한국소음진동공학회 1998년도 춘계학술대회논문집, pp. 413~418.

1차원 구조물 결합부의 동적모델링

°강태호(인하대)*, 김주홍**(인하대), 이우식***(인하대), 박철희(인하대)***

Dynamic Modeling of One-Dimensional Structural Joints

° Taeho Kang*, Joohong Kim**, Usik Lee***, Chol-Hui Pak***

ABSTRACT

In this paper, a dynamic modeling approach is introduced to identify the dynamic characteristics of the structural/mechanical joints within an one-dimensional structure. A structural joint is represented by the four-pole parameters and the four-pole parameters are determined from the measured frequency response functions by using the spectral element method. As the illustrative examples, a cantilevered beam and a clamped-clamped beam, each consists of two beams connected by a bolted joint, are investigated to evaluate the present modeling approach. It is found that the dynamic responses predicted by using the identified four-pole parameters for the bolted joint are well agreed with the dynamic responses measured up to high frequency.

1. 서 론

일반적으로 복잡한 구조물은 여러 기계요소들로 이루어지며, 각 요소들은 볼트에 의한 체결, 리벳이음, 용접등에 의해 결합되어진다. 이러한 결합부들은 보, 봉과 같은 보편적인 요소들로 모델링되는 경우가 대부분이다. 이 때문에 기계적 결합부의 모델링은 구조물 전체에 많은 영향을 미치게 된다. 그러나, 대개의 경우 결합부는 형태, 재질등이 불분명하거나 규명하기 어렵기 때문에 유한요소법과 같은 이론적인 모델링기법을 적용하기가 쉽지 않다. 그러므로 기존의 구조물에 대한 모델링을 실험적 기법과 결합하여 기계적 결합부의 모델링을 개선하는 방법들을 많이 사용하고 있다. 그러나, 이러한 방법도 실험기법이 복잡하거나, 결합부의 모델링에 가정이 필요한 경우가 많다. 또한, 가장 많이 사용되는 유한요소법을 이용하는 모델링은 고주파수에서의 모델링과 해석이 거의 불가능하다. 따라서, 간단한 실험기법과 고주파수에서의 기계적 결합부에 대한 모델링기법의 개발이 필요하다.

Yuan과 Wu[1]는 유한요소법을 이용하여 구조물의 특성을 파악하는 방법을 제시하였다. 그러나 구조물의 수학적 모델을 구성하는 과정에서 먼저 계의 특성을 가정해야 하는 곤란한 점이 있다. Tsai와 Chou[2]는 구조물을 부분 구조로 나누고 부분 구조와 전체 구조의 주파수응답함수(Frequency Response Functions)를 사용하여 결합부의 파라미터를 동정하는 방법을 연구하였다. Lin과 Ewins[3]은 진동실험에서 얻어진 주파수응답함수를 직접 사용해서 유한요소모델을 개선하는 방법을 제시하였다. Nobari 등[4]은 역고유감도법(Inverse Eigen Sensitivity Method : IESM)[5]을 사용하여 유한요소모델의 결합부에 적용하여 모델개선을 통한 결합부의 동정을 시도하였다. 이 방법은 감쇠의 영향에 의한 복소수 형태의 고유해를 실수화 하는 과정에서 감쇠에 대한 정보가 없어지거나 실험시 측정모드가 서로 근접한 경우에 진동실험에서 얻어지는 데이터로부터 정확한 고유해를 추정하기 어렵다는 문제점이 있다. 이재운 등[6]은 별도의 실험을 수행하지 않고 결합부 영역에 대해 상세하게 유한요소 모델링을 하고 선택된 자유도에 대한 유연성 행렬(Flexibility

* 인하대학교 대학원 기계공학과
** 인하대학교 대학원 기계공학과 박사과정
*** 정회원 인하대학교 기계공학과 교수

Matrix)을 구하여 결합부의 특성을 구하는 일반적 모델링 기법을 제시하였으며 서상훈 등[7]은 실험에서 얻어진 주파수응답함수를 이용한 반복계산을 통해 유한요소모델의 개선과 결합부 파라미터에 대한 동정을 수행하였다. 그러나, 파라미터의 유일성(uniqueness)을 보장하기 위해 강성만을 고려하여 모델을 개선함으로써 파라미터에 대한 정확한 동정이 어렵다는 단점이 있다. 이러한 이론적 해석에 가장 많이 사용되는 유한요소법의 경우, 유한요소의 특성상 고주파수에서 신뢰성있는 결합부 파라미터의 동정이 어려우며. 또한 일반적인 기계요소인, 봉, 보, 평판이외의 모델에 대해서는 많은 계산량을 필요로 하는 경우가 대부분이다. 유한요소법과는 달리 고주파수영역에서도 구조물의 동특성을 엄밀하게 제공해주는 새로운 진동해석기법의 하나인 스펙트럴요소법(Spectral Element Method)[8~10]이 최근에 개발되었다. 스펙트럴요소법에서는 구조동력학방정식의 엄밀해인 탄성파동해를 주파수영역에서 중첩하여 엄밀한 동적응답을 유도하는 과정에서 고속푸리에변환(FFT)과 역고속푸리에변환(IFFT)을 효율적으로 활용함으로써 전산시간을 단축하는 장점도 갖고 있다.

따라서, 본 연구에서는 (1)스펙트럴 요소해석법에 적용할 수 있는 기계적 결합부의 모델링 기법을 개발하고 (2)주파수응답함수를 이용하여 결합부 파라미터를 동정하고 (3)결정된 파라미터를 사용하여 이론해석적으로 구한 진동특성을 진동실험결과 및 결합부가 없는 보의 이론해석결과와 비교하여 본 연구결과의 타당성을 검증하였다.

2. 4극 매개변수 방법(Four-pole parameters method)을 이용한 기계적 결합부의 동적 모델링

4극 매개변수(four-pole parameters)[11]법을 통한 기계적 결합부의 동적 모델링방법은 Fig. 1과 같이 구조물 양단에서의 mechanical impedance (F/v)를 측정함으로서 볼트 체결부위같은 이론적인 모델링이 어려운 부분을 모델링 하는 것으로 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

이와 같은 방법에 의하여 볼트체결된 보 구조물을 Fig. 2와 3에서 보여지는 등가질량과 강성이 직렬연결된 2자유도계의 lumped system으로 모델링할

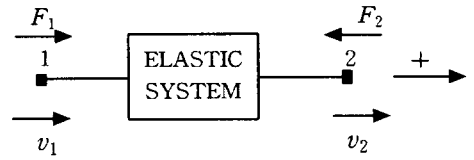

Fig. 1 Four-pole parameters representation of an elastic system

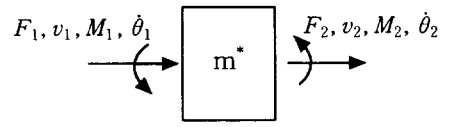

Fig. 2 Free body diagram of the lumped mass component

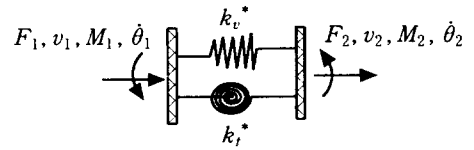

Fig. 3 Free body diagram of the linear spring components

수 있다. Fig. 2와 같이 등가질량 m^*에 대해서 표현하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \ , \ F_1 - F_2 = m^* \frac{dv_1}{dt} = m^* \frac{dv_2}{dt} \\ \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta}_2 \ , \ M_1 - M_2 = I^* \frac{d\dot{\theta}_1}{dt} = I^* \frac{d\dot{\theta}_2}{dt} \end{aligned} \tag{2}$$

모든 외력과 변위가 조화운동을 한다고 가정하면 각 노드점에서의 운동은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_1 &= \hat{F}_1 e^{i\omega t} \ , \ F_2 = \hat{F}_2 e^{i\omega t} \\ M_1 &= \hat{M}_1 e^{i\omega t} \ , \ M_2 = \hat{M}_2 e^{i\omega t} \\ \dot{\theta}_1 &= \hat{\theta}_1 e^{i\omega t} \ , \ \dot{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 e^{i\omega t} \\ v_1 &= \hat{v}_1 e^{i\omega t} \ , \ v_2 = \hat{v}_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{3}$$

변위성분을 나타내기 위해 식(3)에서 사용한 부호 ($\wedge$)는 편의상 앞으로 생략한다. 식 (3)을 이용하면 질량 m^*에 대하여 표현된 식(2)는 다음과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ v_1 \\ M_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m^* i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & I^* i\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ v_2 \\ M_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

또한 Fig. 3과 같이 강성 k_v^*, k_t^*에 대해 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} F_1 &= -F_2 \ , \ F_1 = k_v^* \left(\frac{v_1}{i\omega} - \frac{v_2}{i\omega} \right) \\ M_1 &= -M_2 \ , \ M_1 = k_t^* \left(\frac{\dot{\theta}_1}{i\omega} - \frac{\dot{\theta}_2}{i\omega} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

식(3)을 이용하여 강성부분을 표현한 식(5)은 다음과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ v_1 \\ M_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -i\omega/k_v^* & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega/k_t^* & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ v_2 \\ M_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서 볼트 결합된 부분을 직렬 연결된 질량과 강성으로 표현하기 위해 행렬식(4)와 (6)를 곱하여 결합부전체의 요소행렬을 구성한다. 이를 스펙트럴 요소행렬과의 결합을 위하여 볼트결합부 양끝 절점에서의 힘과 변위와의 관계에 대하여 재구성하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_v^* & 0 & -k_v^* & 0 \\ 0 & k_t & 0 & -k_t \\ -k_v & 0 & m^*\omega^2 + k_v^* & 0 \\ 0 & -k_t & 0 & I^*\omega^2 + k_t^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

(여기서, $u_1 = v_1 i\omega$, $u_2 = v_2 i\omega$)

식(7)은 4극 매개변수 방법에 의한 결합부의 동특성을 나타내는 결합부 요소행렬이며, 이 행렬은 스펙트럴 요소법에 의해 유도되는 결합부 주위 보의 요소행렬과 결합된다. 스펙트럴요소의 결합은 유한요소법에서 유한요소를 결합하는 방법과 동일하게 이루어진다[9]. 두 개의 스펙트럴요소로 구성된 보의 경우 두 요소를 결합한 전체계에 대한 스펙트럴요소방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\{F\} = [S]\{V\}$$

$$\text{여기서, } \{V\} = \{u_1\ \theta_1\ u_2\ \theta_2\ u_3\ \theta_3\}^T \quad (8)$$
$$\{F\} = \{F_1\ M_1\ F_2\ M_2\ F_3\ M_3\}^T$$

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 & s_{14}^1 & 0 & 0 \\ s_{21}^1 & s_{22}^1 & s_{23}^1 & s_{24}^1 & 0 & 0 \\ s_{31}^1 & s_{32}^1 & s_{33}^1 + s_{11}^2 & s_{34}^1 + s_{12}^2 & s_{13}^2 & s_{14}^2 \\ s_{41}^1 & s_{42}^1 & s_{43}^1 + s_{21}^2 & s_{44}^1 + s_{22}^2 & s_{23}^2 & s_{24}^2 \\ 0 & 0 & s_{31}^2 & s_{32}^2 & s_{33}^2 & s_{34}^2 \\ 0 & 0 & s_{41}^2 & s_{42}^2 & s_{43}^2 & s_{44}^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

윗 식에서 $[S]$는 전체계의 스펙트럴요소행렬이며 식(9)의 행렬에서 윗첨자는 스펙트럴요소를 나타내며 아래첨자는 해당 스펙트럴요소행렬의 요소성분을 나타낸다.

3. 결합부의 동정

3-1. 외팔보 형태

본 연구에서는 Fig. 4에 나타낸 결합부를 포함하고 있는 보를 대상으로 수행되었으며 이를 예제로 다루어 결합부의 동특성을 나타내는 파라미터의 결정과정을 설명한다. Fig. 4에서 보여지는 보는 가운데의 결합부 요소 [3]를 포함하는 4개의요소로 나눌 수 있다. 주파수영역에서 입력(가진력)대 출력(진동량)의 비를 나타내는 주파수응답함수(FRF)를 사용하여 진동시스템의 고유특성을 보다 용이하게 표현할 수 있는 장점 때문에, 가속도응답에 대한 주파수응답함수(FRF), 즉 이너턴스(inertance) $A(\omega)$를 사용한다. 즉,

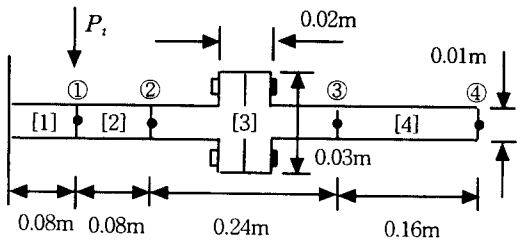

Fig. 4 Numerical example : a cantilevered beam with a bolted joint

$$A(\omega)_i = -\omega^2 \frac{v_i}{P} \quad (10)$$

식(10)으로부터 각가속도 이너턴스는 다음과 같이 정의한다.

$$A'(\omega)_i = -\omega^2 \frac{\theta_i}{P} \quad (11)$$

식(10)과 (11)에서 i는 노드점의 위치를 나타낸다.

요소 [1], [2], [4]에 대한 오일러 보의 스펙트럴 요소행렬[9]과 식(7)에서 보여진 요소 [3]에 대한 4극 매개변수 방법에 의한 결합부의 요소행렬을 결합하여 전체계에 대한 스펙트럴요소행렬 $[S]$를 구성한다. 노드점①에서의 가진력(P_i)로 구성된 외력벡터를 스펙트럴요소방정식에 대입한 후 실험을 통해 측정할 수 있는 측정자유도(A_1, A_2, A_3, A_4)와 정확한 측정이 어렵거나 불가능하여 실험을 통해 직접 측정하지 않을 미측정자유도(A_1', A_2', A_3', A_4')로 구분하여 스펙트럴요소방정식을 재구성하면 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \{A_1\ A_2\}^T & V_2 &= \{A_3\ A_4\}^T \\ V_3 &= \{A_1'\ A_2'\}^T & V_4 &= \{A_3'\ A_4'\}^T \\ F_1 &= \{0\ 0\}^T & F_2 &= \{0\ 0\}^T \\ F_3 &= \{1\ 0\}^T & F_4 &= \{0\ 0\}^T \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)에서 V_1과 V_2는 측정자유도벡터를 나타내고 V_3와 V_4는 미측정자유도벡터를 나타낸다. 미측정자유도 4개와 4개의 파라미터는 식(12)로부터 구할 수 있다. 먼저 식(12)의 1행과 2행을 전개하면 모델링된 결합부의 동특성을 나타내는 4개의 파라미터는 다음과 같다.

$$k_v^* = \frac{s_{31}^2 A_1 + s_{32}^2 A_1' + s_{33}^2 A_2 + s_{34}^2 A_2'}{A_3 - A_2}$$

$$k_t^* = \frac{s_{41}^2 A_1 + s_{42}^2 A_1' + s_{43}^2 A_2 + s_{44}^2 A_2'}{A_3' - A_2'}$$

$$m^* = \frac{k_v^*(A_2 - A_3) - s_{11}^4 A_3 + s_{12}^4 A_3' + s_{13}^4 A_4 + s_{14}^4 A_4'}{\omega^2 A_3} \quad (14)$$

$$I^* = \frac{k_t^*(A_2' - A_3') - s_{21}^4 A_3 + s_{22}^4 A_3' + s_{23}^4 A_4 + s_{24}^4 A_4'}{\omega^2 A_3'}$$

식(14)에서 4개의 파라미터가 스펙트럴요소성분 s_{ij}와 A_i와 A_i'의 함수로 표현됨을 알 수 있다. 식(12)의 3행으로부터 미측정자유도 V_3는 측정자유도 V_1의 함수로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} V_3 &= T_{33}^{-1} \cdot (F_3 - T_{31} V_1 - T_{32} V_2 - T_{34} V_4) \\ &= T_{33}^{-1} \cdot (F_3 - T_{31} V_1) \end{aligned} \quad (15)$$

또한 식(12)의 4행으로부터 나머지 미측정자유도 V_4는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_4 &= T_{44}^{-1} \cdot (F_4 - T_{41} V_1 - T_{42} V_2 - T_{43} V_3) \\ &= -T_{44}^{-1} \cdot T_{42} V_2 \end{aligned} \quad (16)$$

식(15)와 (16)으로부터 구한 미측정자유도를 식(14)에 대입하면 4개의 파라미터를 구할 수 있다. 이와같이 결정된 파라미터를 결합부의 동특성으로 이용하여 외팔보의 동적응답을 구할 수 있다.

3.2 양단고정보 형태

Fig. 5와 같이 결합부를 포함한 보의 양단고정보 형태는 보를 5개의 요소로 분할한다. 외팔보에서 다루었던 방법에 따라 측정하는 자유도(A_1, A_2, A_3, A_4)와 측정하지 않을 자유도(A_1', A_2', A_3', A_4')로 구분하여 전체계에 대한 스펙트럴요소방정식을 재구성한다. 이로부터 결합부의 동특성을나타내는 4개의 파라미터에 대한 식들을 얻을 수 있다. 외팔보에서와 같이 측정자유도를 이용하여 미측정자유도를 결정하면 4개의 파라미터를 구할 수 있다. 이를 결합부의 동특성으로 이용하여 양단고정보의 동적응답을 구할 수 있다.

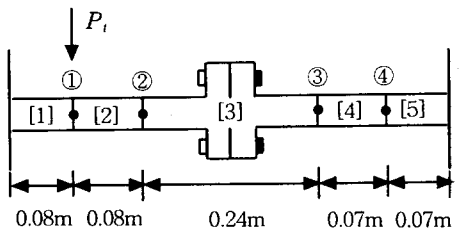

Fig. 5 Numerical example : a clamped-clamped beam with a bloted joint

4. 실험 및 결과

본 연구에서 수행한 실험구성은 Fig. 6에 나타내었다. 측정시편(Table1)의 한쪽끝을 바이스로 고정시킨 외팔보와 양단을 고정시킨 양단고정보의 진동실험을 수행하였다. 시편의 가진 점과 측정점을 진동모드의 노드점이 아닌 곳으로 정하였고, 충격망치로 시편을 가진하고 각 측정점에서의 진동량은 가속도계로 계측하여 신호분석기로 보내진다. 신호분석기의 Time Capture기능을 사용하여 특정 샘플링시간과, 샘플링갯수 조건하에서 해석에 필요한 가진력과 가속도의 시간응답을 얻었다[12]. 이렇게 얻어진 시간영역의 실험데이터는 Matlab의 FFT함수를 이용하여 주파수영역으로 변환시킨다. 주파수영역으로 변환된 실험데이터를 이용하여 미측정자유도를 구한다. 이렇게 구한 가속도이너턴스(A_i)와 각가속도이너턴스(A_i')를 볼트결합부의 동특성을 나타내는 파라미터의 관계식에 대입하여 주파수의 함수로 결정하였다.

Fig. 7, 8, 9는 각각 외팔보와 양단고정보의 경계조건하에서 진동실험에 의해 구해진 실험 FRF를 이용하여 구한 볼트체결부의 각 파라미터, 즉 Vertical, Torsional 스프링 상수와 등기 질량, 등가관성모우멘트를 나타낸다. Fig. 10과 11은 각각 외팔보와 양단고정보에 대해서 (1)진동실험으로부터 구한 실험 FRF, (2)실험 FRF로부터 결정된 결합부파라미터를 이용하여 이론적으로 구한 이론 FRF, (3)결합부가 없는 보에 대한 이론적으로 구한 이론 FRF를 나타낸다. 일반적으로 실험FRF와 4극 매개변수 방법에 의한 결합부 모델링에 근거한 이론FRF가 잘 일치하고 있음을 알 수 있으나 결합부가 없는 보에 대한 이론FRF는 고주파영역으로 갈수록 다른 두 경우와 비교하여 점차 큰 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. Fig. 12와 13에서와 같이 실험으로 구한 동적응답과 결정된 파라미터를 결합부의 동특성으로 이용하여 구한 각 경계조건에서의 동적응답이 일치함을 알수 있다.

Table 1 Material properties of the beams considered in this paper

Young's modulus (E)	72 GPa
Structural damping (η)	0.001
Density (ρ)	2.8×10^3 Kg/m^3

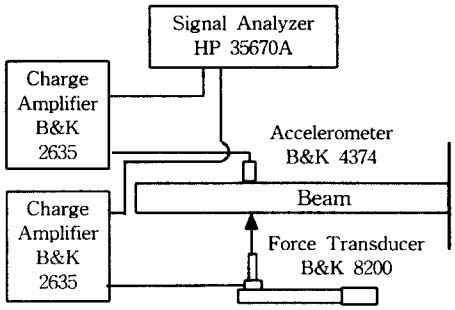

Fig. 6 Schematic of the experimental setup

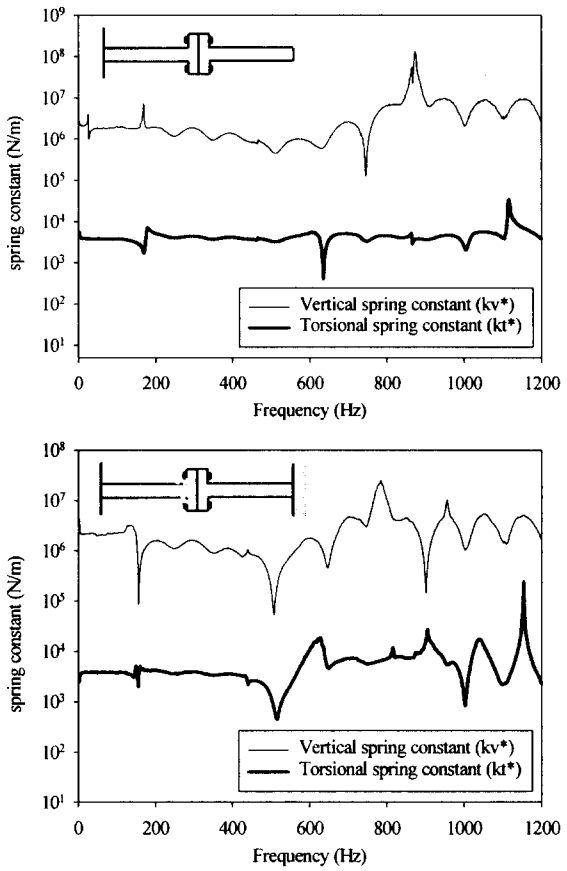

Fig. 7 Measured equivalent vertical and torsional spring constants for the cantilevered and clamped-clamped beams

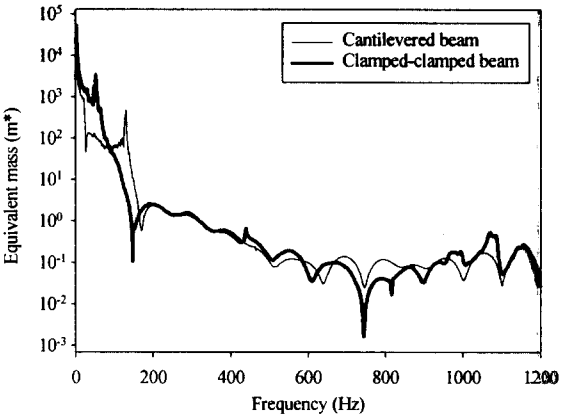

Fig. 8 Measured equivalent masses for the cantilevered and clamped-clamped beams

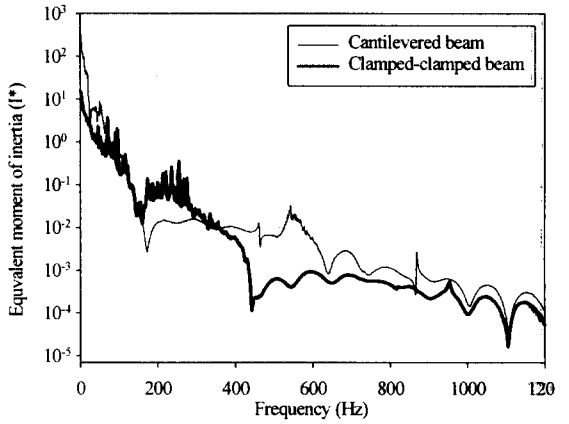

Fig. 9 Measured equivalent moments of inertia for the cantilevered and clamped-clamped beams

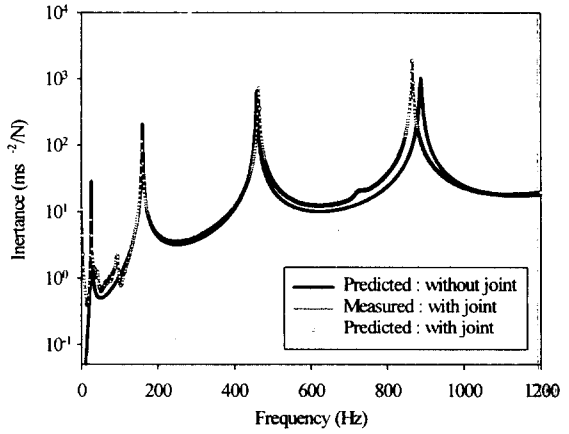

Fig. 10 Comparision of the frequency response functions for a cantileved beam

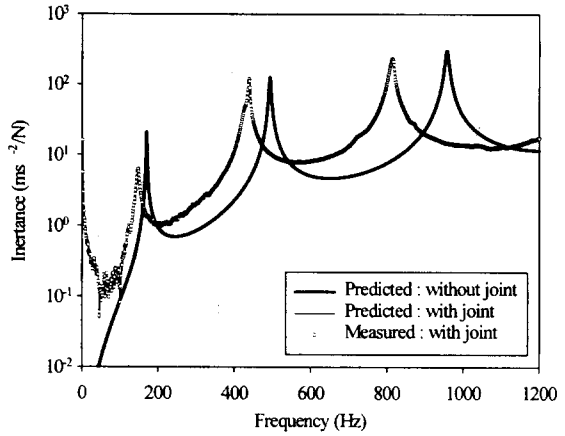

Fig. 11 Comparision of the frequency response functions for a clamped-clamped beam

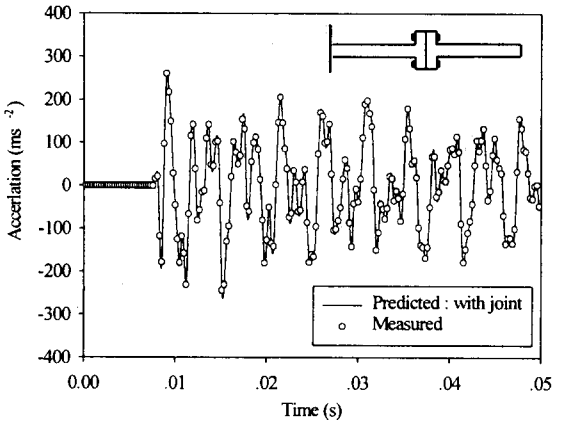

Fig. 12 Comparision of the dynamic responses for a cantilevered beam with a joint

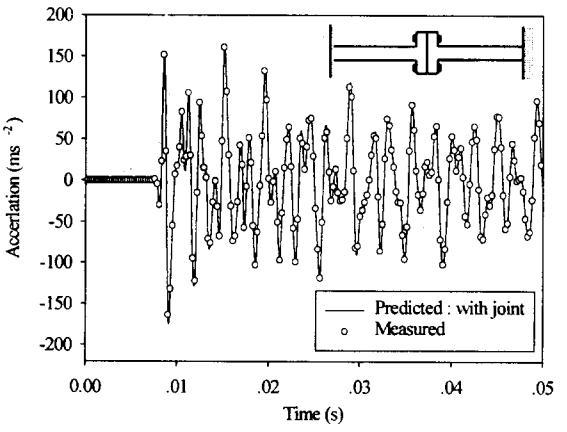

Fig. 13 Comparision of the dynamic responses for a clamped-clamped beam with a joint

5. 참고문헌

(1) Yuan, J. X. and Wu, X. M., 1985, "Identification of Joint Structural Parameters of Machine Tool by DDS and FEM," *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 107, pp. 64~69.

(2) Tsai, J. S. and Chou, Y. F., 1988, "The Identification of Dynamic Characterisics of a Single Bolt Joint," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 125, pp. 487~502.

(3) Lin, R. M. and Ewins, D. J., 1990, "Model Updating Using FRF Data," *International Seminar in Modal Analysis 15*, pp. 141~163.

(4) Nobari, A. S., Robb, D. A. and Ewins, D. J., 1993, "Model Updating and Joint Identification Methods, Restrictions and Overlap," *International Journal of FEM and Experimental Modal Analysis*, pp. 95~103.

(5) Zhang, Q., Lallement, G., Fillod, R., and Piranda, J., 1987, "A Complete Procedure for the Adjustment of a Mathematical Model from Identified Complex Modes," *Proceedings of IMAC 5*, pp. 1183~1190.

(6) 이재운, 고강호, 이수일, 이장무, 1994, "결합부가 있는 복합 구조물의 동적 해석," *한국소음진동공학회 '94 추계학술대회논문집*, pp. 238~243.

(7) 서상훈, 지태한, 박영필, 1997, "주파수응답함수를 이용한 유한요소모델의 개선 및 결합부 동정," *한국소음진동공학회지*, 제7권, 제1호, pp. 61~69.

(8) Doyle, J. F., 1988, "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analsis*, Vol. 3, No. 1, pp. 1~5.

(9) 이준근, 이우식, 박철희, 1996, "스펙트럴요소를 이용한 곡선보 구조물의 동적거동 해석," *한국소음진동공학회지*, 제6권, 제1호, pp. 83~88.

(10) 이준근, 이우식, 1998, "스펙트럴요소법을 이용한 동적집중하중을 받는 평판의 진동해석," *대한기계학회논문집 A권*, 제22권, 제3호, pp. 635~643.

(11) Clark, S. K., 1972, *Dynamics of Continuous Elements*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs.

(12) Ewins, D. J., 1986, *Modal Testing : Theory and Practice*, Research Studies Press, London.