

# 유한요소법과 특성선법을 조합한 부정류해석

한건연\*, ○이올래\*\*, 박재홍\*\*\*

## 1. 서론

자연하천에 있어서 유한요소기법의 적용은 상류 및 사류에 대해서 동시에 해를 구할 수 있는 특성을 가진다. 이와 같은 장점에도 불구하고, Bubnov-Galerkin 방법은 이 기법이 가지는 수치적 비감쇠 특성으로 인하여 하도내의 부정류를 계산하는데 있어서 성공적이지 못하였다. 이러한 단점을 보완하고 해의 진동을 감쇠시키기 위해서는 상향가중 함수를 도입하여야 한다. 이러한 상향가중함수를 특성선법과 연계하여 해석하는 방법이 Characteristic-Dissipative-Galerkin(CDG) 기법이다. 본 연구에서는 Bubnov-Galerkin(BG) 기법과 Petrov-Galerkin (PG) 기법 및 CDG기법을 다양한 부정류 흐름 조건에 적용함으로써 CDG 기법이 가지는 우수성을 입증하였다.

## 2. 유한요소방정식

### 2.1 Petrov-Galerkin 방법

흐름의 해석을 위한 유한요소법의 적용은 두가지 단계를 포함하는데 첫째로, 시행 또는 근사해가 개발되어야 하고 둘째로, 이러한 근사해는 시행해와 정확해와의 오차를 최소화하기 위해서 적절한 방법으로 최적화 시켜야 한다. 선형 대류방정식을 비보존형태로 기술하면 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

여기서,  $U = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ gh - q^2/h^2 & 2q/h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{Bmatrix}$ 이다.

PG기법은 시행함수로서 기저함수를 선택하지 않고 식 (2)와 같은 시행함수형태를 적용한다. 이 기법의 수행은 Katopodes(1984)에 의해 도입된 상향가중항을 통한 수치적 확산을 사용하는것이다.

---

\* 경북대학교 토목공학과 교수

\*\* 경북대학교 토목공학과 박사과정

\*\*\* 새명대학교 토목공학과 전임강사

$$v_i = f_i + g_i \quad (2)$$

$$g_i = \omega W \frac{\Delta x}{2} \frac{df_i}{dx} \quad (3)$$

여기서,  $\omega$ 는 흐름상황의 유형에 따른 상향가중계수를 나타내며,  $W$ 는 수치적확산의 양과 방향을 제어하는 상향계수를 나타낸다.

선형 대류방정식의 경우에 있어서 PG 기법의 수식과정은 식 (4)와 같이 BG기법과 대등한 식의 형태로 도출될 수 있다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \omega W \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (4)$$

이제, 식 (4)는 1차원 개수로 부정류 흐름의 경우에 대해서, 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} f_i & 0 \\ 0 & f_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ M \end{Bmatrix} + \omega \frac{\Delta X}{2} [W] \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} f_i & 0 \\ 0 & f_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ M \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5)$$

여기서,  $C$ 와  $M$ 은 각각 연속방정식과 운동량 방정식을 의미한다. 본 연구에서는 상향계수는 확산계수  $\omega$ 를 나타내기 위해서 사용되고 있고,  $[W]$ 는 상향가중 매트릭스를 나타내고 있다.

## 2.2 Characteristic-Dissipative-Galerkin 방법

CDG기법은 식 (6)에서와 같이 선형 대류방정식에 대하여 대등한 BG기법의 수식과정으로서 설명될 수 있다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \omega \frac{U}{|U|} \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (6)$$

특성선식은 식 (7)과 같이 기술된다.

$$\frac{D(U \pm 2c)}{Dt} = \frac{\partial(U \pm 2c)}{\partial t} + \begin{bmatrix} U+c & 0 \\ 0 & U-c \end{bmatrix} \frac{\partial(U \pm 2c)}{\partial x} = \{0\} \quad (7)$$

이제,  $W$ 를 식 (8)과 같이 정의하면 이 식은 식 (9)와 같이 변형하여 정리된다.

$$W = \frac{U}{|U|} \quad (8)$$

$$[W] \equiv \begin{bmatrix} W_{aa} & W_{aa} \\ W_{qa} & W_{qa} \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} \frac{(c^2 - U^2)}{|U+d| - |U-d|} & \frac{(U+c)}{|U+d|} - \frac{(U-c)}{|U-d|} \\ (c^2 - U^2) \left( \frac{(U+c)}{|U+d|} - \frac{(U-c)}{|U-d|} \right) & \frac{(U+c)^2}{|U+d|} - \frac{(U-c)^2}{|U-d|} \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (1)의 2차원 방정식으로서의 확장은 식 (10)과 같이 기술될 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U \\ V \\ 2c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U & 0 & c \\ 0 & U & 0 \\ c & 0 & U \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U \\ V \\ 2c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & V & c \\ 0 & c & V \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} U \\ V \\ 2c \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

### 3. 부정류에 대한 모형의 적용

#### 3.1 상류-사류의 천이류

이 수치시험은 완만한 경사에서 급경사로의 천이부를 통한 점변류의 계산을 수행하는 것이다. 사용된 수로는 10 m의 폭이고 상류부 경사는 0.0025이고 하류단 경사는 0.04이다. 전체 66개의 절점에 대하여 각 길이 10 m의 65개의 요소로 구성하였다. 완경사에서 급경사로의 등류흐름 수심은 각각 3.64 m과 1.4 m이다. 그림에서 보는 바와 같이 초기에 유량은 100 m<sup>3</sup>/s로 하였고 초기 수심은 3.5 m이다. 상류부 수로가 상류 흐름이기 때문에 단지 하나의 상류단 경계 조건이 부여되었고, 반면 하류단에서는 어떠한 경계 조건도 지정되어 있지 않다. 계산시간간격은 0.25초가 사용되었고 허용오차는 10<sup>-5</sup> m였다. 그림 1은 1000 timestep후의 BG, PG, 그리고 CDG 기법에 대한 결과를 나타내고 있다. PG 와 CDG 기법에 대한 상향가중계수는 0.5를 사용하였다. 모의 결과는 CDG기법이 해의 안정성과 정확성에 있어 가장 우수한 것으로 나타났다.

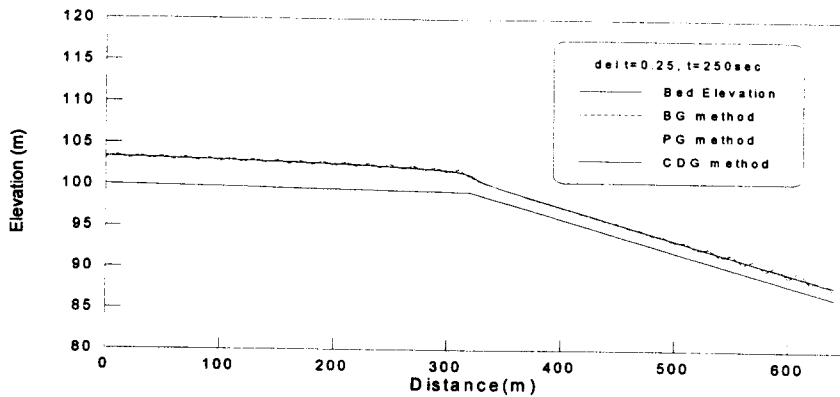


그림 1. 상류-사류 천이류에 대한 수위변화

### 3.2 비선형 표면동요 흐름

모의 실험은 비선형 표면동요의 전파를 추적하는 것으로서 Froude 수 0.5에 해당하는 유량  $10.25 \text{ m}^3/\text{s}$ 가 오른쪽으로 흐름이 진행되는 경우이다. 계산된 구간간격은 5 m이며, 계산요소의 수는 100개이며 단위폭을 사용하였다. 지정된 초기 조건은 그림에서 제시하였다. 초기수위는 침두부에서 4.7 m로 설정하였으며, 유량조건은 침두부에서  $22.5 \text{ m}^3/\text{s}$ 와  $5.0 \text{ m}^3/\text{s}$ 를 가지며, 나머지 구간에서는  $10.25 \text{ m}^3/\text{s}$ 를 유지하는 초기유량조건을 제시하였다.

모든 기법에서  $\theta=0.5$ 인 조건 하에서 수행되었으며, 모의결과는 그림 3에 나타난 바와 같이 정확히 진행과가 150 m 이동한 후인  $t=12.95$  초에서 제시되었다. BG기법은 그림에서 처럼 선단부에 동요를 보여주고 있으며, PG, CDG기법에 있어서 모두 145 m 지점과 420 m 지점에서 최고수위를 가지고 이동하고 있었다. 각각의 지점에서는 4.629 m를 유지하면서 흐름을 유지하고 있었다. 계산 모의결과 CDG기법이 해석해와 비교하여 가장 안정된 해를 얻을 수 있었다.

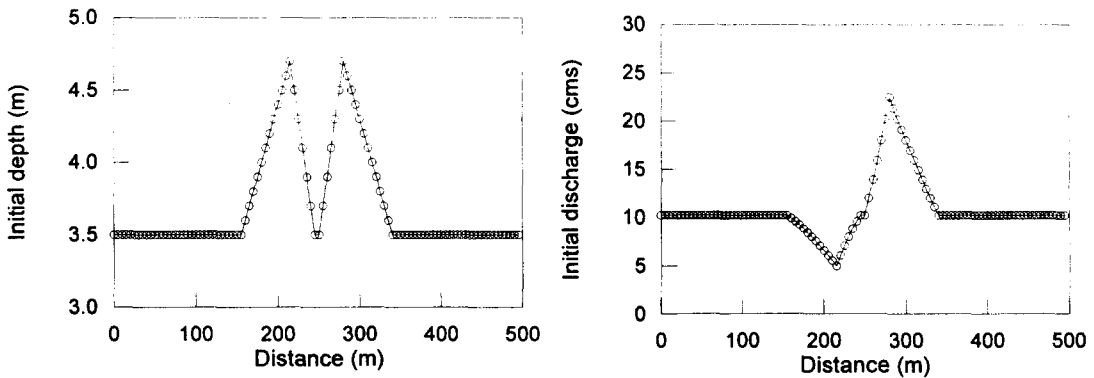


그림 2. 비선형 표면 동요해석을 위한 초기조건  
(a) 수위 (b) 유량

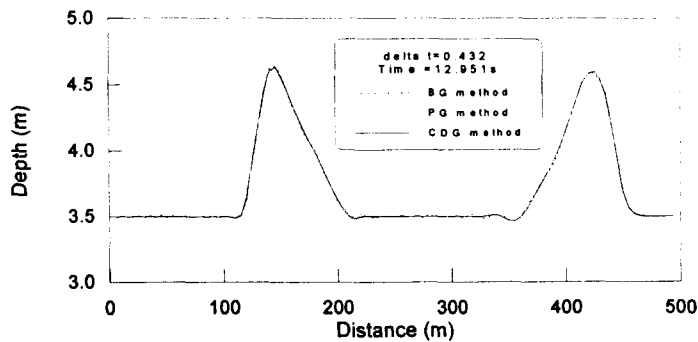


그림 3. 비선형 표면동요의 수위변화

#### 4. 결 론

유한요소법과 특성법을 결합한 CDG(Characteristic-Dissipative-Galerkin)기법을 이용하여 개수로 내의 부정류 해석을 실시하였다. 정상도수, 상류-사류의 천이류, 비선형 표면동요의 전달 및 댐 파괴류에 대해서 적용한 결과는 CDG기법, BG 및 PG 기법에 비해 그 해의 안정성과 수렴성이 크게 개선된 것으로 나타났으며, 해석적인 해와도 더욱 일치된 결과를 얻을 수 있었다. 특히 CDG 기법은 2차원과를 선택적으로 감쇠시킴으로서 선단부가 급격하게 변화하는 급변부정류에 더욱 효과적으로 나타났다. 향후에 CDG기법은 2차원적으로 확장되고 수질해석 및 토사이동해석에 적용된다면, 개수로 내의 유동해석분야에 크게 기여할 수 있을것으로 판단되었다.

#### 5. 참고문헌

- Alam, M.M., and Bhuiyan, M.A.(1995). "Collocation finite element simulation of dam-break flows." *J. of Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol. 121, No. 2, pp. 118-128.
- Brooks, A.N., and Hughes, T.J.R. (1982). "Streamline upwind /Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations." *Comput. Methods App. Mech. Eng.*, Vol. 32, pp. 199 - 259.
- Froehlich, D.C. (1990). "Hermite-Galerkin model for dam-break floods." *Proc. of 1990 Nat. Conf. on Hyd. Eng.*, ASCE, pp. 557-562
- Hicks, F.E., and Steffler, P.M. (1990). "Finite element modeling of open channel flow." *Water Resources Engineering Report WRE 90-6.*
- Hughes, T.J.R., Franca L.P. and Mallet, M. (1986). "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 54, pp. 223-234.
- Katopodes, N.D. (1984). "A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow." *J. of Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol. 110, No. 4, pp. 450-466.
- Tisdale, T.S., Scarlatos, P.D., and Hamrick, J.M. (1998). "Streamline upwind finite-element method for overland flow." *J. of Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol. 124, No. 4, pp. 350-357.
- 이을래. (1996). "Collocation 유한요소법에 의한 흐름의 동역학적 해석." 경북대학교 대학원 공학 석사논문, pp. 1-60.
- 한건연, 박재홍, 이종태 (1996). "개수로내의 점변 및 급변부정류에 대한 유한요소해석 : I. 이론 및 수치안정성 해석." 한국수자원학회 논문집 Vol. 29, No. 6, pp. 167-178.
- 한건연, 박재홍, 이을래 (1997). "개수로내의 점변 및 급변부정류에 대한 유한요소해석 : II. 적용 예." 한국수자원학회 논문집 Vol. 30, No. 1, pp. 35-44.