

비선형 분산파의 천수화

이 정 규*, 윤 성 범**, 오이 종 인***

1. 서 론

비선형파의 전파변형 해석에는 Stokes파 이론과 cnoidal파 이론이 일반적으로 이용되지만 수심의 제약을 받는 단점이 있다. Nadaoka 등(1997)은 이러한 문제점을 해결하기 위해 수평유속을 임의의 수심의존함수와 여러개의 조화함수를 도입하여 표시한 후 Galerkin기법을 적용하여 임의 수심에서 적용 가능하고 불규칙파를 해석할 수 있는 새로운 형태의 방정식을 유도하였다. 그리고 Beji와 Nadaoka(1997)는 이 식으로부터 규칙파를 모의하기 위한 비정상 환경사방정식을 유도하였다. 본 연구에서는 규칙파에 대한 전파변형을 모의하기 위해 Nadaoka 등의 식으로부터 하나의 수심의존함수만을 택하여 식을 유도한다. 그리고 지배방정식내의 비선형항의 처리를 Nadaoka 등의 방법과 달리하여 해석한 후 Nadaoka 등의 방법에 의한 해석결과와 비교한다. 1차원에 대한 수치모형을 구성한 후 일정수심에서의 Stokes파와 cnoidal파의 전파를 수치해석한 후 해석해와 비교하고, 수심변화에 따른 파랑의 천수현상을 검토한다.

2. 지배방정식

일반적으로 파동방정식을 얻기 위한 수학적과정은 3차원 방정식을 2차원 방정식으로 변환시키는 과정으로서, 최근 Nadaoka 등(1997)은 수평유속 $\vec{u}(\vec{x}, z, t)$ 를 수심의존함수(depth-dependence function) F_m 과 이에 상응하는 정수면상에서의 유속 \vec{U}_m 을 도입한 후 식(1)과 같이 이 함수들의 곱의 합으로 나타내었으며, 이를 이용하여 새로운 형태의 방정식을 유도하였다.

$$\vec{u}(\vec{x}, z, t) = \sum_{m=1}^N F_m(z, k_m h) \vec{U}_m(\vec{x}, t), \quad F_m(z, k_m h) = \frac{\cosh k_m(h+z)}{\cosh k_m h} \quad (1)$$

여기서, \vec{U}_m 과 k_m 은 각각 유평유속과 파수의 m 번째 성분이며, $h(\vec{x})$ 는 수심, $\vec{u} = (u, v)$, $\vec{x} = (x, y)$ 이다. 정수면상($z=0$)에서의 수평유속은 식(1)로부터 $\vec{u}_0 = \sum \vec{U}_m$ 임을 알 수 있다. 그리고 식(1)을 연속방정식에 대입한 후 적분하면 식(2)와 같은 연직방향 속도성분을 얻을 수 있다.

* 한양대학교 공과대학 토목공학과 교수

** 한양대학교 공과대학 토목·환경공학과 부교수

*** 한양대학교 대학원 토목공학과 박사과정

$$w(\vec{x}, z, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \nabla \cdot \left[\frac{\sinh k_m(h+z)}{k_m \cosh k_m h} \vec{U}_m(\vec{x}, t) \right] \quad (2)$$

여기서, ∇ 은 미분연산자, $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 이다.

그리고 연속방정식과 운동량방정식에 Leibnitz법칙과 경계조건을 이용하여 적분하고 식(1)을 대입한 후 선형 분산관계식 $\omega_m^2 = g k_m \tanh k_m h$ 을 이용하여 새로운 형태의 방정식을 유도하였다. 운동량방정식의 유도에는 Galerkin기법을 이용하였다. 이러한 새로운 형태의 방정식은 입사파의 주파수 폭이 넓은 경우에도 적용할 수 있는 약비선형 분산파의 거동을 해석하는 방정식이다 (Nadaoka 등, 1997).

본 연구에서는 규칙파의 전파변형을 해석하므로 Nadaoka 등의 식으로부터 하나의 수심의 존함수만을 택함으로서 다음과 같은 연속방정식 (3)과 운동량방정식 (4)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_p^2}{g} + \xi \right) \vec{u}_0 \right] = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & C_p C_g \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} + C_p^2 \nabla \left[g \xi + \xi \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0 + w_0^2) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{C_p(C_p - C_g)}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}_0) + \nabla \left[\frac{C_p(C_p - C_g)}{k^2} \right] (\nabla \cdot \vec{u}_0) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $\xi(\vec{x}, t)$ 는 자유수면변위, C_p 와 C_g 는 각각 파속과 군속도, g 는 중력가속도이다. 식(3)과 식(4)는 완전수심에서 입사파 주파수 스펙트럼의 폭이 좁은 약비선형파의 거동을 해석하는 방정식이다. 본 연구에서 사용할 지배방정식의 선형 분산특성의 비교를 위해 Smith와 Sprinks(1975)의 시간의존 환경사방정식 (5)를 사용하였다.

$$\xi_{tt} + \omega^2 \left(\frac{C_p - C_g}{C_p} \right) \xi - \nabla \cdot (C_p C_g \nabla \xi) = 0 \quad (5)$$

본 연구와 Nadaoka 등(1997)의 연구의 차이점은 운동량방정식 (4)의 비선형항, $\nabla(w_0^2)$ 과 $\nabla(\xi \partial w_0 / \partial t)$ 을 처리하는 방법에 있다. 수평유속벡터의 내적, $\nabla(\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0)$ 는 두 연구 모두 식(6)과 같이 표현한다.

$$\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0 = (u_0)^2 + (v_0)^2 \quad (6)$$

그러나 나머지 두 비선형항의 처리에는 다음과 같은 차이점이 있다.

(1) Nadaoka 등의 방법

Nadaoka 등은 w_0 의 산정에 추가적인 근사를 도입하였다. 즉, 일정수심에 대한 선형 연속 방정식, $\partial \xi / \partial t + C_p^2 (\nabla \cdot \vec{u}_0) / g = 0$ 을 이용하였으며, 또한 수평유속벡터 \vec{u}_0 를 다음과 같은 식으로 근사화하였다.

$$\vec{u}_0(\vec{x}, t) = \vec{u}_0^* \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t) \quad (7)$$

여기서, \vec{u}_0^* 는 유속벡터의 진폭을 나타내며, i 는 허수이다. 그리고 식(7)을 선형 연속방정식에 대

입한 후 다음과 같은 관계식을 도출하였다.

$$\zeta = \mp \frac{C_p}{g} (u_0^2 + v_0^2)^{1/2}, \quad \zeta_t = i\omega \frac{C_p}{g} (u_0^2 + v_0^2)^{1/2}, \quad \zeta_{tt} = \pm \omega^2 \frac{C_p}{g} (u_0^2 + v_0^2)^{1/2} \quad (8)$$

식(8)을 이용하여 운동량방정식의 w_0 에 관련된 항을 수평유속의 항으로 나타내었다. 즉, 선형 자유수면 경계조건, $w_0 = \zeta_t$ 을 이용하여 $w_0^2 = \zeta_t \zeta_t$ 와 $\zeta \partial w_0 / \partial t = \zeta \zeta_{tt}$ 로 표현한 후 여기에 식(8)을 대입하여 다음과 같은 관계식을 얻었다.

$$w_0^2 = \zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} = -\frac{\omega^2 C_p^2}{g^2} (u_0^2 + v_0^2) \quad (9)$$

그리고 Nadaoka 등은 식(9)가 진행파에 대한 식이므로 해석시 반사파가 발생할 경우 부호를 반대로 하면 된다고 제안하였다. 그러나 일반해역에서의 파랑은 진행파와 반사파가 중복된 형태로서 이를 각각 분리하여 해석한다는 것은 불가능하다.

(2) 본 연구의 방법

본 연구에서는 Nadaoka 등과 같이 진행파인 경우를 고려하여 비선형항을 처리하지 않고 연속방정식을 적분하여 얻은 식(2)에서 정수면상에의 유속, w_0 를 얻은 후 이를 비선형항에 대입 하므로써 진행파와 반사파가 동시에 존재하는 경우에도 적용이 가능하도록 하였다. 식(2)에서 일 정수심에서 정수면상의 연직속도성분은 다음과 같이 표현된다.

$$w_0 = -C_p^2 (\nabla \cdot \vec{u}_0) / g \quad (10)$$

그리고 수치해석시 비선형항을 Newton 선형화기법을 사용했기 때문에 비선형항을 다음과 같이 변환하여 사용하였다.

$$\frac{1}{2} (\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0 + w_0^2) + \zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} = \frac{1}{2} (\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0 - w_0^2) + \frac{\partial(\zeta w_0)}{\partial t} \quad (11)$$

3. 지배방정식의 분산특성 및 유한차분식

3.1 분산특성

본 연구에서 사용할 지배방정식의 선형 분산특성을 Smith와 Sprinks(1975)의 식과 비교하였다. 식(3)과 식(4)에서 비선형항을 무시한 후 $\zeta = a \exp[ik_a(x - C_a t)]$ 와 $u_0 = b \exp[ik_a(x - C_a t)]$ 를 대입한 다음, 그 결과식을 고유값문제로 풀면 식(12)과 같은 관계식을 얻을 수 있다(Mei, 1983).

$$C_a^2 = C_p^3 [C_g + (k_a^2/k^2)(C_p - C_g)]^{-1} \quad (12)$$

여기서, k_a 는 0에서 무한대까지 변하는 임의 입사파의 파수이고, C_a 는 파수 k_a 에 해당하는 파속이다. 그리고 C_p, C_g 는 미리 지정되는 파수 $k(=k_1$ 또는 k_2 또는 $k_3)$ 에 해당하는 파속 및 군속도이다. Smith와 Sprinks의 비정상 환경사방정식에 의한 분산특성은 식(12)의 결과를 얻을 때 사용한 방법을 적용하면 식(13)과 같다.

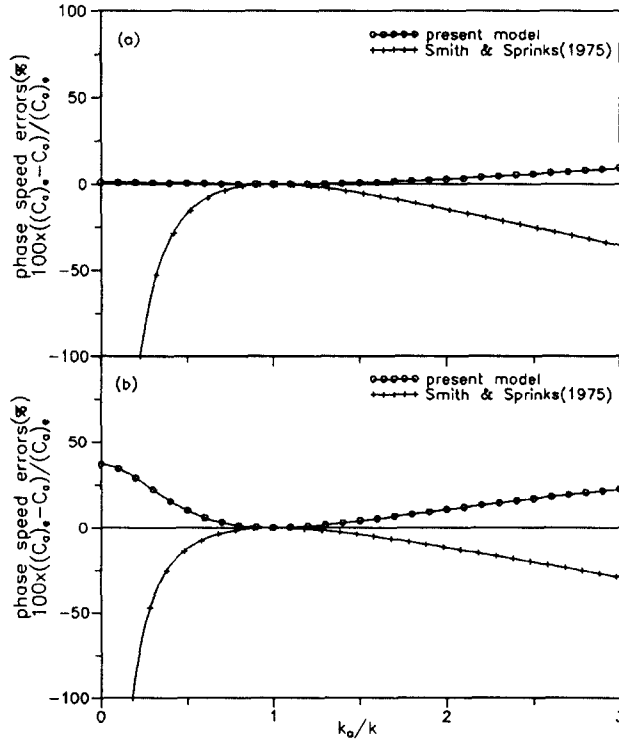


그림 1 본 연구의 지배방정식과 Smith와 Sprinks(1975)식의 분산특성

(a) 천해영역 ($kh = 1$), (b) 심해영역 ($kh = 5$)

$$C_a^2 = C_p[C_g + (k^2/k_a^2)(C_p - C_g)] \quad (13)$$

그림 1은 미리 정해진 k 와 임의의 k_a 를 달리하여 분산특성을 계산한 결과를 비교한 것이다. 그림 1(a)는 천해영역($kh = 1$)에 해당하는 파수 k 를 선택한 후 식(12)와 식(13)의 파속오차를 비교한 것이고, 그림 1(b)는 심해영역($kh = 5$)에 해당하는 파수를 선택한 후 그 결과를 비교한 것이다. Smith와 Sprinks의 방정식은 k 와 k_a 가 달라지게 되면 방정식을 적용할 수 없을 정도로 오차가 발생한다. 이로써 Smith와 Sprinks의 방정식은 입사파 주파수 스펙트럼의 폭이 좁은 경우에만 적용할 수 있다는 것을 알 수 있다. 본 연구에서 사용한 지배방정식은 심해영역에서 발산 하지는 않지만 많은 오차가 발생한다. 그러나 천해영역의 경우에는 $k_a/k = 3$ 까지 전반적으로 잘 일치하고 있고 Smith와 Sprinks의 결과보다는 매우 우수한 분산관계를 유지한다. 따라서 비교적 주파수 스펙트럼의 폭이 넓은 경우에도 적용될 수 있음을 보여준다.

3.2 유한차분식

연속방정식 (3)과 운동량방정식 (4)를 동시에 음해법으로 해석하였고, 비선형항은 Newton 선형화기법을 이용하여 유한차분화하였다. 유한차분은 leap-frog기법을 이용하였고 차분식은

block-tridiagonal matrix 형태로 구성된다. 비선형항은 다음과 같은 Newton 선형화기법을 이용하였다(Anderson 등, 1984).

$$(u_i^{k+1})^2 \approx 2u_i^{k+1}\hat{u}_i^{k+1} - (\hat{u}_i^{k+1})^2 \quad (18)$$

$$(w_{0,i}^{k+1})^2 \approx 2w_{0,i}^{k+1}\hat{w}_{0,i}^{k+1} - (\hat{w}_{0,i}^{k+1})^2 \quad (19)$$

$$(\zeta_i^{k+1} w_{0,i}^{k+1})^2 \approx \zeta_i^{k+1} \hat{w}_{0,i}^{k+1} + \zeta_i^{k+1} w_{0,i}^{k+1} - \zeta_i^{k+1} \hat{w}_{0,i}^{k+1} \quad (20)$$

여기서, \hat{u}_i^{k+1} , $\hat{\zeta}_i^{k+1}$, $\hat{w}_{0,i}^{k+1}$ 는 전 반복단계의 값으로 기지값이다.

4. 수치해석 및 결과검토

수립된 1차원 수치모형을 이용하여 일정수심을 전파하는 Stokes파와 cnoidal파를 모의하여 해석해와 비교하였다. Stokes파와 cnoidal파의 모의에 이용된 입사파는 각각 식(21)과 식(22)이다.

$$\zeta(x, t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{H^2 k}{16} \frac{\cosh kh}{\sinh^3 kh} (2 + \cosh 2kh) \cos 2(kx - \omega t) \quad (21)$$

$$\zeta(x, t) = z_t - h + H \text{cn}^2[2K(x/\lambda - t/T)] \quad (22)$$

여기서, z_t 는 수로바닥에서 파곡까지의 연직거리, H 는 입사파의 파고, cn 은 Jacobian 타원형함수, K 는 제1종 완전 타원형적분을 나타내며, λ 와 T 는 각각 입사파의 파장과 주기이다.

그림 2는 $h/\lambda=1.0, 0.5, 0.2$ 에 대해 입사파의 파고를 변화시키며 Stokes파의 전파를 해석한 결과로서 전반적으로 Nadaoka 등(1997)의 방법에 의한 해석결과가 해석해보다 빨리 전파하고, 파가 진행할수록 전반적으로 상승함을 알 수 있다. 특히, 비선형성이 증가할수록 이러한 현상은 뚜렷하게 나타난다. 그림 2(e, f)는 Stokes파 이론의 적용한계 부근으로서 본 모형의 해석결과는 Nadaoka 등의 결과보다 해석해와 잘 일치하고 있으나 파의 전파속도에서 약간의 차이를 보이고 있다. 이는 해석해를 구할 때 3차 Stokes파 파속을 이용했기 때문으로 사료된다. 그림 3은 $h/\lambda=1/20, 1/30$ 에 대해 입사파의 파고를 변화시키며 cnoidal파의 전파를 해석한 결과로서 Stokes파 해석결과와 비슷한 경향을 가진다. 그림 3(d)에서 보는 바와 같이 본 모형도 천해역으로 갈수록, 파랑의 비선형성이 증가할수록 파가 약간씩 빨라짐을 알 수 있고, Nadaoka 등의 방법에 의한 결과는 파곡부근에서 파의 형상이 왜곡됨을 볼 수 있다.

5. 맺음말

본 연구에서는 Nadaoka 등(1997)이 제안한 방정식에서 규칙파를 모의하기 위한 방정식을 얻은 후, 비선형항을 개선하여 일정수심을 전파하는 파랑을 해석하였다. 해석결과에 의하면 본 모형의 결과가 Nadaoka 등의 결과보다 우수함을 알 수 있었다. 그리고 임의수심에의 적용성을 1차원 수치모형을 구성하여 검토하였으며 추후 2차원으로 확장할 예정이다.

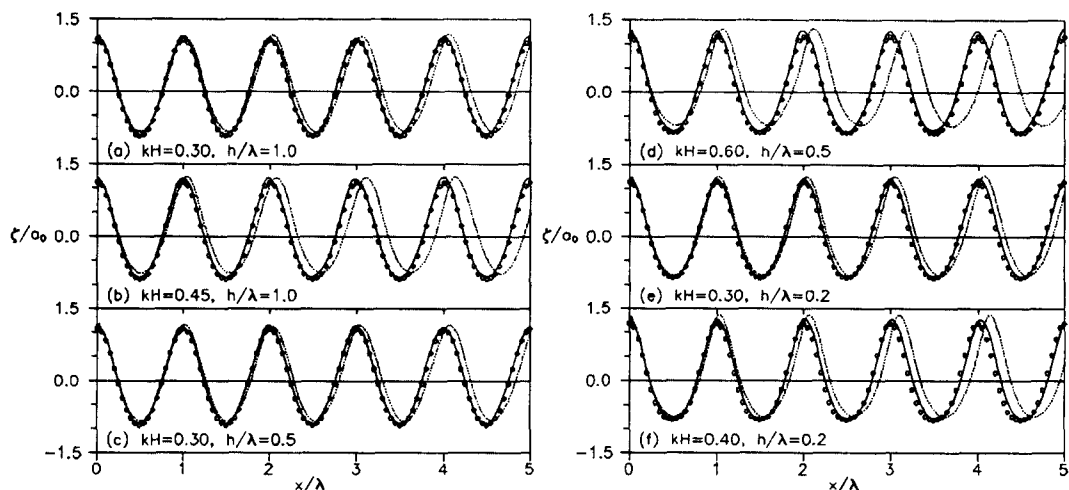


그림 2. Stokes파 수치실험; $\circ \circ \circ$, 해석해, —, 본 연구의 결과, - - -, Nadaoka 등의 결과

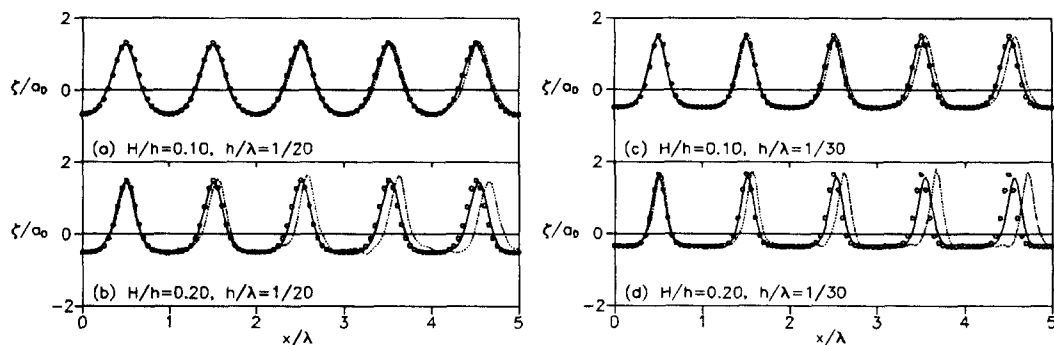


그림 3. Cnoidal파 수치실험; $\circ \circ \circ$, 해석해, —, 본 연구의 결과, - - -, Nadaoka 등의 결과

6. 참고문헌

- 조용식, 1995. 크노이드파의 매개변수산정. 한국해양해양공학회지, Vol.7, No.3, 227-232.
- Anderson, D.A., Tannehill, J.C. and Pletcher, R.H. 1984. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. McGraw-hill.
- Beji, S. and Nadaoka, K. 1997. A time-dependent nonlinear mild-slope equation for water waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* 453, 319-332.
- Mei, C.C. 1983. *The applied dynamics of ocean surface waves*. Wiley.
- Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y. 1997. A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* 453, 303-318.
- Smith, R. and Sprinks, T. 1975. Scattering of surface waves by a conical island. *J. of Fluid Mech.*, Vol. 72, 373-384.