

역산기법을 이용한 관망의 검증

박남식*, 김상현**, 김문구***, 노진식***

1. 서론

일반적인 개념의 관망해석은 관망에 포함된 모든 관의 유량과 수두분포를 구하는 것을 의미한다. 이를 위해서는 관망의 배치도, 길이, 관경 등의 기하학적 특성과 마찰계수, 공급량과 수요량 등의 수리학적 특성이 주어져야 한다. 이들 정보에 수리학적 법칙을 적용시키면 유량과 수두분포를 얻을 수 있다 (그림 1).

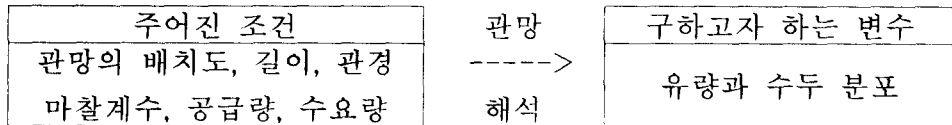


그림 1. 기존의 관망해석 개념도

그런데 실질적인 관망에 대한 해석 시에는 두 가지 어려움이 있다. 첫째, 실제 관에 대한 마찰계수를 정확히 산정하는 것이 어렵다. 조사된 바에 의하면 마찰계수 산정시 새 관의 경우 10%, 노후 관의 경우 50-100%까지의 오차가 발생할 수 있다. 마찰계수는 에너지 손실을 결정하는데 있어서 가장 중요한 계수로 이에 대한 정확한 자료가 없이는 신뢰성 있는 관망해석 결과를 얻는 것이 불가능하다.

*동아대학교 토목공학과 조교수

**부산대학교 환경공학과 조교수

***동아대학교 토목공학과 대학원 석사과정

두 번째 어려움은 수요분포가 정확히 파악되지 않는다는 것이다. 누수 등과 같이 파악되지 않은 수요 때문에 질량보존법칙을 적용하는 것이 불가능하다.

여기서는 이러한 어려움을 해소하기 위하여 관망의 마찰특성과 수요분포를 산정하는 관망의 검증 기법에 대하여 연구한다. 연구방법의 기본 원리는 그림 1의 주어진 조건과 구하고자하는 변수들의 일부를 대치하는 것이다. 즉, 관망의 특정 지점에서 유량이나 수압을 측정하고, 이를 바탕으로 주어진 조건의 일부를 구하는 것이다. 이러한 방법을 역산방법이라 한다. 본 연구의 경우, 마찰계수와 미지의 수요, 즉 누수의 위치와 수량이 새로운 미지수가 된다. 이를 모식적으로 나타내면 그림 2와 같다.

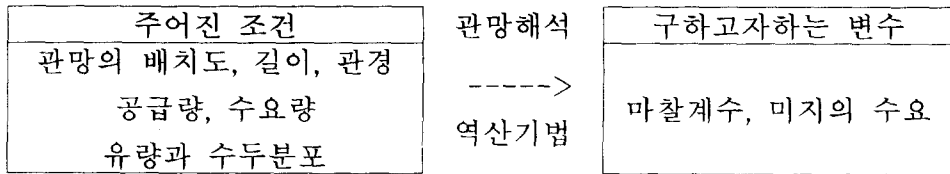


그림 2. 관망 역산기법의 개념도

2. 관망내 부정류 해석

본 기법의 기본은 관망 흐름에 대한 보존방정식들이다. 관망내 부정류 흐름에 대한 연속방정식과 운동량보존식은 다음과 같다(Roberson 등, 1995).

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{f|Q|Q}{2DA} = 0 \quad (2)$$

여기서 h 는 수두, Q 는 유량, a 는 전파속도(celerity), g 는 중력가속도, D 는 관경, A 는 관 단면적, f 는 마찰계수이다. 전파속도 a 는 다음과 같다.

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + KD/eE}} \quad (3)$$

여기서 K 와 ρ 는 각각 물의 체적탄성계수와 밀도, e 는 관의 두께, E 는 관의 탄성계수이다. (2)의 유도에는 부정류의 마찰손실로 정상류에 적용되는 Darcy-Weisbach 식

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (4)$$

이 적용되는 것으로 가정하였다. 그러나 부정류에서는 마찰손실이 위 식으로 계산된 것보다 크다는 것이 실험적으로 밝혀진 바 있으며 이에 대한 연구가 진행되고 있다(Brunone 등, 1995). 위 편미분방정식에 특성곡선법(Greenberg, 1982)을 적용하면 다음의 연립 상미분 방정식이 얻어진다.

$$\frac{dh}{dt} + \frac{a}{gA} \frac{dQ}{dt} + \frac{f|Q|Q}{2gDA^2} = a \text{ along } \frac{dx}{dt} = a \quad (5a)$$

$$\frac{dh}{dt} - \frac{a}{gA} \frac{dQ}{dt} + \frac{f|Q|Q}{2gDA^2} = a \text{ along } \frac{dx}{dt} = -a \quad (5b)$$

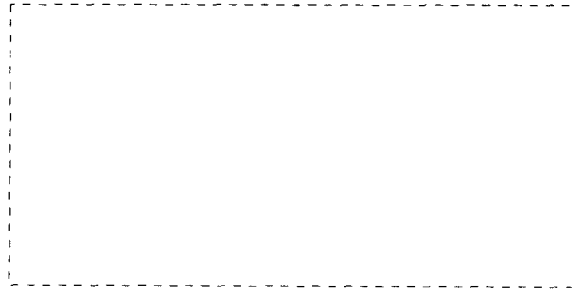


그림 3. 특성곡선법과 x-t평면

차분된 상미분 방정식을 초기조건(유량과 수두)이 지정된 두 점 A와 B(그림 3)에 적용하면 미지의 점 P에서 유량과 수두를 계산할 수 있는 다음의 연립방정식이 산출된다.

$$Q_P = Q_A - \frac{f|Q_A|Q_A}{2DA} \Delta t + \frac{gA}{a} (H_A - H_P) \quad (6a)$$

$$Q_P = Q_B - \frac{f|Q_B|Q_B}{2DA} \Delta t + \frac{gA}{a} (H_P - H_B) \quad (6b)$$

위 연립방정식으로부터 P점의 유량과 수두를 계산한다.

3. 역산

통상의 관망해석은 지정된 마찰계수나 수요에 대하여 (6)으로부터 수두와 유량분포를 구하는 것이다. 그러나 마찰계수나 수요가 미지수인 경우에는 측정된 수압이나 유량자료에 역산방법을 적용할 수 있다. 본 연구에서는 더 정확한 측정이 가능한 수압이 측정되는 것으로 가정하였다. 측정된 수압분포로부터 마찰계수와 수요를 구하는 데에는 최적화 방법이 사용된다. 목적함수는

$$\text{minimize } E(a_i) = \sum_{k=1}^M (h_k^m - h_k)^2 \quad (7)$$

여기서 a_i 는 미지의 마찰계수나 수요를 나타내는 벡터, h_k^m 은 측정된 수두를, h_k 는 (6)으로부터 계산된 수두를 나타낸다. 목적함수 $E(\mathbf{a})$ 는 최소점 \mathbf{a}_{\min} 부근의 점 \mathbf{a}_0 에서 다음의 절단된 Taylor급수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}) &= E(\mathbf{a}_0) + \frac{\partial E}{\partial a_i} \delta a_i + \frac{\partial^2 E}{\partial a_i \partial a_j} \delta a_i \delta a_j \\ &= E(\mathbf{a}_0) - \mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\mathbf{d} = -\nabla E|_{\mathbf{a}_0}$ Hessian 행렬 $\mathbf{H} = \partial^2 E / (\partial a_i \partial a_j)$ 이다. Jacobian은 (8)을 \mathbf{a} 에 대하여 미분하여 얻는다.

$$\nabla E = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) - \mathbf{d} \quad (9)$$

최소점에서는 $\nabla E = \mathbf{0}$ 이므로 목적함수를 최소화시키는 \mathbf{a}_{\min} 은 다음으로부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{a}_{\min} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{d} \quad (10)$$

그러나 \mathbf{a}_0 가 \mathbf{a}_{\min} 과 충분히 가깝지 않으면 (8)의 오차가 커서 (10)이 성립되지 않는다. 이때에는 최대경사(steepest gradient)방법으로 \mathbf{a}_{\min} 에 접근시킨다.

$$\mathbf{a}_{next} = \mathbf{a}_0 + \alpha \mathbf{d} \quad (11)$$

여기서 α 는 step의 크기이며 최대경사법을 수 회 적용한 후 최소점 부근에서는 (10)을 사용한다.

위 최적화 방법의 핵심적 요소는 \mathbf{d} 벡터와 \mathbf{H} 행렬이므로 이 방법의 성공적 수렴은 이들의 정확도에 전적으로 의존한다. 도함수의 계산에 일반적으로 사용되는 차분방법은 정확성에서나 계산효율면에 있어서도 그다지 유리하지 않다.

4. 결론

본 검증기법은 계측자료(예: 수압)를 이용하여 관망의 마찰계수와 수요를 구하는 기법으로 관로 사고의 대응과 관로의 노후도 평가에 기여할 수 있으므로 수도종합관리시스템의 주요 요소로 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

5. 참고문헌

- 강중수, 김주환, 노재경, 수자원 계획과 관리를 위한 지리정보시스템의 활용, 토목, 대한토목학회지, 40-50, 1997.
- Brunone, B, Golia, U.M., and Greco, M., Effects of Two-Dimensionality on Pipe Transients Modeling, J. of Hydr. Engr., ASCE, Vol. 121, No. 12, 906-912, 1995.
- Greenberg, M.D., Foundation of Applied Mathematics, Prentice Hall, 1982.
- Liggett, J.A. and Chen, L.C., Inverse Transient Analysis in Pipe Networks, J. of Hydr. Engr., ASCE, Vol. 120, No. 8, 934-955, 1994.
- Press, W.H., Flannery, B.P., eukolsky, S.A., and Vatterlling, W.T., Numerical recipes, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1991.
- Roberson, J.A., Cassidy, J.J. and Chaudhry, M.H., Hydraulic engineering, Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., 1988.