전력기술(주) 원자로설계개발단
** 정회원, 영남대학교 기계공학부

한편, Sun과 Hsu[10]는 완전해가 알려진 비선형계[11]에 closure 방법을 적용하여 Ibrahim이 몇몇 계에서 발견했던 점프현상이 그 계들의 고유한 특성이 아니라 closure 방법에 내재한 특성에서 기인한 오류임을 입증하였다. 이와 같은 연구를 통해, 어떤 특정한 계의 응답을 예측하는 데 있어서 최선의 해석방법을 찾는 일이 쉽지 않음을 잘 알 수 있다.

본 연구에서는 불규칙 가진력을 받는 다자유도계의 모드상호작용을 조사하기 위하여 내부공진을 가지고 스프링방향으로 광대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계를 선택하였다. 이미 Gaussian closure 방법으로 구한 응답의 통계적 특성[6]의 타당성을 검증하기 위하여, 탄성진자계의 운동방정식으로부터 유도된 Fokker-Planck 방정식으로부터 모멘트방정식을 얻은 후 non-Gaussian closure 방법을 이용하여 69개의 자율상미분방정식을 구하고 이 방정식의 평형해와 그 안정성을 조사하였다. 또한 두 해석적 방법으로부터 구해진 응답의 통계적 특성을 Monte Carlo 시뮬레이션 결과와 비교하였다.

2. 운동방정식

스프링 방향으로 광대역 불규칙 가진력 $F(t)$ 를 받는 탄성진자계가 Fig. 1에 나타나 있다.

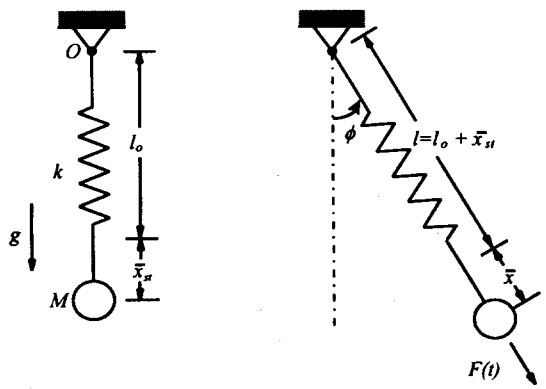

Fig. 1 A randomly excited spring-pendulum system

선형 점성감쇠력 $c_1 d\bar{x}/dt$ 와 $c_2 d\phi/dt$ 가 각각 스프링운동과 진자운동에 존재한다고 고려하면, 평면운동으로 구속되어 있는 이 계의 운동방정식은 다음과 같다[12,13].

$$M\ddot{\bar{x}} + c_1\dot{\bar{x}} + k\bar{x} - M(l+\bar{x})\dot{\phi}^2 + Mg(1-\cos\phi) = F(t), \tag{1}$$

$$M(l+\bar{x})^2\ddot{\phi} + c_2\dot{\phi} + 2M(l+\bar{x})\dot{\bar{x}}\dot{\phi} + Mg(l+\bar{x})\sin\phi = 0 \tag{2}$$

여기서 x와 ϕ는 각각 스프링운동과 진자운동을 나타내며 다음과 같은 표현을 이용하여

$$x = \frac{\bar{x}}{l},\ \zeta_1 = \frac{c_1}{2M\omega_1},\ \zeta_2 = \frac{c_2}{2Ml^2\omega_2},$$
$$\tau = \omega_1 t,\ r = \frac{\omega_2}{\omega_1},\ \omega_1^2 = \frac{k}{M},\ \omega_2^2 = \frac{g}{l}, \tag{3}$$
$$W(\tau) = \frac{F(\tau/\omega_1)}{Ml\omega_1^2}$$

식 (1)과 (2)를 무차원화하면 다음을 얻는다.

$$x'' + 2\zeta_1 x' + x - (1+x)\phi'^2 + r^2(1-\cos\phi) = W(\tau), \tag{4}$$

$$(1+x)^2\phi'' + 2\zeta_2 r\phi' + 2(1+x)x'\phi' + r^2(1+x)\sin\phi = 0 \tag{5}$$

위의 식들에서 $'$과 $''$은 각각 t와 τ에 대한 미분을 나타낸다. 근사해석을 위하여 이 계가 약비선형계라고 가정하기로 한다. 즉 식 (4)와 (5)에서 4차이상의 비선형항을 무시하면 다음을 얻는다.

$$x'' + 2\zeta_1 x' + x + \frac{r^2}{2}\phi^2 - (1+x)\phi'^2 = W(\tau), \tag{6}$$

$$\phi'' + 2\zeta_2 r\phi' + r^2\phi - r^2 x\phi - 4\zeta_2 rx\phi' + 2x'\phi' - \frac{1}{6}r^2\phi^3 + r^2x^2\phi + 6\zeta_2 rx^2\phi' - 2xx'\phi' = 0. \tag{7}$$

3. Fokker-Planck 방정식

불규칙과정 $W(\tau)$를 자기상관함수(autocorrelation function)가 다음과 같이 표시되는 평균이 0인 백색잡음(white noise)으로 가정하자.

$$R_{WW}(\Delta\tau) = E[W(\tau)W(\tau+\Delta\tau)] = 2D\,\delta(\Delta\tau) \tag{8}$$

여기서 $2D$는 진동수를 $f = 2\pi\omega$로 표현할 때의 스펙트럼밀도이고 $\delta(\Delta\tau)$는 Dirac delta 함수이다. 이때 계의 응답과정은 다음과 같은 좌표변환을 이

용하여

$$\{x, \phi, x', \phi'\}^T = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}^T = \boldsymbol{X}$$

Markov 벡터로 전환할 수 있으며, 또한 불규칙과정 $W(\tau)$를 브라운과정(Brownian process) $B(\tau)$의 도함수(formal derivative) 즉, $W(\tau) = dB/d\tau$ 로 나타내면 식 (6)과 (7)은 다음과 같은 Ito방정식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} dX_1 &= X_3 d\tau, \quad dX_2 = X_4 d\tau, \\ dX_3 &= \Big(-2\zeta_1 X_3 - X_1 - \frac{r^2}{2} X_2^2 + X_4^2 \\ &\quad + X_1 X_4^2\Big) d\tau + dB, \\ dX_4 &= (-2\zeta_2 r X_4 - r^2 X_2 + r^2 X_1 X_2 \\ &\quad + 4\zeta_2 r X_1 X_4 - 2X_3 X_4 + \frac{1}{6} r^2 X_2^3 \\ &\quad - r^2 X_1^2 X_2 - 6\zeta_2 r X_1^2 X_4 + 2X_1 X_3 X_4) d\tau \end{aligned} \tag{9}$$

이 Markov 벡터에 대한 응답의 확률밀도함수는 다음과 같이 Fokker-Planck 방정식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} p(\mathbf{x}, \tau) &= -\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(\mathbf{x}, \tau) p(\mathbf{x}, \tau)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(\mathbf{x}, \tau) p(\mathbf{x}, \tau)] \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $p(\mathbf{x}, \tau)$는 결합확률밀도함수(joint probability density function) 이고 $a_i(\mathbf{x}, \tau)$와 $b_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$는 각각 Markov 과정 $\boldsymbol{X}(\tau)$ 의 1차 및 2차 증가모멘트(incremental moment)이다. 이러한 증가모멘트는 다음과 같이 정의된다[14].

$$a_i(\mathbf{x}, \tau) = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\tau} E\{X_i(\tau + \delta\tau) - X_i(\tau) \mid \boldsymbol{X}(\tau) = \mathbf{x}\} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} b_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\tau} E\{&[X_i(\tau + \delta\tau) - X_i(\tau)] \times \\ &[X_j(\tau + \delta\tau) - X_j(\tau)] \mid \boldsymbol{X}(\tau) = \mathbf{x}\} \end{aligned} \tag{12}$$

4. 모멘트방정식

Fokker-Planck방정식 (10)으로부터 완전해 $p(\mathbf{x}, \tau)$를 구하는 것은 불가능하지만,[15,16] 임의의 차수 $n(=\alpha+\beta+\gamma+\eta)$에 대한 $p(\mathbf{x}, \tau)$의 모멘트 방정식은 식 (10)에 $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta$를 곱하고 전 상태공간 $(-\infty < x_i < \infty)$ 에 대해서 적분함으로써 얻을 수 있다. 다음과 같은 표현

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta\gamma\eta}(\tau) &= E[X_1^\alpha X_2^\beta X_3^\gamma X_4^\eta] \\ &= \int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\eta p(\mathbf{x}, \tau)\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \end{aligned}$$

을 사용하면 n 차에 대한 모멘트방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m'_{\alpha,\beta,\gamma,\eta} = {} & \alpha m_{\alpha-1,\beta,\gamma+1,\eta} + \beta m_{\alpha,\beta-1,\gamma,\eta+1} \\ & - \gamma m_{\alpha+1,\beta,\gamma-1,\eta} - 2\gamma\zeta_1 m_{\alpha,\beta,\gamma,\eta} \\ & - \gamma(1-\gamma) D m_{\alpha,\beta,\gamma-2,\eta} \\ & - \eta r^2 m_{\alpha,\beta+1,\gamma,\eta-1} \\ & - 2\eta\zeta_2 r m_{\alpha,\beta,\gamma,\eta} + \gamma m_{\alpha,\beta,\gamma-1,\eta+2} \\ & - \frac{1}{2}\gamma r^2 m_{\alpha,\beta+2,\gamma-1,\eta} - 2\eta m_{\alpha,\beta,\gamma+1,\eta} \\ & + \eta r^2 m_{\alpha+1,\beta+1,\gamma,\eta-1} \\ & + 4\eta\zeta_2 r m_{\alpha+1,\beta,\gamma,\eta} \\ & + \gamma m_{\alpha+1,\beta,\gamma-1,\eta+2} + 2\eta m_{\alpha+1,\beta,\gamma+1,\eta} \\ & - \eta r^2 m_{\alpha+2,\beta+1,\gamma,\eta-1} \\ & + \frac{1}{6}\eta r^2 m_{\alpha,\beta+3,\gamma,\eta-1} - 6\eta\zeta_2 r m_{\alpha+2,\beta,\gamma,\eta} \end{aligned} \tag{13}$$

5. Closure 방법

모멘트방정식 (13)을 살펴보면 우변의 모멘트 차수가 $n+2$로서 좌변과 우변의 모멘트 차수가 같지 않음을 알 수 있다. 이러한 모멘트방정식의 응답은 $n+1, n+2$차 모멘트를 n차 이하의 모멘트로 전환하는 cumulant 절사방법을 사용함으로써 얻어 진다. 이 방법에는, 응답의 확률밀도함수를 가우스분포로 가정하느냐, 비가우스(non-Gaussian)분포로 가정하느냐에 따라 분류되는 Gaussian closure방법과 non-Gaussian closure방법이 있다.

Gaussian closure 방법의 경우 식(13)은 $n = 1, 2$에 대해서 미분방정식을 전개할 수 있으며, 가우스과정의 3차 및 4차 모멘트들은 다음과 같이 1차 및 2차 모멘트로 표시할 수 있으므로

$$\begin{aligned} E[X_{k1} X_{k2} X_{k3}] = {} & \sum^{3} E[X_{k1}] E[X_{k2} X_{k3}] \\ & - 2E[X_{k1}] E[X_{k2}] E[X_{k3}] \end{aligned} \tag{14}$$

$$E[X_{k1}X_{k2}X_{k3}X_{k4}] = \sum^{4} E[X_{k1}]E[X_{k2}X_{k3}X_{k4}] - 2\sum^{6} E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}X_{k4}] + \sum^{3} E[X_{k1}X_{k2}]E[X_{k3}X_{k4}] + 6E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}]E[X_{k4}] \quad (15)$$

식 (13)은 14 개의 모멘트(4개의 1차 모멘트와 10개의 2차 모멘트) 미분방정식으로 정리된다. 한편, non-Gaussian closure 방법의 경우 응답과정이 가우스분포로 부터 약간 벗어난다고 한다면 식 (13)은 $n = 1 \sim 4$에 대해서 미분방정식을 전개할수 있으며, 5차 및 6차 모멘트를 다음과 같이 4차 이하의 모멘트로 나타낼 수 있으므로

$$E[X_{k1}X_{k2}X_{k3}X_{k4}X_{k5}] = \sum^{5} E[X_{k1}]E[X_{k2}X_{k3}X_{k4}X_{k5}] - 2\sum^{10} E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}X_{k4}X_{k5}] + 6\sum^{10} E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}]E[X_{k4}X_{k5}] - 2\sum^{15} E[X_{k1}]E[X_{k2}X_{k3}]E[X_{k4}X_{k5}] + \sum^{10} E[X_{k1}X_{k2}]E[X_{k3}X_{k4}X_{k5}] - 24E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}]E[X_{k4}]E[X_{k5}] \quad (16)$$

$$E[X_{k1}X_{k2}X_{k3}X_{k4}X_{k5}X_{k6}] = \sum^{6} E[X_{k1}]E[X_{k2}X_{k3}X_{k4}X_{k5}X_{k6}] - 2\sum^{15} E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}X_{k4}X_{k5}X_{k6}] + 6\sum^{20} E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}]E[X_{k4}X_{k5}X_{k6}] - 24\sum^{15} E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}]E[X_{k5}X_{k6}] + 6\sum^{45} E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}X_{k4}]E[X_{k5}X_{k6}] + \sum^{15} E[X_{k1}X_{k2}]E[X_{k3}X_{k4}X_{k5}X_{k6}] + \sum^{10} E[X_{k1}X_{k2}X_{k3}]E[X_{k4}X_{k5}X_{k6}] - 2\sum^{15} E[X_{k1}X_{k2}]E[X_{k3}X_{k4}]E[X_{k5}X_{k6}] - 2\sum^{60} E[X_{k1}]E[X_{k2}X_{k3}]E[X_{k4}X_{k5}X_{k6}] - 120E[X_{k1}]E[X_{k2}]E[X_{k3}]E[X_{k4}]E[X_{k5}]E[X_{k6}] \quad (17)$$

식 (13)은 69 개의 모멘트(4개의 1차 모멘트, 10개의 2차 모멘트, 20개의 3차 모멘트, 그리고 35개의 4차 모멘트) 미분방정식으로 정리된다.

6. 평형해의 안정성

Gaussian closure 방법으로 얻어진 14개 의 자율 상미분방정식(autonomous ordinary differential equations) 또는 non-Gaussian closure 방법으로 얻어진 69 개의 자율 상미분방정식으로 구성된 계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}) \quad (18)$$

여기서 $\boldsymbol{m} = \{m_{1000}, m_{0100}, \cdots\}^T$는 14개 또는 69개의 요소를 가진 모멘트 벡터이며 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}) = \{f_1(\boldsymbol{m}), f_2(\boldsymbol{m}), \cdots\}^T$은 이 계의 벡터장 (vector field) 이다.

우선 계 (18)의 평형해 $\boldsymbol{m}_0$는 다음의 식

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}_0) = \boldsymbol{0} \quad (19)$$

으로 부터 구해지며 이 평형해의 안정성을 판별하기 위하여 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_0 + \delta\boldsymbol{m}$ 으로 두고 평형해의 작은 교란 $\delta\boldsymbol{m}$에 대한 미분방정식으로 바꿔쓴 후 $\delta\boldsymbol{m}$의 비선형항을 무시하면 다음과 같은 선형 상미분방정식을 얻는다.

$$\delta\boldsymbol{m}' = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{m}}\right|_{\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_0} \delta\boldsymbol{m} \quad (20)$$

이 Jacobian 행렬의 모든 고유치의 실수부가 음이면 그 평형해 $\boldsymbol{m}_0$는 점근적으로 안정하다고 판단된다.

식 (13)과 (19)를 면밀히 관찰하면 이 계는 다음과 같은 평형해를 갖게 됨을 알 수 있다.

Gaussian closure 방법에 의한 모멘트방정식의 평형해는

$$m_{2000} \equiv E[X_1^2] = D/2\zeta_1, \quad m_{0020} \equiv E[X_1'^2] = D/2\zeta_1, \quad (21)$$

나머지모멘트들은0

이며, non-Gaussian closure 방법에 의한 모멘트방정식의 평형해는

$$
\begin{aligned}
&m_{2000} \equiv E[X_1^2] = D/2\zeta_1, \\
&m_{0020} \equiv E[\dot{X}_1^2] = D/2\zeta_1 \\
&m_{4000} \equiv E[X_1^4] = 3D^2/4\zeta_1^2, \\
&m_{0040} \equiv E[\dot{X}_1^4] = 3D^2/4\zeta_1^2, \\
&m_{2020} \equiv E[X_1^2\dot{X}_1^2] = D^2/4\zeta_1^2, \\
&\text{나머지 모멘트들은 0}
\end{aligned} \tag{22}
$$

이다. 이 평형해들은 탄성진자계가 진자운동은 없이 스프링운동(x)만 일어나고 있음을 말해주고 있다.

7. Monte Carlo 시뮬레이션

두 closure 방법으로 구한 응답의 통계적 특성의 타당성을 조사하기 위하여 Monte Carlo 시뮬레이션[17,18]을 통해 식(4)과 (5)를 직접 수치적으로 적분하였다. 정상 가우스과정 $W(\tau)$을 구성하기 위하여 300 개의 표본 record를 사용하였는데, 각 record는 다음 식으로부터 $\tau = 4000$의 시간동안 $N = 20480$ 개의 불규칙수(random number)를 순차적으로 표본함으로써 만들어 진다.

$$
W(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{2(4D_j)(f_{j+1} - f_j)}\, \sin(2\pi\sqrt{f_j f_{j+1}}\,\tau + \phi_j) \tag{23}
$$

여기에서 $4D$는 한 방향 스펙트럼밀도(one-sided spectrum)이고, f는 주파수(cycle/sec.), ϕ_j 는 $0 \sim 2\pi$ 사이에 균일하게 분포되어 있는 불규칙수이다.

8. 수치결과

수치예를 위하여 우선 대수방정식 (19)를 수치적으로 풀어서 식 (21) 또는 (22)로 표시된 평형해가

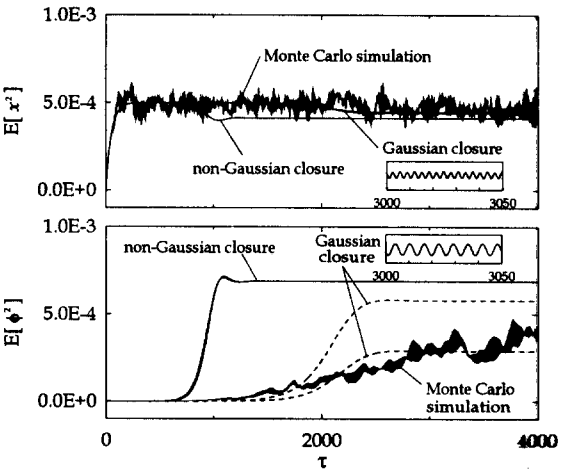

Fig. 2a Mean square time histories according to Gaussian closure, non-Gaussian closure, and Monte Carlo simulation ($\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.01$, $r = 0.5$, and $2D = 0.00002$)

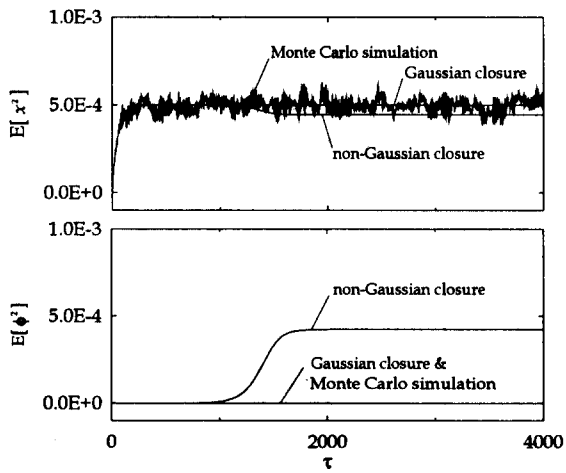

Fig. 2b Mean square time histories according to Gaussian closure, non-Gaussian closure, and Monte Carlo simulation ($\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.01$, $r = 0.51$, and $2D = 0.00002$)

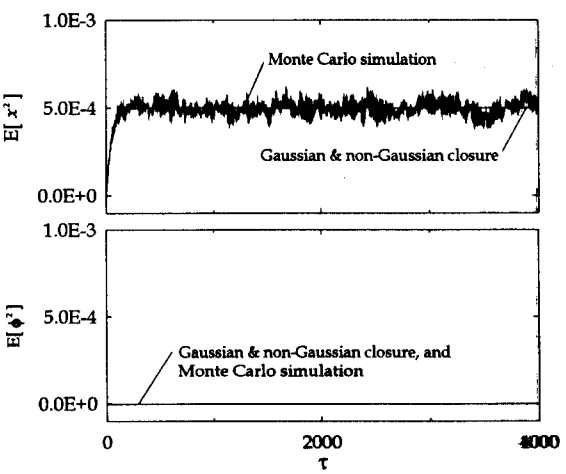

Fig. 2c Mean square time histories according to Gaussian closure, non-Gaussian closure, and Monte Carlo simulation ($\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.01$, $r = 0.525$, and $2D = 0.00002$)

유일한 평형해인가를 조사한 후, 이 평형해의 안정성을 판별하였으며, 이 평형해가 안정성을 잃는 경우에는 상미분방정식 (18)을 수치적으로 적분함으로써 모멘트들의 거동을 조사하였다.

Fig. 2는 운동의 제곱평균값이 시간이 경과함에 따라 어떻게 변화하는지를 보여주고 있는데 Fig. 2(a), 2(b), 2(c)는 $\zeta_1=\zeta_2=0.01$, $2D=0.00002$이고 진동수비 $r=\omega_2/\omega_1$이 각각 0.5, 0.51, 0.525일 때 Gaussian closure 방법, non-Gaussian closure 방법, Monte Carlo 시뮬레이션으로 얻어진 제곱평균응답의 시간이력을 나타낸다. Fig. 2(a)에서는 직접 가진되는 스프링운동이 계의 비선형 연성으로 인하여 직접 가진되지 않는 진자운동으로 에너지가 전달되었음을 보여주고 있다. 또한 정상상태(steady state)에 도달했을 때 Gaussian closure 방법에 의한 응답은 시간의 경과에 따라 제곱평균값이 두 한계 사이에서 변동하는 비정상과정(non-stationary process)을 나타내는 반면에 non-Gaussian closure 방법에 의한 응답은 정상과정(stationary process)을 나타내고 있다. 응답의 정상성에 있어서나 크기에 있어서나 non-Gaussian closure 방법보다 Gaussian closure 방법에 의한 결과가 시뮬레이션 결과에 더 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 2(b)는 Gaussian closure 방법과 수치적 시뮬레이션으로 얻어진 제곱평균응답은 스프링운동에서 진자운동으로 에너지가 전달되지 않는 반면에 non-Gaussian closure 방법으로 얻어진 제곱평균응답은 스프링운동에서 진자운동으로 에너지가 전달되고 있음을 보여준다. 이 결과는 두 해석적 방법이 평형해의 분기점을 서로 다르게 예측할 수 있음을 말해준다. Fig. 2(c)는 내부공진점에서 멀어진 경우인데 스프링운동과 진자운동사이에 에너지 교환이 없음을 보여주고 있다.

Fig. 3은 $\zeta_1=\zeta_2=0.01$, $2D=0.00002$ 인 경우에 진동수비 $r=\omega_2/\omega_1$에 따라 정상상태에서의 운동의 제곱평균값이 어떻게 변하는지를 보여주고 있다. 이 그림에서 내부공진영역($r\approx0.5$)을 벗어나 있는 두 수평선은 각각 스프링운동과 진자운동의 제곱평균값이 τ에 무관하므로 운동이 정상과정임을 말해 주고 있다. 이 결과는 불규칙가진력에 의해 직접 가진되는 스프링운동만 존재하고 진자운동은 일어나지 않으며, 정상가진(stationary excitation)에 의한 응답이 정상과정임을 보여 주고 있으므로 선형계의 응답특성과 일치한다. 이러한 스프링운동만이 존재하는 평형해의 분기점을 두 해석적 방법이 서로 달리 예측하고 있지만, Gaussian closure 방법에 의한 분기점은 Monte Carlo 시뮬레이션 결과와 잘 일치한다.

Fig. 4는 제곱평균값의 한계를 가진력의 제곱평균값 σ_W^2 에 비례하는 스펙트럼밀도 D의 함수로 나

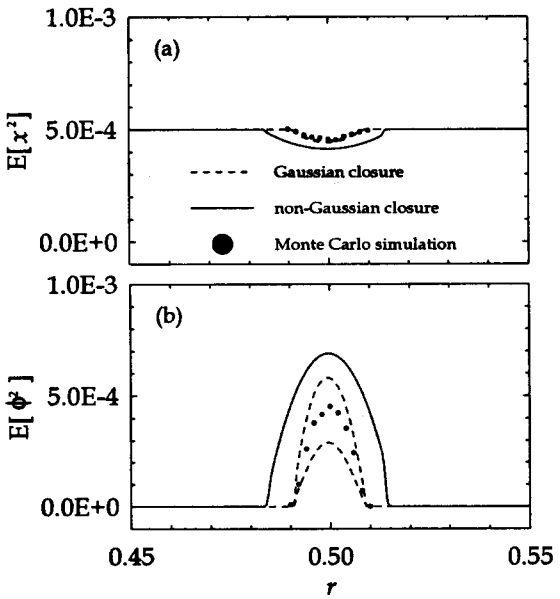

Fig. 3 Limits of mean square value as functions of the frequency ratio ($\zeta_1=0.01$, $\zeta_2=0.01$, and $2D=0.00002$)

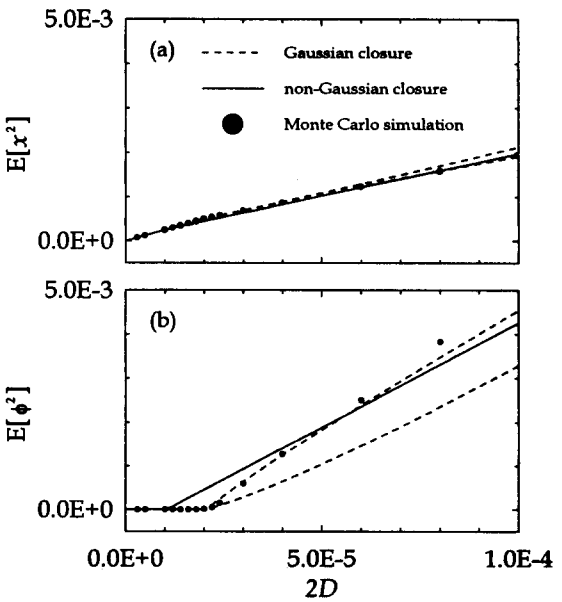

Fig. 4 Limits of mean square plotted against spectral density $2D$ ($\zeta_1=0.01$, $\zeta_2=0.01$, $r=0.49$)

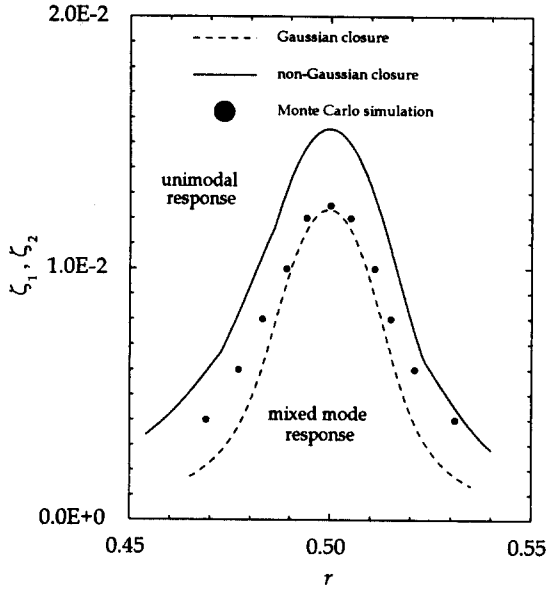

Fig. 5 Stability boundaries on $r-\zeta$ plane ($2D$ = 0.00002)

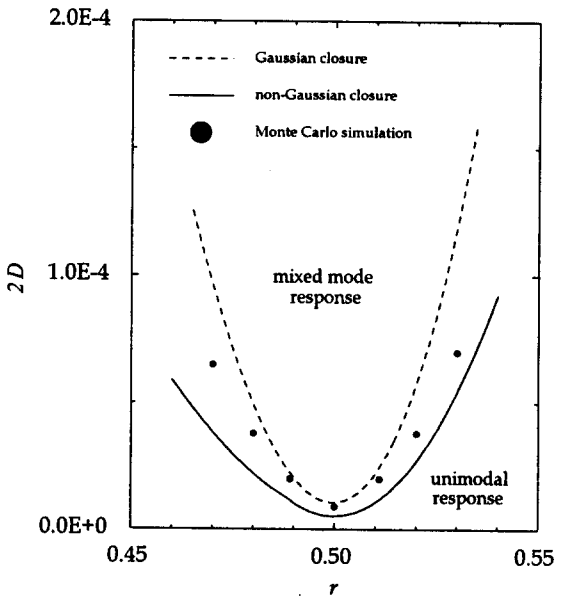

Fig. 6 Stability boundaries on $r-2D$ plane ($\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$)

타낸 것이다. Gaussian closure 방법으로 예측한 진자운동의 분기는 non-Gaussian closure 방법으로 예측한 분기점보다 상대적으로 높은 가진력의 크기에서 일어난다. 이 그림에서는 Gaussian closure 방법으로 예측한 제곱평균응답의 분기점이 수치적 시뮬레이션의 결과와 잘 일치함을 보여준다.

Fig. 5는 $2D = 0.00002$일 때 평형해가 안정성을 잃는 경계, 즉 평형해의 분기점을 $r-\zeta$ 평면에 나타낸 것이며 Fig. 6은 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.01$일 때 이 분기점을 $r-2D$ 평면에 나타낸 것이다. 이 두 그림에서는 Gaussian closure 방법으로 예측한 스프링 운동만 존재하는(unimodal response) 영역은 non-Gaussian closure 방법으로 예측한 것보다 더 넓으며, Monte Carlo 시뮬레이션 결과는 양자 사이에 있음을 보여준다. 내부공진영역($r \approx 0.5$)에서는 Gaussian closure 방법으로 예측한 분기점이 시뮬레이션 결과와 잘 일치하고 있다.

9. 결 론

불규칙가진력을 받는 비선형 2자유도계의 내부공진효과로 인하여 직접가진되지 않는 모드의 분기 및 응답특성을 조사하기 위하여 스프링방향으로 광대역 불규칙 가진력을 받는 탄성진자계를 선택하였다. 해석적 방법으로는 Gaussian closure 방법과 non-Gaussian close 방법이 사용되었으며 수치적 방법으로는 Monte Carlo 시뮬레이션이 사용되었다. 내부공진 영역에서 계의 비선형 연성으로 인하여 직접가진되는 스프링 운동으로부터 직접가진되지 않는 진자운동으로 에너지가 전달됨을 이들 해석적인 방법과 수치적 시뮬레이션이 잘 예측하고 있음을 확인하였다. 스프링운동을 의미하는 평형해가 안정성을 잃어 진자운동으로 에너지를 전달하기 시작하는 분기점을 예측하는데 있어서, non-Gaussian closure 방법보다 Gaussian closure 방법에 의한 결과가 Monte Carlo 시뮬레이션 결과에 대체로 잘 일치함을 확인하였다.

후 기

이 연구는 한국과학재단의 특정기초연구비(과제번호: 96-0200-07-01-3)의 지원에 의한 것임.

참고문헌

(1) Ibrahim, R. A. and Roberts, J. W., 1976, Broad Band Random Excitation of a Two-Degree-of-Freedom System with

Autoparametric Coupling, Journal of Sound and Vibration, Vol. 44(3), 335-348.

(2) Ibrahim, R. A. and Heo, H., 1986, Autoparametric Vibration of Coupled Beams Under Random Support Motion, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 108, 421-426.

(3) Ibrahim, R. A. and Li, W., 1988, Structural Modal Interaction with Combination Internal Resonance under Wide-Band Random Excitation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 123(3), 473-495.

(4) Roberts, J. W., 1980, Random Excitation of a Vibratory System with Autoparametric Interaction, Journal of Sound and Vibration, Vol. 69(1), 101-116.

(5) Ibrahim, R. A., 1995, Recent Results in Random Vibrations of Nonlinear Mechanical Systems, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 117, 222-233.

(6) 이원경, 조덕상, 1998, 광대역 불규칙가진력을 받는 탄성진자계의 내부공진효과, 한국소음진동공학회지, 제 8권, 제 3호, 게재예정.

(7) Ibrahim, R. A., Lee, B. H., and Afaneh, A. A., 1993, Structural Modal Multifurcation With Internal Resonance-Part 2: Stochastic Approach, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 115, 193-201.

(8) Lee, B. H. and Ibrahim, R. A., 1994, Stochastic Bifurcation in Non-linear Structural Systems near 1:1 Internal Resonance, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 9, 23-32.

(9) Yoon, Y. J. and Ibrahim, R. A., 1995, Parametric Random Excitation of Nonlinear Coupled Oscillators, Nonlinear Dynamics, Vol. 8, 385-413.

(10) Sun, J. Q., and Hsu, C. S., 1987, Cumulant-Neglect Closure Method for Nonlinear Systems under Random Excitations, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, 649-655.

(11) Dimenberg, M. F., 1982, An Exact Solution to a Certain Nonlinear Random Vibration Problem, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 17, 231-236.

(12) Lee, W. K. and Hsu, C. S., 1994, A Global Analysis of an Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance, Journal of Sound and Vibration, Vol. 171(3), 335-359.

(13) Lee, W. K., and Park, H. D., 1997, Chaotic Dynamics of a Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance, Nonlinear Dynamics, Vol. 14, 211-229.

(14) Soong, T. T., 1973, *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press Inc.

(15) Ibrahim, R. A., 1985, *Parametric Random Vibration*, John Wiley, NewYork.

(16) Lin, Y.,K., 1976, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, Robert E. Krieger Publishing Co.

(17) Shinozuka, M. and Deodatis, G., 1991, Simulation of Stochastic Processes by Spectral Representation, Applied Mechanics Review, Vol. 44, 191-204.

(18) Yang, C. Y., 1986, *Random Vibration of Strctures*, John Wiley & Son, Inc.