

혼합모델링을 위한 유한 요소 모델의 자유도 축소와 보상

°이창호*, 이시복**, 이인갑***

Model reduction and compensation of FE model for Hybrid modelling

Chang-ho Lee, Shi-bok Lee and In-gap Lee

ABSTRACT

This paper presents a method of enhancing the accuracy of hybrid modelling that predicts dynamic characteristics of the coupled structure by synthesizing after FE analysis and vibration experimental analysis of the relevant individual substructure. Since most FE models in engineering problems are very large, dynamic analysis with the full FE model is costly. Frequency response function(FRF) synthesis after reducing the FE model can reduce this computational cost but introduce mode truncation error similarly in the case of considering only low-frequency mode after eigensolutions of the complete structure. This paper introduces a FRF of FE model for hybrid FRF synthesis, which is reduced by using IIRS methods and compensated through eigensolutions of the reduced model, and shows the effectiveness of the presented method.

1. 서론

기계구조의 동특성해석에 유한요소법이 널리 사용되고 있다. 그러나 동적문제에 있어서 형상이나 거동이 복잡한 구조물의 경우, 또는 차량의 차체와 같이 많은 장착물이 부착된 경우에는 유한요소법의 적용이 곤란하여, 비교적 용이하게 적용할 수 있는 진동실험을 기초로 한, 구조물의 동적 응답해석 및 설계방안이 개발되었다. 그리고 복잡한 기계시스템 혹은 구조물에서 각각 유한요소해석과 진동실험해석의 유용한 부분을 분리하여 해석한 다음, 전달함수합성하여 전체 구조물의 동특성을 예측하는 혼합모델링(Hybrid modelling) 방법이 제시되었다.

전달함수합성법은 일반적으로 모드 밀도가 높고, 부분구조물에 대한 모드해석이 비실용적인 높은 주파수 영역에 적용될 수 있는 이점이 있으며, 만약 부분구조물의 전달함수가 실험데이터라면 이들 생략된 고차모드들의 효과는 측정된 전달함수에 모두 포함된다. 그러나, 만약 부분구조물의 전달함수가 유한요소(FE)해석 데이터라면 제한된 수의 저차모드만이 계산되기 때문에 정확성이 떨어진다. 모드의 수를 증가시키면 정확성이 향상되지만, 많은 공학구조물에서는 유한요소모델이 너무 커서 이러한 접근은 비실용적이다. 유한요소해석에 의해 모델링한 부분구조물의 전달함수를 향상시키기 위해 몇 개의 주파수에서 직접계산에 근거한 정적, 동적보상이 제시되어왔다. 그러나, 이 방법은 전체 유한요소모델을 고유치해석해야 하므로 계산 면에서 효율적이지 못하다.

본 논문은 전체 유한요소모델의 고유치를 해석하지 않고, IIRS(Iterated Improved Reduced System)방법을 통해 유한요소모델을 자유도 축소

* 대우중공업

** 부산대학교 기계공학부(정회원)

*** 부산대학교 대학원

한 후, 모드생략으로 인한 오차를 축약된 고유치와 고유모드만으로 정적, 동적보상하는 방법을 제시하고, 이를 혼합모델링을 위한 전달함수합성법에 적용하여 효율성을 보이고자한다.

2. 혼합모델 전달함수합성

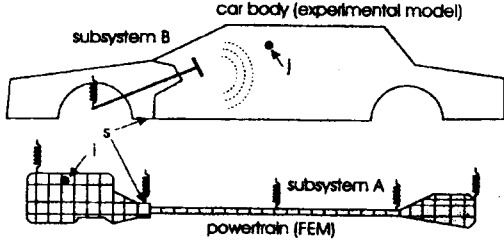


Fig.1 Hybrid modelling using experimental and numerical FRFs

Fig. 1의 마운트 구조물에서 분리된 각각의 부분구조의 j 점 가진에 대한 i 점의 전달함수로부터 n 개의 마운트로 결합된 결합후의 j 점 가진에 대한 i 점의 전달 함수를 추정하는 전달함수합성이론의 결과식은 다음과 같다.

- 부분구조A에 가진점 j 와 응답점 i 가 모두 있을 때

$$H_{cv} = H_{sv} - [H_{sj}]_v ([H_{sj}]_s + [H_{sj}]_s + [D_i]^{-1})^{-1} \{H_{sj}\}_s \quad (1)$$

- 부분구조B에 가진점 j 와 응답점 i 가 모두 있을 때

$$H_{cv} = H_{sv} - [H_{sj}]_v ([H_{sj}]_s + [H_{sj}]_s + [D_i]^{-1})^{-1} \{H_{sj}\}_s \quad (2)$$

- 부분구조 B에 가진점 j 와 부분구조 A에 응답점 i 가 있을 때

$$H_{cv} = [H_{sj}]_v ([H_{sj}]_s + [H_{sj}]_s + [D_i]^{-1})^{-1} \{H_{sj}\}_s \quad (3)$$

- 부분구조A에 가진점 j 와 부분구조 B에 응답점 i 가 있을 때

$$H_{cv} = [H_{sj}]_v ([H_{sj}]_s + [H_{sj}]_s + [D_i]^{-1})^{-1} \{H_{sj}\}_s \quad (4)$$

3. 해석모델의 모드축약

구조물의 축약된 FRF, $[H_k(\omega)]$ 는 모드 매개변수의 함수로서 다음식으로 표현되어 진다.

$$[H_k(\omega)] = [H_k(\omega)] + [H_k(\omega)] \\ = [\Phi_k] [\Lambda_k^{-1} - \omega^2]^{-1} [\Phi_k]^T + [\Phi_k] [\Lambda_k^{-1} - \omega^2]^{-1} [\Phi_k]^T \quad (5)$$

$[\Phi_k]$ 여기서, $[H_k(\omega)]$, $[\Phi_k]$, $[\Lambda_k^2]$ 그리고 $[H_k(\omega)]$, $[\Lambda_k^2]$ 은 각각 채용한 저차모드와 생략된 고차모드의 고유치, 고유벡터 행렬이다. 만약 생략된 고

차모드가 완전히 무시된다면 단지 채용한 저차모드의 기여만을 고려한 다음과 같이 생략된 FRF만 남는다.

$$[H_k(\omega)] = [\Phi_k] [\Lambda_k^{-1} - \omega^2]^{-1} [\Phi_k]^T \quad (6)$$

4. 해석모델의 자유도축약

4.1 모델축약

IRS(Improved Reduced System)방법에 의한 축약변환 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = T_{IRS} \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서,

$$T_{IRS} = T_s + SMT_s M_R^{-1} K_R \quad (8)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_m^{-1} \end{bmatrix}$$

이다.

IRS방법에 의해 축약된 질량, 강성 행렬은 다음과 같다.

$$K_{IRS} = T_{IRS}^T K T_{IRS} \\ M_{IRS} = T_{IRS}^T M T_{IRS} \quad (9)$$

IRS 축약 변환행렬은 정축약으로부터 얻어진 축약 질량, 강성행렬에 의존한다. 변환행렬이 계산되면, 축약된 행렬의 향상된 값은 계산된 변환행렬에 의해 구해진다. 좀 더 정확한 변환행렬을 얻기 위해 변환식에 이러한 향상된 값을 이용할 수 있다. Friswell^[4]은 정확한 변환행렬을 얻기 위해 반복 IRS(IIRS) 알고리즘을 제시하였다. 연속적인 반복을 통해 구한 정확한 변환행렬식은 다음과 같다.

$$T_{IRS(i+1)} = T_s + SMT_{IRS} M_{IRS}^{-1} K_{IRS} \quad (10)$$

여기서, 하첨자 i 는 반복회수를 나타낸다.

매 반복마다 축약모델은 향상된다. 반복 IRS방법은 정축약 모델로부터 SEREP 모델^[5]로 점진적으로 수렴하고, 수렴속도는 주좌표의 선택에 의존된다. 반복 구조가 수렴될 때 축약 모델이 전체 구조물의 저차 고유치와 고유벡터를 재구성한다.

4.2 주좌표 선택

정축약에서 종속좌표에서의 관성력은 탄성력에 비해 무시될 수 있다고 가정하였다. 따라서 종속좌표는 관성이 적고 강성이 큰 곳을, 주좌표는 관성

이 크고 강성이 낮은 곳이 선택되어야한다. 이러한 절차는 질량, 강성 행렬의 대각항 비에 의해 나타내어질 수 있으며, 이 때 종속좌표는 한번에 모두 선택되지 않고 한번에 하나씩 선택되고 제거된다. 이러한 절차는 각 단계에서 각 좌표의 제거된 효과가 모든 남아있는 좌표에 재분배되고 다음 축약에서 축약된 질량, 강성 행렬의 대각항의 비가 가장 큰 좌표가 제거되는 단순한 알고리즘을 가진다.

4.3 축약모델 오차보상

본 논문에서는 IIRS방법의 고주파수 축약으로 인한 절단오차(truncation error)를 보상하기 위해 생략된 고유모드와 전체 구조물의 질량, 강성행렬을 이용하여 전체를 고유값 해석하지 않고 보상하는 방법을 제시한다. IIRS 축약변환행렬을 이용하여 계산된 축약 고유모드로부터 전체 고유모드를 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{bmatrix} \phi_n \\ \phi_r \end{bmatrix} = T_{ms} [\phi_s] \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{bmatrix} \phi_n \\ \phi_r \end{bmatrix} \equiv [\phi] \quad (12)$$

로 정의한다.

축약모델을 보상하기 위해 아래의 방법을 도입한다. 구조물에서 축정된 완전한 FRF 는 아래식과 같이 저주파수 잉여항 부분, 해석되는(축정되는) 영역 즉 관심주파수영역 그리고 고주파수 잉여항 부분으로 나눈다.

$$H_v(\omega) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\phi_r \phi_r^T}{\lambda_r^2 - \omega^2} + \sum_{r=n}^N \frac{\phi_r \phi_r^T}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (13)$$

일반적으로 축정이 0 Hz에서 시작되기 때문에 실제적으로 나타나는 중요한 문제는 고주파수 항이다. 따라서 식의 첫째, 둘째항은 알고 있다고(축정된다고) 가정하면 다음식과 같다.

$$H_v^*(\omega) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\phi_r \phi_r^T}{\lambda_r^2 - \omega^2} + \sum_{r=n}^N \frac{\phi_r \phi_r^T}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (14)$$

고주파수 잉여항은 다음과 같다.

$$R_v(\omega) = \sum_{r=n}^N \frac{\phi_r \phi_r^T}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (15)$$

이것은 축정 주파수영역 밖의 모든 모드의 합이다.

단지 해석적인 구조물에 대해서는 고주파수 잉여항을 계산하기위해서 전체구조물의 동적해석을 수행하는 것이 가능하다. 또한, 축정 FRF가 이용될 때(고주파수 모드는 포함되지않는다.) 식(16)과

같다.

$$R_v(\omega) = H_v^*(\omega) - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\phi_r \phi_r^T}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (16)$$

축정 FRF는 실험 FRF를 이용하지않을 때, 물리 매개변수 행렬(질량,감쇠,강성 행렬)로부터 얻어진다.

식(16)은 식(17)과 같이 표현된다.

$$[R(\omega)] = ([K] - \omega^2[M] + i[D])^{-1} - ([\phi]^T \lambda_r^2 - \omega^2)^{-1} [\phi]^T \quad (17)$$

몇몇 연구자들은 관심주파수 영역밖의 모드를 정적 보상하기 위해서 고주파수 잉여항을 가정함으로써 식(17)을 단순화했다. 일반적으로 감쇠가 고려되지 않을 때 식 (17)은 정적 잉여항으로써 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$[R_s] = [K]^{-1} - [\phi]^T \lambda_r^2^{-1} [\phi] \quad (18)$$

위 식의 주요 문제점은 구조물이 강제 모드를 가질 때 질량 행렬이 비정칙행렬이 되기 때문에, 0 Hz 근처의 주파수에서 계산되어야한다.

정적 잉여보상은 관심 주파수 영역밖의 고유 진동수가 관심영역내의 마지막 주파수보다 더 높은 경우에 유효하다. 모드 밀도가 높을 때 관성효과가 무시될 수 있다는 가정은 더 이상 유효하지 않다. 그러한 경우에 잉여항은 동적 보상을 하여 계산된다. 식(13)에서 각각의 FRF에 대한 잉여항의 보상은 계산에서 사용된 모드에만 의존한다. 이것은 모드가 지역 매개변수이고 반면에 고유 진동수와 감쇠비는 전역 매개변수이기 때문이다. 이러한 점에 근거하여 고주파수 잉여항의 보상을 모든 매개변수를 이용하여 수행하는 대신 지역 매개변수만을 사용한다.

잉여항을 다시쓰면 식(19)와 같다.

$$R_v(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r \phi_r^T}{\lambda_r^2 - \omega^2} - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\phi_r \phi_r^T}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad (19)$$

식(19)를 지역 매개변수만으로 가정하여 정의하면 식(20)과 같다.

$$R_v^* = \sum_{r=1}^N \phi_r \phi_r^T - \sum_{r=1}^{n-1} \phi_r \phi_r^T \quad (20)$$

행렬형태로 표기하면 식(21)과 같다.

$$[R^*] = [\phi][\phi]^T - [\phi]^T \lambda_r^2^{-1} [\phi] \quad (21)$$

여기서, 상첨자 M 은 변경된 잉여항을 나타내기 위해 사용된다. 사용되는 모드는 질량 정규화된 모드이다.

$$[\phi]^T [M][\phi] = [I] \quad (22)$$

식(22)는 식(23)과 같이 표현된다.

$$[M]^T = [\phi][\phi]^T \quad (23)$$

식(23)을 식(21)에 대입하면 다음과 같다.

$$[R^*] = [M]^T - [\phi][\phi]^T \quad (24)$$

식(21)을 식(24)와 비교해보면 잉여 행렬이 강성행렬에 관계되는 대신에 질량행렬에 관계된다. 이것은 고주파수 잉여항이 관심주파수영역내에서 강성과 같은 효과를 가진다는 개념에 위배된다. 그래서, 수정된 새로운 고주파수 잉여항을 도입하기 위해 전역매개변수가 포함되어야만 한다. 따라서, 고주파수 의사 질량 고유치를 전역매개변수로 도입하여 다음식으로 표현한다.

$$[R^*(\omega)] = \frac{1}{\lambda_{HF}^2 - \omega^2} [R^*] \quad (25)$$

여기서, λ_{HF} 는 고주파수 의사 질량 고유치이다.

λ_{HF} 는 관심주파수영역내의 마지막 주파수보다 1.5배에서 2배정도의 값을 택한다.

5. 수치실험 및 고찰

5.1 수치실험

본장에서는 수치실험을 통해 혼합 모델링에 있어 유한요소모델의 모드 생략에 대한 기존의 방법과 제안하는 방법을 비교해서 제안하는 방법의 효율성을 보이려 한다. Fig. 3 은 두 평판구조물이 스프링에 의해 결합되어 합성된 구조물이다. 구조물 A.는 실험모델, 구조물 B.는 유한요소모델로 가정하여 모델링한다. 그리고 결합점은 구조물 A.의 5번점, 6번점, 20번점과 구조물 B.의 10번점, 11번점, 29번점이 스프링에 의해 연결된다. 스프링값은 $60000 N/m$ 이다.

Table. 1 Properties of structure

	구조물 A.	구조물 B.
재료	알루미늄	알루미늄
밀도	2710 Kg/m ³	2710 Kg/m ³
종탄성계수	70 GPa	70 GPa
프와송비	0.33	0.33

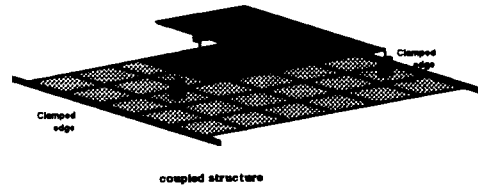
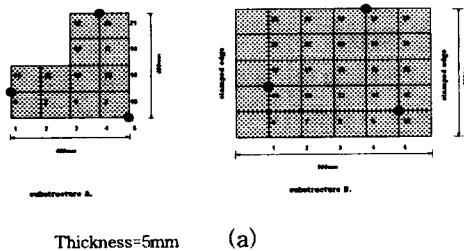


Fig. 3 Schematic of substructure A, B and coupled structure

수치실험은 다음과 같이 수행하였다. 첫째로, 구조물 B.의 유한요소해석에서 기존의 방법인 전체 고유치를 해석한 다음 원하는 저차모드를 채용하는 방법과 이를 통해 생기는 절단오차를 보상해주는 방법을 보였으며, 이를 구조물 A.와 전달함수합성하여 연성된 구조물의 생략된 고차모드의 영향을 보였다. 둘째로, 구조물 B.에서 자유도 선택에 따른 모델축약의 정확성과 제안하는 방법인 정확한 모델축약을 통해 전체를 고유치 해석하지 않고 절단오차를 보상해주는 방법을 보였으며, 이를 구조물 A.와 전달함수합성하여 그 결과를 기존의 방법과 비교하여 효율성을 보였다.

5.2 결과 및 고찰

Fig. 4 는 구조물B.의 10번째 응답, 29번째 가진의 직접계산한 경우, 고유치 해석을 통해 저차의 5개 모드만을 채용한 경우 그리고, 생략된 고차모드를 고려한 경우 (정적보상 : $n=0$, 동적보상 : $n=1$)에 대한 전달함수와 직접계산된 전달함수(FRF)와의 오차를 나타낸다. 주파수 영역 $0 \sim 300Hz$ 에서 정적보상 혹은 1차보상 ($n=0$)을 해준 경우 오차는 효과적으로 감소하나 높은 주파수로 갈수록 오차는 증가하는 것을 볼 수 있다. 동적보상 (2차보상, $n=1$)은 오차가 더욱더 감소함을 볼 수 있다. Table. 2 의 주파수를 만족함으로써 오차는 그 주파수에서 영으로 감소되는 것을 볼 수 있다. 관심주파수영역($0 \sim 300 Hz$)의 주파수를 많이 선택할수록 오차는 더욱더 감소하는 것을 예상할 수 있다.

Table. 2 Frequency points used for compensation

	f_1	f_2
static (1st order)	0 Hz	.
dynamic (2nd order)	0 Hz	290 Hz

여기서, 유한요소모델에서 생략된 모드로 생기는 오차가 전달함수합성할 때 전파되어 큰오차를 유발할 수 있으므로 보상이 따라야한다. 그러나 이 방법은 전체를 고유치해석해야하는 단점이있다. 따라서 유한요소모델을 축약한다음 축약 오차를 보상해주는 방법을 제시한다. Fig. 5는 구조물 B.를 자유도축약하기 위해 남겨질 자유도를 표시한 것이다. Fig. 5는 8, 10, 11, 18, 29번점의 z방향의 자유도 그리고, 10, 11, 28, 29, 30번점의 z방향의 자유도를 선택하였다. Fig. 6은 구조물 B.의 고유진동수대한 축약모델의 고유진동수를 나타낸다. 여기서, Guyan방법이 자유도 선택에 아주 민감한 것을 볼 수 있으며, IRS방법이 Guyan방법보다 향상된 것을 볼 수 있지만 고차로 갈수록 오차가 커짐을 알 수 있다. 여기서, 관성효과가 큰부분을 주좌표로 선택하는 것이 좋은 결과를 보이는 것을 알 수 있다. 반복된 IRS(IIRS)는 자유도 선택에 관계없이 정확하게 고유치를 예측하는 것을 볼 수 있다. 하지만 Fig. 7에서보면 자유도 선택에 따라 수렴속도가 달라짐을 볼 수 있다. 구조물 B.의 전체 고유모드 Φ 와 축약모델의 고유모드 Φ' 를 비교하기위해 식(26)을 도입하며, 이를 변위 기여 인자 (Displacement Participation Factors: DPF)라고 정의한다.

$$DPF = \Phi^T M \Phi'$$

$$\text{여기서, } \Phi' = \begin{Bmatrix} \Phi_m \\ \Phi_s \end{Bmatrix} = T \Phi_m \quad (26)$$

이고, T 는 변환행렬이다.

식(26)은 실험모드와 유한요소모드의 직교성을 검사하는것과 유사하다. Fig. 8에서보면 바람직한 주좌표선택에서 고유모드가 더 정확한 것을 볼 수 있으며, IIRS방법에서 20번 반복했을 경우 전체구조물의 저차모드에 수렴함을 볼 수 있다. Guyan, IRS방법은 직접계산에 의한 전달함수와 상당한 차이가 있고, IIRS방법에서는 축약된 효과를 보상해주어야함을 알 수 있다. Fig. 9는 IIRS방법에 의해 자유도축약된 모델을 정적, 동적보상해 줌으로서 직접계산에 의한 전달함수와 거의 일치하는 것을 볼 수 있다. 여기서, 고주파수 의사 질량 고유치 λ_{HF} 를 550 Hz 로 선정하였다.

최종적으로 구조물 A.와 구조물 B.의 전달함수를 이용한 혼합 모델링을 하여 전체를 직접계산에 의해 구한 전달함수와 비교한다. Fig. 10은 구조물 B.를 Guyan, IRS방법에 의해 축약한 다음 전달함

수합성한 결과로서, 합성에의해서 차이가 크게 나타남을 볼 수 있으며, 제안하는방법과 직접계산에 의한 방법을 비교한 결과 축약한 다음 보상해주는 방법이 계산면에서 효율적이며, 정확성 또한 기존의 방법과 차이가 없음을 알 수 있다.

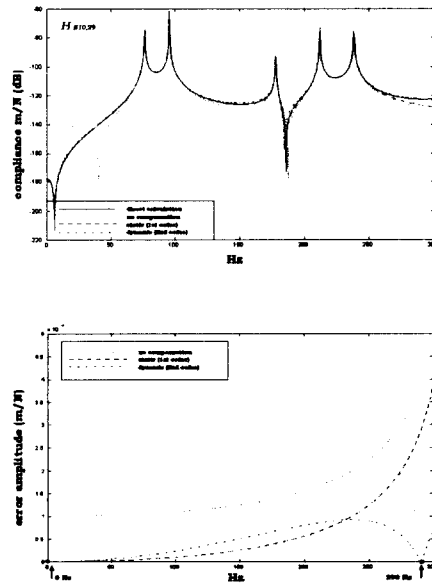


Fig. 4 FRF using modal superposition & error between modal superposition and direct FRF calculation

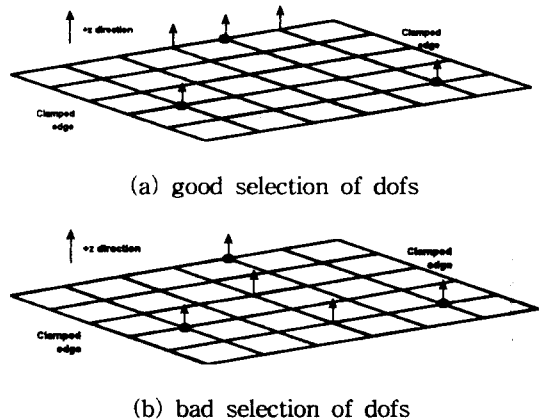
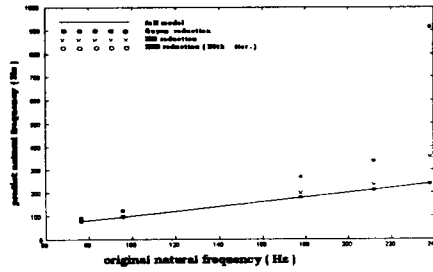
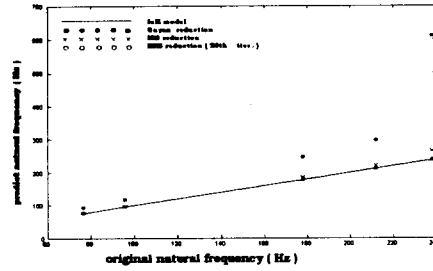


Fig. 5 Five master coordinate locations selected by reduction

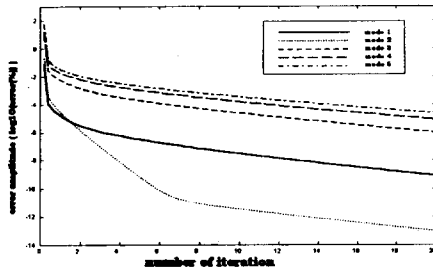


(a) node 8, 10, 11, 18, 29 (z+)

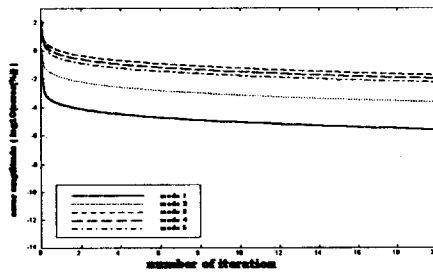


(b) node 10, 11, 28, 29, 30 (z+)

Fig.6 Comparison of predicted and original natural frequencies

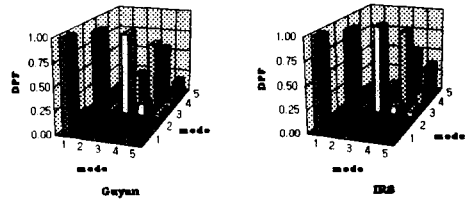


(a) good selection of dofs

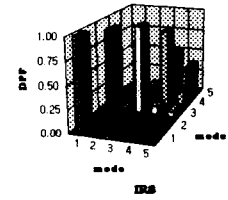


(b) bad selection of dofs

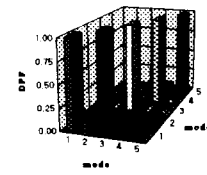
Fig. 7 Convergence of natural frequencies using IIRS method



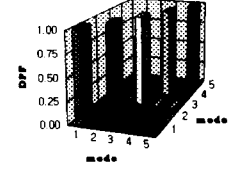
Guyan



IRS

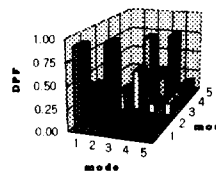


IRS (10th iteration)

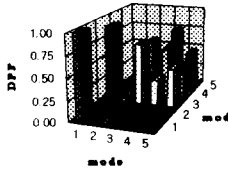


IRS (20th iteration)

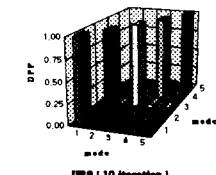
(a) good selection of DOFs



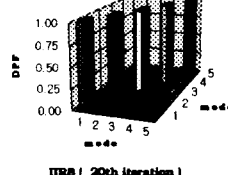
Guyan



IRS



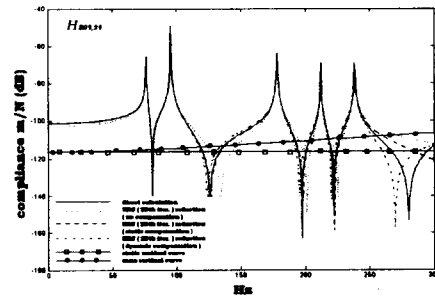
IRS (10 iteration)



IRS (20th iteration)

(b) bad selection of DOFs

Fig. 8 Displacement participation factor



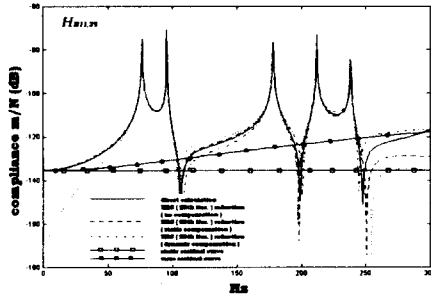


Fig 9. FRFs of compensated reduction model

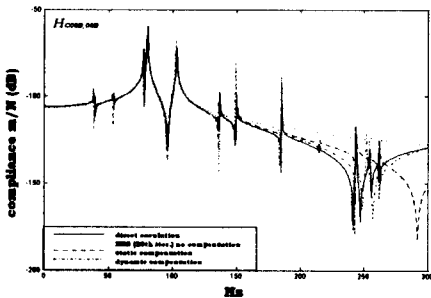
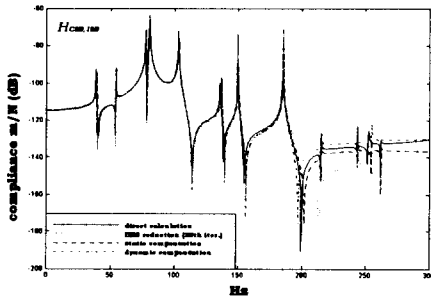
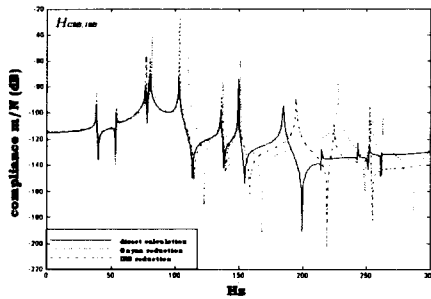


Fig. 10 FRFs of coupled structure

6. 결론

본 논문에서는 혼합 모델링에서 유한요소모델의 모델 축약오차를 효과적으로 보상하는 방법을 제안하고, 기존의 방법인 유한요소모델의 모드중첩과 축약된 고차모드를 보상해 주는 방법과 비교하여 다음의 결론을 얻었다.

1) 유한요소모델에서 모델축약을 통한 축약된 고차모드를 보상해 주는 방법을 제시하였다.

2) 제안된 방법의 정확성이 모델 전체를 고유치 해석한후 모드중첩과 축약된 고차모드를 보상해 주는 기존의 방법과 비교되는 수준이다.

3) 계산의 효율성면에서 기존의 방법과 제안하는 방법을 비교해볼 때 제안하는 방법이 우수함을 알 수 있었다.

참고문헌

- [1]. Macneal, R. H. "Hybrid Method of Component Mode Synthesis", Computers and Structures, Dec. 1971, vol. 1, pp. 581-601
- [2]. Maria Lúcia M. Duarte and David J. Ewins, "Improved Experimental Component Mode Synthesis(IECMS) with Residual Compensation Based Purely on Experimental Results", IMAC, 1996, pp. 641-647
- [3]. Maria Lúcia M. Duarte and David J. Ewins, "Mass-Residual Approach for The Compensation of High-frequency Residual Terms", IMAC, 1997, pp. 2038-2043
- [4]. M. I. Friswell, S. D. Garvey and J. E. T. Penny, "Using Iterated IRS Model Reduction Techniques to Calculate Eigensolutions", IMAC, 1997, pp. 1537-1543
- [5]. J. C. O'Callahan, P. Avitabile and R. Riemer, "System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)", IMAC, 1989, pp. 29-37