확장형 완경사방정식에서 고차의 수심변화 효과가 파랑의 굴절에 미치는 영향

ㅇ 이 창 훈*

1. 머리말

파랑의 굴절, 회절, 천수, 반사를 모두 예측할 수 있는 Stokes형의 선형의 파랑식인 완경사방정식은 Berkhoff(1972)가 개발한 이후로 최근까지도 전세계적으로 널리 연구되고 있다. 그런데, Massel(1993)은 Berkhoff의 유도과정 가운데 무시한 고차의 수심변화 효과인 수심의 곡률항($\nabla^2 h$)과 수심경사의 제곱항($(\nabla h)^2$)을 더하여 소위 확장형 완경사방정식을 개발하였다. 쌍곡선형 식으로는 Suh 등(1997)이 Smith와 Sprinks(1975), Radder와 Dingemans(1985)의 두 식을 확장한 식이 있고, Lee 등(1997)이 Copeland(1985)의 식을 확장한 식이 있다. 이 확장형 완경사방정식은 파랑의 변형을 예측함에 있어서 수심변화가 작은 경우에는 수심의 곡률 효과가 고려됨으로 인하여 기존의 완경사방정식에 비하여 더 정확하고, 또한 수심변화가 큰 경우에는 수심경사의 제곱 효과가 가미됨으로 인하여 더 정확함이 밝혀졌다(Lee 등, 1997).

그런데, 기존의 연구에서는 확장형 완경사방정식이 파랑변형 가운데 파랑의 반사를 얼마나 정확히 예측하느냐에 초점을 두었다. 최근 Chandrasekera와 Cheung (1997)은 파랑이 원형의 수중여울 위를 전파하는 경우에 복합요소(hybrid element) 법을 사용하고 완경사방정식에 고차의 수심변화 항을 하나씩 따로 고려하여 각 항의 역할을 규명하려고 하였다. 그 결과 수심의 곡률의 효과는 여울 뒤쪽에서 항상 파고를 증폭시키는 반면 수심경사의 제곱의 효과는 여울 뒤쪽에서 파고를 조금 증폭시키거나 감소시킨다는 결론을 얻었다. 그와 같은 결과에 대한 물리적인 이유를 규명하지 못한 아쉬움을 남겼다. 저자는 고차의 수심변화 효과가 파장의 크기를 다르게 하고 따라서 수심의 변화에 따른 파랑의 굴절의 정도가 다르게 할 것이라는 추측을 하게 되었다.

본 연구에서는 확장형 완경사방정식인 Suh 등의 식에서 고차의 수심변화 효과가 파랑의 굴절을 예측하는데 어떻게 영향을 미치는가 살펴보았다. 먼저, 기하광학기법을 사용하여 지배방정식으로부터 에너지전송식과 eikonal 식을 유도한 뒤 모

* 정회원, 한국해양연구소 연안·항만공학연구센터 선임연구원

형식이 파랑의 에너지와 위상을 어떻게 재현하는지 살펴보았다. 그리고, 공간적인 위상정보인 파장의 크기에 따라 파랑의 굴절의 정도가 어떻게 달라지는지 규명하였다. 그 다음으로, 원형의 수중여울을 지나 파랑이 전파되는 경우에 수치실험을 하고 eikonal 식을 사용하여 그 실험결과를 분석하고 결론을 맺었다.

2. 기하광학기법과 파랑의 굴절

기하광학기법을 사용하여 파랑식으로부터 에너지전송식과 eikonal 식을 얻을 수 있다. 또한, eikonal 식으로부터 파랑식이 재현하는 파장을 예측할 수 있다. 이 파장을 결정짓는 인자는 첫째로 수심과 파의 주기로 결정되는 선형의 분산관계식과 둘째로 파랑에너지의 확산에 따른 파랑의 회절 뿐만 아니라 셋째로 고차의 수심변화 효과가 있다. Suh 등의 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\overline{C C_g} \nabla \tilde{\phi}) + (\overline{\omega^2} - \overline{k^2 C C_g}) \tilde{\phi} + \overline{\omega^2} [\overline{R_1} (\nabla h)^2 + \overline{R_2} \nabla^2 h] \tilde{\phi} = 0 \quad (1)$$

여기서, $\tilde{\phi}$는 평균수면상에서의 속도포텐셜이고, $\overline{C}$와 $\overline{C_g}$는 각각 파랑의 위상속도와 군속도이고, $\overline{\omega}$와 $\overline{k}$는 각각 파랑의 각주파수와 파수이고, $\overline{R_1}$과 $\overline{R_2}$는 수심과 파랑의 주기에 따라 결정되는 계수이다. 변수에 bar를 붙인 것은 각주파수 $\overline{\omega}$와 수심 h와 선형의 관계식으로부터 결정된다는 것을 의미한다. $\tilde{\phi}$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\phi} = A e^{i\psi} = -\frac{iag}{\omega} e^{i\psi} \quad (2)$$

여기서 A는 포텐셜함수의 진폭이고, a는 수면변위의 진폭이고, 위상함수 ψ는 실제 입사한 파랑의 각주파수 ω와 모형식이 재현하는 파수벡터 $\mathbf{k}$와 다음과 같은 관계에 있다.

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \qquad \mathbf{k} = \nabla \psi \quad (3)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하면 허수부에는 파랑에너지전송식이 나오고,

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\overline{C}}{C} \overline{C_g} a^2 \right) = 0 \quad (4)$$

실수부에 다음과 같은 eikonal 식이 나온다.

$$\left(\frac{k}{\overline{k}}\right)^2 - 1 = \frac{\overline{C}}{\overline{C_g}} \left[\left(\frac{\omega}{\overline{\omega}}\right)^2 - 1 \right] - \frac{\overline{C}}{\overline{C_g}} [\overline{R_1} (\nabla h)^2 + \overline{R_2} \nabla^2 h]$$

$$+ \frac{\nabla \cdot (\overline{C C_g} \nabla a)}{\overline{k^2 C C_g} a} - \frac{1}{\overline{k^2 C C_g} a} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \quad (5)$$

식 (5)에서 $\omega = \overline{\omega}$의 규칙파의 경우 우변의 마지막 항이 0이 되고, 회절효과를 무시하면 우변의 마지막에서 두 번째 항이 0이 되어 다음과 같이 된다.

$$\left(\frac{k}{\bar{k}}\right)=\sqrt{1-\frac{\overline{C}}{\overline{C_g}}\left[\overline{R_1}(\nabla h)^2+\overline{R_2}\nabla^2 h\right]} \tag{6}$$

즉, 고차의 수심변화 효과($\nabla^2 h$, $(\nabla h)^2$)에 따라 실제 모형식이 재현하는 파장이 길어지기도 하고 짧아지기도 한다는 것을 알 수 있다.

기하광학기법을 사용하여 원형의 여울 위를 전파하는 파랑의 굴절을 표현하는 다음과 같은 식을 유도할 수 있다(Mei, 1989).

$$k r \sin\theta = \text{constant} \tag{7}$$

여기서 r은 여울의 가운데 지점으로부터 떨어진 거리이고 θ는 파향선이 등심선의 법선과 만나는 각이다. 식 (7)이 암시하는 것은 여울 위를 전파하는 파랑의 파수가 작으면 작을수록(즉, 파장이 길면 길수록) θ가 더 커진다(즉, 파향선이 현재의 방향에서 덜 꺾인다)는 것이다.

3. 원형의 여울 위를 전파하는 파랑의 수치실험

Chandrasekera와 Cheung은 수중여울 위를 전파하는 파랑의 경우에 확장형 완경사방정식에 복합요소법을 사용하여 수치실험을 하였다. 본 연구에서 그들이 실험한 것과 똑같은 경우에 Suh 등의 확장형 완경사방정식을 유한차분하여 수치실험을 하였다. 수심 h는 여울의 중심으로부터의 거리 r의 함수로서 다음과 같다.

$$h(x)=h_0-b\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{8}$$

여기서 R은 여울의 반지름이고, b는 여울의 높이이다. 여울에서 고차의 수심변화 효과의 항을 살펴보면 곡률의 항은 $\nabla^2 h=4b/R^2$로 그 값이 일정하고 수심경사의 제곱의 항은 $(\nabla h)^2=4b^2r^2/R^4$로서 $r=0$에서 0이고 $r=R$에서 $4b^2/R^2$이다. 본 연구에서는 $b/R=0.4$, $b/h_0=0.6$, $kh_0=1.0$의 경우에 대하여 수치실험을 하였다.

수치실험을 하기 위한 지배방정식으로서 식 (1)과 대등한 정확도를 갖는 다음과 같은 Suh 등의 또다른 식을 사용하였다.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(\frac{\overline{CC_g}}{g}\nabla\tilde{\phi}\right)+\frac{\overline{\omega^2-k^2CC_g}}{g}\tilde{\phi}+\frac{\overline{\omega^2}}{g}\left[\overline{R_1}(\nabla h)^2+\overline{R_2}\nabla^2 h\right]\tilde{\phi} \tag{9}$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}=-g\eta \tag{10}$$

여기서 η는 수면변위이다. 계산영역은 $6R\times12R$의 내부영역과 이 영역의 상·하류 경계에 파장의 2.5배 두께의 에너지흡수층으로 구성되어 있다. 여울의 중심을 계산영역의 중심에 두게 하였다. 에너지의 흡수는 식 (10)을 다음과 같이 변형하므로서 가능하다.

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}=-g\eta-\overline{\omega}D_s\tilde{\phi} \tag{11}$$

여기서 D_s는 스폰지층 밖에서는 0이고 스폰지층의 시작점부터 끝점까지는 0부터 1

까지 서서히 증가하게 하였다. 조파선을 상류에 있는 스폰지층으로부터 x축 방향의 격자간격 Δx만큼 떨어지고 y축과 나란하게 두었다. 수면의 교란이 없는 상태에서 시작한 뒤 조파선에서 원하는 에너지와 위상을 갖는 파랑을 내부조파(Lee와 Suh, 1998)하여 10주기가 경과할때까지 수치실험을 하였다. 4차의 Adams-Moulton predictor-corrector 기법을 사용하여 식 (9), (11)의 시간미분항을 차분하였고, 3점대칭법을 사용하여 식 (9), (11)의 공간미분항을 차분하였다. 격자간격 $\Delta x, \Delta y$는 모두 최소 파장의 1/30이 되게 하여 공간적인 해상도를 얻을 수 있었고, Courant 수가 $C_r = \overline{C_g}\Delta t/\Delta x = 0.1$이 되게 하여 수치적으로 안정한 해를 얻을 수 있었다.

Fig. 1에 세 개의 모형식(Radder와 Dingemans의 식, 이 식에 수심의 곡률항 또는 수심경사의 제곱항을 더한 식)을 사용하여 재현된 수면변위의 등가선을 도시하였다. 등가선 사이의 길이로부터 재현된 파장을 알 수 있는데 수심의 곡률 효과를 고려함으로서 파장이 더 길어짐을 관찰할 수 있다. 재현된 파랑은 이 등가선에 직각으로 x축의 양의 방향으로 향한다. 이 파향선을 살펴보면 수심의 곡률 효과를 고려함으로서 여울의 바로 상·하류 지점에 굴절에 의한 파랑의 집중 현상이 오히려 약해짐을 알 수 있다. 반면에 수심경사의 제곱의 효과를 고려하여도 파장이 아주 조금 커지고 굴절에 의한 파랑의 집중현상도 크게 다르게 나타나지 않았다.

eikonal 식 (6)을 사용하여 세 개의 모형식이 재현하는 여울에서의 파장비 $L/\overline{L}$를 Fig. 2에 도시하였다. 수심의 곡률의 효과를 고려하면 여울에서의 파장이 완경사방정식에 비하여 최고로 15.0%까지 커지고 여울의 상·하류지점에 굴절에 의한 파랑의 집중 현상이 약해지는 것을 알 수 있다. 반면에 수심경사의 제곱의 효과를 고려하면 여울에서의 파장이 완경사방정식에 비하여 최고로 5.0%까지 그다지 증가하지 않고 파랑의 집중 현상에 큰 변화를 야기시키지 않는 것도 알 수 있다.

여울의 중심점을 지나고 x축 방향으로 4개의 모형식(Radder와 Dingemans의 식, 이 식에 수심의 곡률항 또는 수심경사의 제곱항을 더한 식, Suh 등의 식)이 재현한 파랑의 진폭을 Fig. 3에 도시하였다. 이 결과는 Chandrasekera와 Cheung의 Fig. 7(a)에 나타낸 복합요소법에 의한 결과와 비교될 수 있다. 두 결과는 대체적으로 비슷하나 약간의 차이가 있다. 그 이유를 추측하여 보면 첫째로 그들은 계산영역의 전 경계선에 개방경계조건을 사용한 반면 본 연구에서는 좌·우 측방경계에 완전반사조건을 사용한 차이가 있다. 둘째로 그들은 복합요소법을 사용하였고 본 연구에서는 유한차분법을 사용한 차이가 있다. 이러한 두가지 차이가 수치해의 차이를 크게 야기시키지 않는다고 판단된다. 여울의 바로 앞부분을 비교하여 보면, 본 연구에서는 수심의 곡률 효과만을 고려하거나 곡률과 경사의 제곱 두 효과를 다 고려한 결과가 고차의 수심변화 효과를 하나도 고려하지 않거나 수심경사의 제곱 효과만을 고려한 것보다 크게 나타났다. 그러나, 그들의 결과는 이와 반대로 나왔다. 본 연구의 결과는, 파장이 길수록 굴절에 의한 파랑의 집중현상에 약해진다는 논리로 설명이 가능하다.

4. 맺음말

선형의 완경사방정식에 고차의 수심변화 효과를 고려함으로서 파랑의 굴절 현상을 예측하는데 있어서 각각의 효과(즉, 수심의 곡률 또는 수심경사의 제곱의 효과)가 어떻게 달리 영향을 미치는지 살펴보았다. 수중여울 위를 전파하는 파랑의 경우에 수치실험을 하고 eikonal 식을 사용하여 이를 분석하였다. 그 결과, 고차의 수심변화 효과는 파장을 변화시키고 이 변화된 파장은 파랑의 굴절의 정도를 변화시켰다. 즉, 파장이 길어지면 파랑이 굴절되는 정도가 약해지고, 파장이 짧아지면 파랑의 굴절되는 정도가 커졌다. 그런데, 이러한 고차의 수심변화 효과가 파랑의 굴절에 영향을 미치는 것이 실제로 발생할지는 물리적인 실험을 통하여 규명될 수 있을 것이다.

5. 참고문헌

Berkhoff, J.C.W. (1972). "Computation of combined refraction-diffraction", *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng.*, 471-490.

Chandrasekera, C.N. and Cheung K.F. (1997). "Extended linear refraction-diffraction model", *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 123, 280-286.

Copeland, G.J.M. (1985). "A practical alternative to the mild-slope wave equation", *Coastal Eng.*, 9, 125-149.

Lee, C., Park, W.S., Cho, Y.-S. and Suh, K.D. (1997). "Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography", *Coastal Eng.* (tentatively accepted).

Lee, C. and Suh, K.D. (1998). "Internal generation of waves for time-dependent mild-slope equations", *Coastal Eng.* (in press).

Massel, S.R. (1993). "Extended refraction-diffraction equation for surface waves", *Coastal Eng.*, 19, 97-126.

Mei, C.C. (1989). *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific, Singapore, 74-86.

Radder, A.C. and Dingemans, M.W. (1985). "Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves", *Wave Motion*, 7, 437-485.

Smith, R. and Sprinks, T. (1975). "Scattering of surface waves by a conical island", *J. Fluid Mech.*, 72, 373-384.

Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S. (1997). "Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography", *Coastal Eng.*, 32, 91-117.

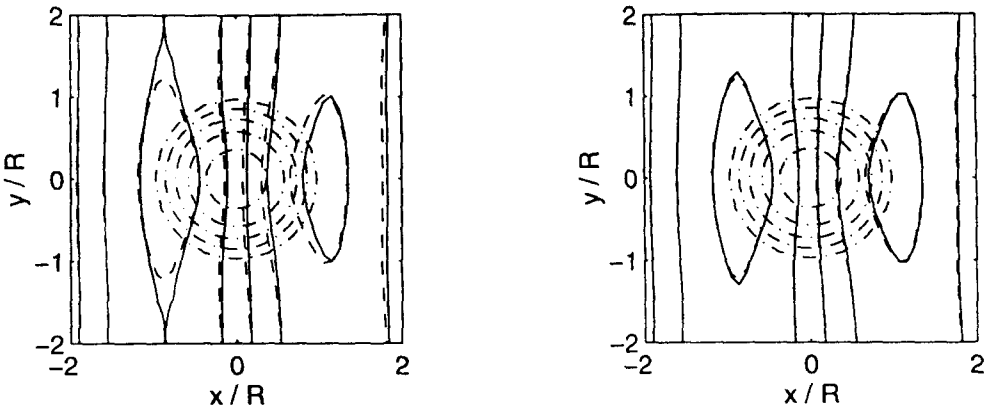

Fig. 1. Contour of water surface elevations calculated by the time-dependent wave equations: (a) —— = Radder and Dingemans' model including bottom curvature term, - - - - = Radder and Dingemans' model, - · - · - = depth contour; (b) —— = Radder and Dingemans' model including squared bottom slope term, - - - - = Radder and Dingemans' model, - · - · - = depth contour.

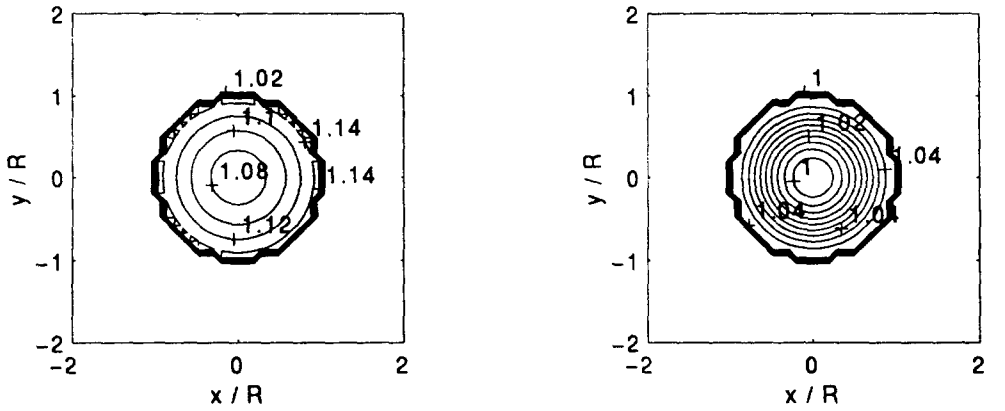

Fig. 2. Contour of $L/\bar{L}$ over a circular shoal: (a) mild-slope equation including bottom curvature term; (b) mild-slope equation including squared bottom slope term.

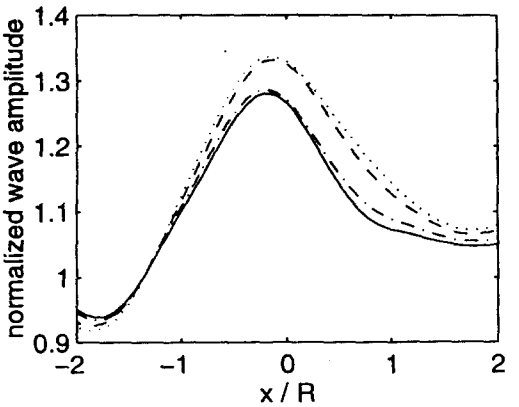

Fig. 3. Wave amplitudes over a circular shoal calculated by the time-dependent wave equations; ····· = Radder and Dingemans' model, - - - - = Radder and Dingemans' model including squared bottom slope term, - · - · - = Radder and Dingemans' model including bottom curvature term, ——— = Suh et al.'s model.