

1. 서론

하천에서 물의 흐름을 해석하기 위한 이론은 연속방정식과 운동량방정식에 근거하며, 운동량방정식의 적용 정도에 따라 완전동역학과 (full dynamic wave) 이론, 비관성 (non-inertia) 이론, 그리고 운동파 (kinematic wave) 이론으로 구분된다. 이 중, 운동파 이론은 운동량방정식에서 관성력과 압력에 의한 항을 제외한 하상의 경사와 마찰에 의한 항만을 고려하므로 지배방정식이 간단하며 수치해석시 상류단의 경계조건만으로 해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 운동파방정식에 대한 수치해석 기법으로는 특성곡선법, 유한차분법, 유한요소법 등이 있다. 유한차분법으로 수치해석하는 방법에는 양해법 또는 음해법을 이용할 수 있다. 양해법의 경우 해석 방법 및 절차가 비교적 간단하고 컴퓨터의 용량이 작아도 된다는 장점이 있으나, 시간과 공간의 차분길이에 따른 안정성문제를 야기시켜 실제 적용에는 한계가 있다. 즉, 매우 짧은 시간과 공간의 차분길이를 취함으로써 전체 계산시간이 길어지게 되고 많은 단면자료로 인한 계산량의 증가로 경제적이지 못하다. 음해법은 대부분의 경우 무조건 안정하므로, 차분방정식의 풀이에 있어 해의 안정성에 큰 이점이 있다. 따라서 시간에 대한 차분의 길이가 길어지더라도 적용이 가능하다. 그러나, 시간에 대한 차분의 길이가 지나치게 길어지면 유한차분방정식의 풀이에 있어 절단오차의 영향이 커져서 해의 정도에 영향을 미치므로 적용하는데 주의가 필요하다 (Hoffmann과 Chiang, 1993). 유한요소법은 불규칙한 경계에서 계산결과가 튀어나지만, 일차원문제에 이 방법을 적용하면 이러한 장점을 충분히 이용할 수 없다. 특성곡선법은 급변류의 경우와 인공하천 단면과 같은 간단한 형태의 단면에 대해서 해의 정도는 뛰어나지만, 수치처리 과정에서 속이 발생하는 경우가 있어 그 적용성에 한계가 있다.

본 연구는 특성곡선법으로 운동파를 수치해석할 때 발생하는 속의 생성 메커니즘을 분석하고, Borah 등 (1980)이 제안한 Propagating Shock Fitting (PSF) 방법과 Approximate Shock Fitting (ASF) 방법을 특성곡선법에 적용하였다. 이를 통하여 운동파의 수치해석시 문제가 되는 속을 수치적으로 처리하기 위한 알고리즘을 제시하였고, 이와 연계하여 용질의 이송·확산 및 유사이동을 수치모의하기 위한 가능성을 검토해 보았다.

2. 속의 처리기법

2.1 속의 발생

측방향 유입이 존재할 때의 특성곡선의 진행형태는 그림 1과 같다. 이 그림에서 cascade element는 특성곡선법의 계산에 있어 지형인자가 바뀌지 않는 하나의 계산구간을 의미한다. 그림 1의 D와 E에서 D에서의 파속이 E에서의 파속보다 큰 경우 두 개의 특성곡선은 F에서 교차하며 속이 발생한다. 이 때 속이 발생할 조건은 D에서의 파속이 E에서의 파속보다 크므로 식 (1)이 성립한다.

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_E^{(1)} < \left[\frac{dx}{dt} \right]_D^{(2)} \quad (1)$$

여기서 위첨자는 그림 1의 특성곡선 번호이며, 아래첨자는 이 특성곡선이 시간 t' 에서 만나는 점을 나타낸다.

식 (1)에 운동파의 파속 $[dx/dt = (\alpha\beta Q^{\beta-1})^{-1}]$ 을 대입하면 다음 식 (2)이 된다.

* 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정
 ** 연세대학교 공과대학 토목공학과 조교수
 *** 연세대학교 공과대학 토목공학과 부교수
 **** 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

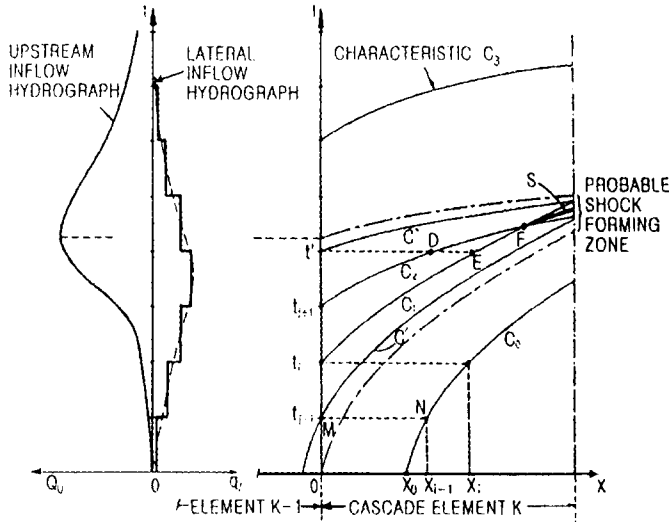


그림 1. Propagating shock fitting의 개념도

$$\alpha_k [Q_{U,k}^{(2)}]^\beta - \alpha_k [Q_{U,k}^{(1)}]^\beta > q_k \Delta t_{i+1} \quad (2)$$

여기서 α = 하천의 경사나 조도계수 등의 지형학적 인자, β = 지형학적 지수 인자, k = 단면번호, $\Delta t_{i-1} = t_{i+1} - t_i$ 그리고 Q = 유량이다. $t=0$ 에서 출발하는 특성곡선들(그림 1의 일점쇄선의 아래부분)은 식 (2)로부터 거리의 변화에 따른 유량의 변화가 없는 등류조건에서는 다른 특성곡선과 교차하지 않는다. 경계조건인 상류단의 유입량이 감소하기 시작하는 부분 이후(예를 들면, 그림 1의 C_3) 역시 다른 특성곡선과 교차하지 않는다. 이 두 부분을 제외한 부분을 "속 발생가능영역(probable shock forming zone)"이라 하며 (Borah, 1980), 속이 발생한 후의 속의 경로(특성곡선)는 식 (3)의 속도를 가진다 (Lighthill과 Whitham, 1955).

$$U(x, t) = \frac{dx}{dt} = \frac{Q^b(x, t) - Q^a(x, t)}{A^b(x, t) - A^a(x, t)} \quad (3)$$

여기서 A = 단면적, 위첨자 a 와 b = 각각 속의 발생 후(ahead)와 전(behind)을 나타낸다.

k 번째 계산구간의 속 발생가능영역내에서 해는 이 단면의 상류경계조건($x=0$)에서의 유입유량에 따라 바뀌는데, k 번째 단면의 경계조건은 $k-1$ 번째 계산구간의 초기조건, 즉 $t=0$ 에서의 거리에 따른 유량의 차이에 따라 바뀐다. 그림 1에서 \overline{MN} 사이를 지나는 특성곡선에서 이러한 경우의 예를 들면 식 (4)와 같은 조건일 때에 속이 발생한다.

$$\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} \right)^{\beta_k / \beta_{k-1}} (q_{k-1} \Delta t_{j-1})^{\beta_k / \beta_{k-1}} > q_k \Delta t_{j-1} \quad (4)$$

여기서 q = 측방향 유입유량, k = 계산구간의 번호이다. 식 (4)에서 k 와 $k-1$ 의 계산구간이 동일한 형상 ($\alpha_k = \alpha_{k-1}$, $\beta_k = \beta_{k-1}$)인 경우에는, k 번째 계산구간의 측방향 유입(q_k)이 $k-1$ 번째 계산구간의 측방향 유입(q_{k-1})보다 클 경우 속이 발생한다. 반면에 측방향 유입이 동일한 경우에는 α 와 β 의 대소에 따라 속의 발생 여부가 결정된다. Borah 등 (1980)은 운동파의 수치해석시 발생하는 속의 처리방법으로 PSF 방법과 ASF 방법을 제시하였다.

2.2 PSF 방법

그림 2는 하나의 동일한 지형인자를 가진 계산구간에서 발생하는 속과 이것의 처리를 나타내고 있다. P점에서 교차하는 특성곡선 C_3 와 C_4 에 대하여 살펴보면, 이들 사이에는 실제 무한개의 특성곡선이 존재하며, 이들 중의 임의의 점 B에서 만나는 특성곡선 C_3' 과 C_4' 를 생각할 수 있다. 여기서 C_3 와 C_4 사이에서 발생하는 속이 미소하다면, 속발생 후의 C_3' 와 C_3 에서 단면의 차이는 크지 않다. C_4' 와 C_4 또한 마찬가지이다. 그러므로, C_3 와 C_4 사이에서 발생하는 속은 그것의 경로 S를 벗어나지 않는다고 가정할 수 있다. 따라서 속의 경로는 서로 교차되는 두 개의 특성곡선에 의해 정의된다고 할 수 있다. 속의 발생 직전과 직후의 두 개의 특성곡선은 각각의 유량을 하류단으로 전달한다. 속의 경로를 추적하기 위해서는 먼저 그림 2에서와 같이 각 시간간격의 1/2에서의 초기값, 즉 $t_{0+1/2}$, $t_{1+1/2}$, $t_{2+1/2}$, ...의 유량을 계산한다. 이 값들을 식 (2)에 대입하여 속의 발생여부를 판단한다. 그림 2의 경우 C_3 와 C_4 사이에서 속이 발생하며 속의 경로를 추적하기 위한 값들은 운동파의 특성곡선식으로부터 계산한 다음 식 (5)를 이용하면 계산할 수 있다. 이 때, 속 경로의 경계값은 C_3 와 C_4 의 중간값으로 한다.

$$x - x_0 = \frac{1}{A_t^b - A_t^a} \int_{t_0}^t \left[(Q_t^b)^\beta + \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t q[x, \xi(x)] d\xi \right]^{1/\beta} - \left[(Q_t^a)^\beta + \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t q[x, \xi(x)] d\xi \right]^{1/\beta} dt \quad (5a)$$

$$t - t_0 = \frac{\alpha}{Q_u^b - Q_u^a} \int_{x_0}^x \left\{ [Q_u^b + \int_{x_0}^x q[\eta, t(\eta)] d\eta]^\beta - [Q_u^a + \int_{x_0}^x q[\eta, t(\eta)] d\eta]^\beta \right\} dx' \quad (5b)$$

여기서 위첨자 a , b 는 각각 속의 발생 직전의 후면부와 전면부를 의미하는데, 그림 2에서 S의 경우에는 D점에서의 단면의 변화를 보면 발생 전에는 C_3 가 되며, 후에는 C_4 가 된다. 그림 2의 속이 경로 S위의 가상의 점 B(x_{i-1} , t_{i-1})와 D(x_i , t_i)에 대하여 식 (5)를 이산화하면 식 (6)이 된다.

$$\Delta x_i = \frac{\alpha\beta}{(\beta+1)q[(A_{i-1}^b)^b - (A_{i-1}^a)^a]} \times \left\{ \left[\frac{q}{\alpha} \Delta t_i + (Q_{i-1}^b)^b \right]^{(\beta+1)/\beta} - \left[\frac{q}{\alpha} \Delta t_i + (Q_{i-1}^a)^a \right]^{(\beta+1)/\beta} - [(Q_{i-1}^b)^b]^{(\beta+1)/\beta} + [(Q_{i-1}^a)^a]^{(\beta+1)/\beta} \right\} \quad (6a)$$

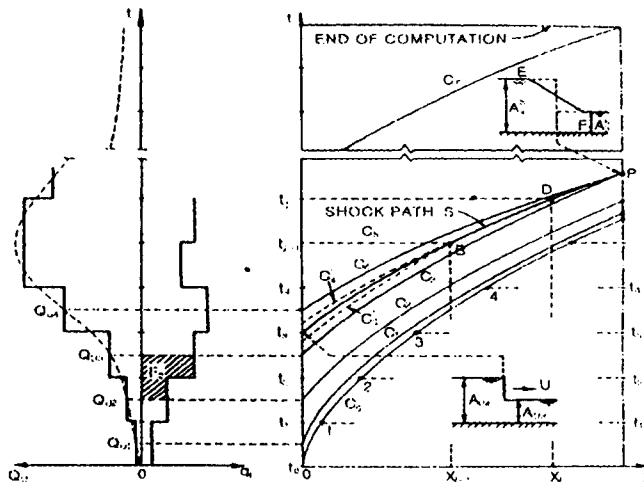


그림 2. 측방한 유입이 존재할 때 임의단면에서의 속 경로의 특성곡선의 진행양상 (Borah 등, 1980)

$$\Delta t_i = \frac{\alpha}{(\beta + 1)q[(Q_i^-)^b - (Q_i^+)^a]} \cdot \{ [q\Delta x_i + [(Q_i^-)^b]^\beta]^{1/\beta} - [q\Delta x_i + [(Q_i^+)^a]^\beta]^{1/\beta} \} \quad (6b)$$

이때 속이 발생한 다음의 속 경로(shock path)상의 유량은 식 (7)로 계산된다.

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} [Q^a(x, t) + Q^b(x, t)] \quad (7)$$

만약 측방향 유입이 존재하지 않을 때 식 (6)은 정의되지 않는다. 이 경우는 하나의 특성곡선이 하나의 계산 구간 내에서 유량이 변하지 않는다는 것을 의미한다. 이 경우에는 식 (4)를 이용하여 속 경로의 속도를 계산한 후 하류단까지의 거리에 따른 도달시간을 계산하거나 시간을 가정하여 그 때의 도달거리를 계산하면 된다.

2.3 ASF 방법

PSF 방법은 인접한 두 개의 특성곡선에 대해서만 속을 처리한다. 그러나 fitting된 후의 특성곡선들이 다시 교차하여 속 경로 상호간에 영향을 주는데, PSF 방법은 속 경로 상호간의 영향을 계산하지 못한다. 이러한 경우의 해결 방법은 속이 발생하는 속 경로 사이의 특성곡선을 무시하거나 계산구간을 짧게 하는 방법이 있다. 전자의 경우에는 두 개의 특성곡선 사이의 유량의 차이가 커져서 특성곡선 상호간의 속이 미소하다는 PSF 방법의 기본가정과 일치하지 않는 경우가 발생한다. 따라서 전자의 방법은 사용하지 않는 것이 좋다. 후자는 전체 계산구간을 1/2로 나누어 계산하면 속이 발생하는 특성곡선 상호간의 속을 처리할 수 있다. 즉, 계산구간을 더 짧게 나누어 PSF의 계산과정을 수행한다. 다음에 단면 aa'에서의 유출수문곡선을 다음 계산구간의 유입수문곡선으로 하여 같은 계산을 수행하는데, fitting된 속 경로사이에서 속이 발생하므로 두 개의 속 경로를 특성곡선으로 보고 이들을 fitting하여 계산한다. 이렇게 하면 속 경로 상호간의 영향을 완전하게 고려할 수 있다. 그러나, ASF는 PSF에 비하여 계산시간이 길다는 단점이 있다.

3. 수치실험

3.1 3단계의 경사를 가진 유역에서의 지표수흐름

첫번째 수치실험은 3가지 경사를 가진 가상 평면상에서의 유출해석에 대한 것으로, 상류단의 유입은 없는 것으로 가정하였다. 강우강도는 0.75 ft/hr로 30분간 지속되도록 하였고, 세 개 평면 각각의 길이는 400 ft로서 전체 1,200 ft로 설정하였으며, 평면 각각의 경사가 0.04, 0.01, 그리고 0.025로 하였다. 운동파이론을 적용하는 경우 단면과 유량의 관계식은 일반적으로 $Q = \alpha A^\beta$ 을 적용하는데, Borah 등 (1980)은 이 식에서 α 에 각 계산구간별로 10, 5, 2.5의 값을 적용하였으며, β 에 1.5를 적용하였다. PSF의 경우 시간의 변화(Δt)를 60 초로 하여 그 때의 유량에 대응하는 도달거리를 계산하였다. 경사가 바뀌는 부분에서 속을 처리하였다. 각 계산구간의 하류단에 도달한 수문곡선은 다음 계산구간의 유입유량으로 간주하여 계산을 수행하였다.

그림 3은 특성곡선법 (MOC), PSF 방법, 그리고 유한차분법에 의한 하류부에서의 유출수문곡선을 나타낸다. 일반적인 특성곡선법에 의한 수치해석결과는 a와 b부분에서 발생한 속을 처리하지 못하여 계산된 해가 부정(否定)임을 보이고 있다. PSF 방법에 의해 계산된 수문곡선을 살펴보면 a와 b 부분에서 발생한 속이 처리되는 것을 확인할 수 있다. 그러나 이부분의 수문곡선이 매끄럽지 못한 이유는 실제 수치해석 과정에서 속 경로 사이의 미소한 속이 발생하였으며, 특성곡선의 도달시간의 차이가 일정 범위 내에서 발생하는 속은 동일 유량을 가진다고 가정하였기 때문이다. 유한차분법의 경우 (비선형) 4점음해법이 사용되었으며 ($\Delta t = 60$ s, $\Delta x = 80$ ft), 침투부분의 수치감쇄현상이 두드러짐을 알 수 있다. 따라서 상류단의 유입 유량이 존재하지 않을 때에 PSF 방법이 효과적으로 사용될 수 있음을 알 수 있다 (Borah, 1989). 침투값의 경우, 특성곡선법과 PSF 방법이 $0.021 \text{ ft}^3/\text{sec}$ 으로 계산된 반면 유한차분법은 $0.019 \text{ ft}^3/\text{sec}$ 로 계산되었다. 침투값에 대한 오차는

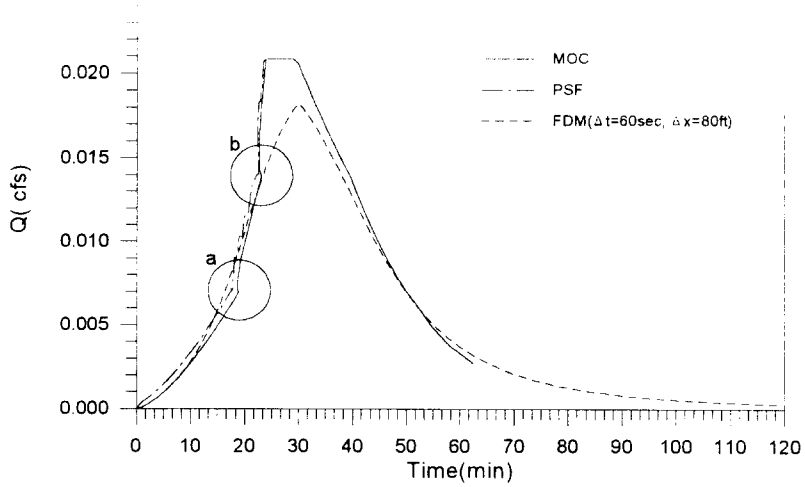


그림 3. 지표수유출 수치실험의 하류부에서의 유출수문곡선

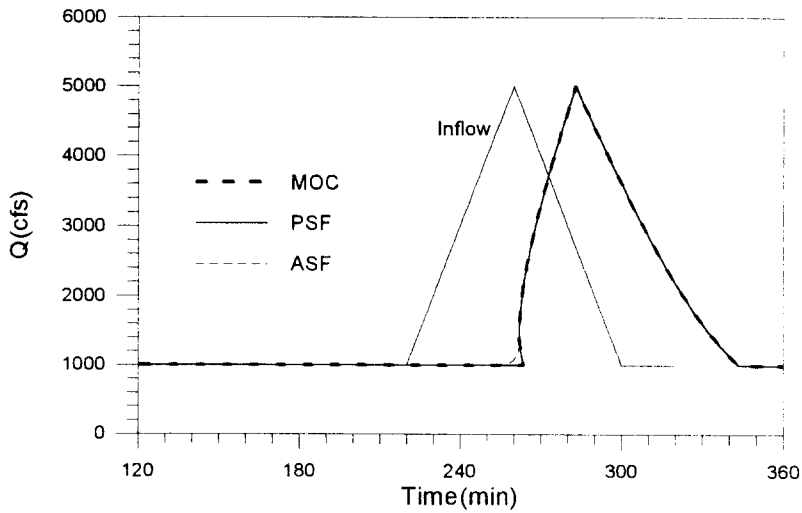


그림 4. 경사가 바뀌는 부분의 수문곡선

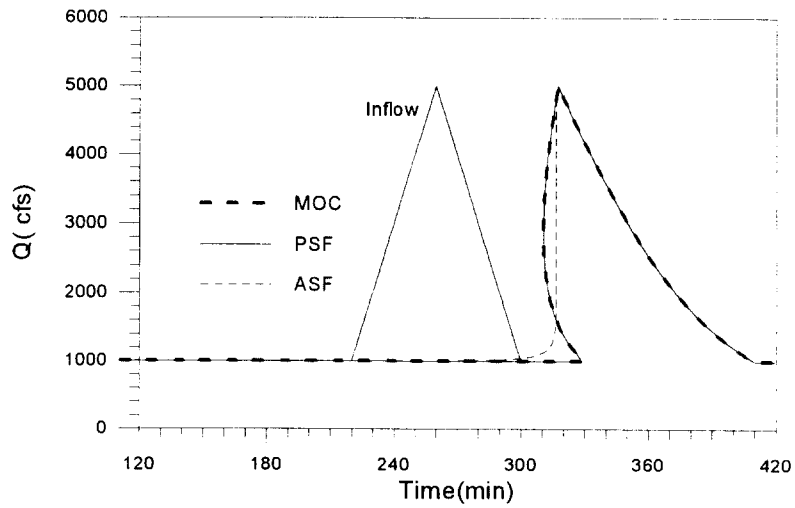


그림 5. 하류단의 수문곡선

약 10%로 유한차분법의 경우 수치처리 과정에서 수치감쇠현상을 나타낸다. 이에 비하여 PSF 방법은 파의 형상을 잘 보존하였다.

3.2 유량이 급변하는 흐름

홍수파의 내습과 같이 시간의 변화에 비해 유량의 변화가 급격할 경우 특성곡선법에 의한 계산과정에서는 인접한 특성곡선의 유입유량의 차이가 크게 되므로 인접한 두 개의 특성곡선사이의 속은 매우 크게 발생하고, 하나의 계산구간에서 여러 개의 특성곡선이 교차하게 된다. 이 경우에 PSF방법은 속을 완전하게 처리하지 못한다. 따라서, ASF와 같은 새로운 계산 방법이 필요하다. 본 수치 실험은 이러한 조건에 대한 PSF 방법과 ASF 방법의 적용성을 검증하기 위하여 수행하였다. Ponce와 Windingand (1985)의 연구에 기초하여 속이 발달될 수 있도록 조건을 부여하였다. 하폭은 200 ft인 직사각형 단면을 가정하였으며, 하천의 연장은 60,000 ft, 하상의 경사는 처음 30,000 ft는 0.004, 나중의 30,000 ft는 0.001로 설정하였고, Manning의 조도계수는 0.035로 하였다. 유입 유량은 220 분까지 1000 cfs, 260 분까지 1 분당 100 cfs의 유량이 증가하여 260 분에 첨두값인 5000 cfs가 되게 하고 다시 300 분까지 1 분당 100 cfs의 유량이 감소하여 300 분 이후에는 1000 cfs의 정상상태에 도달하도록 유하시켰다.

그림 4와 5는 특성곡선법, PSF 방법, 그리고 ASF 방법으로 계산된 수문곡선으로 각각 경사가 바뀌는 부분과 하류단에서 계산된 결과이다. 그림에 의하면 특성곡선법에 의한 결과와 PSF 방법에 의한 결과가 거의 비슷하며, 따라서 PSF 방법은 유량의 변화가 클 경우 효과적으로 속을 처리할 수 있음을 알 수 있다. ASF 방법의 경우에 PSF 방법에서 하나의 계산구간 (구간의 지형학적 인자가 변하지 않는 구간)으로 처리하는 30,000 ft의 구간을 첫번째 구간과 두번째 구간에서 각각 32개, 256개로 나누어 계산을 수행한 결과 속을 양호하게 처리하는 것으로 나타났다. 경사가 완만하게 변화하는 지점에서 속이 크게 발생하였기 때문에 두번째 구간에서 계산구간의 수가 8배 더 많아진 것으로 보인다.

4. 요약 및 결론

본 연구에서는 특성곡선법, 유한차분법, PSF 방법, 그리고 ASF 방법을 적용하여 운동과 이론의 수치해석을 실시하여, 각각의 경우 속 발생시 이의 처리능력에 대하여 살펴보았다. 본 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1. 특성곡선법의 경우는 파의 형상을 왜곡 없이 하류부로 전달하지만, 파의 상승부에서 경사가 급해지며, 파의 도달거리가 길어질 때와 지형인자가 변할 때 수치처리 과정에서 발생하는 속을 적절히 처리하지 못하는 것으로 나타났다.
2. 유한차분법의 경우 해의 안정성은 우수하지만 첨두부분에서 수치감쇠현상이 나타났다.
3. PSF 방법을 적용할 경우 파 형상의 전달은 양호하였고 초기의 유량유입이 존재하지 않는 경우 적용이 용이하였으나, 유량이나 하천의 형상이 급변하여 하나의 계산구간내에 세 개 이상의 특성곡선이 교차하는 경우에는 효과적으로 속을 처리하지 못하는 것으로 나타났다.
4. ASF 방법의 경우 대부분의 하천 상태에 적용이 가능한 것으로 나타났다. 그러나, 계산구간을 지나치게 많이 분할하여 전체 계산시간에 영향을 미치므로 계산 구간을 설정하는데 주의가 필요하다. ASF 방법은 특성곡선법에 이론적 근거를 두고 있으므로 임의 시간과 임의 지점에서의 계산에 한계가 있으며, 이를 처리하는 방법이 도입된다면 더욱 양호한 수치해석 방법이 될 것이다.
5. 이상에서 ASF 방법이 파의 첨두를 그대로 보존하는 운동파이론에 충실하면서 특성곡선법의 수치처리 과정에서 발생하는 속을 양호하게 처리하여 부정류흐름에의 적용이 적절한 것으로 나타났다. 그러므로 ASF 방법에 의한 부정류해석과 용질의 이송·확산 및 유사이동과의 연계모의도 가능할 것으로 보인다.

6. 참고문헌

- Borah, D. K. (1989). "Runoff simulation model for small watersheds." *Transaction of ASAE*, 32(3), 881-886.
- Borah, D. K., Prasad S. N., and Alonso C. V. (1980). "Kinematic wave routing incorporating shock fitting." *Water Resources Research*, 16(3), 529-541.
- Hoffmann, K. A., and Chiang, S. T. (1993). *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Engineering Education System, Wichita, KN.
- Lighthill, M. J., and Whitham, G. B. (1955). "On kinematic waves I. Flood movement in long river." *Proc. R. Soc. London A*, 229(1178), 281-316.
- Ponce, V. M., and Windingand, D. (1985). "Kinematic shock: sensitivity analysis." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 111(4), 600-611.
- Ponce, V. M. (1991). "The kinematic wave controversy." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 117(4), 511-525.
- Whitham, G. B. (1974). *Linear And Nonlinear Waves*, John Willy & Sons Inc., New York, NY.