제 12 장 관로설계에서 최적화 기법의 적용

김 중 훈

12.1 서 론

최적화 이론은 모든 가능한 대안에 대해 일일이 계산하고 평가해 보지 않고도 최선의 대안을 찾아내기 위한 수치계산방법이라 할 수 있다. 전통적으로 공학자의 사명은 기존의 시스템을 보다 효과적으로 운영할 수 있도록 계획을 해야할 뿐만 아니라 보다 경제적이고도 나은 새로운 시스템을 디자인해야 함에 있으므로 최적화과정은 공학과 그 뿌리를 같이 한다해도 과언이 아닐 것이다. 모든 경우를 테스트해 보지 않고도 최적의 경우를 결정하는 최적화 기법의 진정한 매력은 아주 높은 수준의 수학이 요구되지 않는다는 점과 명확한 논리과정이나 알고리즘을 사용하여 반복적인 수치계산을 컴퓨터로 수행한다는데 있다.

최적화이론은 본래 Operations Research(OR)에서 유래되었으며, OR은 과학적인 방법 · 수법 · 기법등을 시스템운용에 관한 문제에 적용하여 의사결정에 대한 계량적 기초 즉, 최적해를 제공하는 과학적 방법이라 정의될 수 있다. OR의 개념이 적용되는 분야는 아주 광범위하고 다양한 수자원공학 분야에 적용이 될 수 있다.

본 장에서는 최적화 기법의 간단한 소개와 함께 상수도 급배수 관로의 설계 및 운영분야에의 적용예를 살펴보기로 한다. 지면관계상 개념설명에 도움이 되는 간단한 예제를 위주로 설명할 계획으로 더 자세한 이론과 실 적용예를 위해서는 참고문헌을 이용하기 바란다.

12.2 OR 및 수자원시스템공학의 유래

산업혁명은 산업체의 규모를 크고 복잡하게 만들었으며, 특히 노동력의 분업화와 관리책임의 분할을 초래하였다. 이와 같은 산업의 분업화는 몇 가지 문제점을 야기

시키게 되었다. 예를 들면 산업체의 개개 구성체는 나름대로의 가치시스템과 목표를 추구하게 되고 따라서 전체로서의 기관이 추구해야 할 방향과 목적에 대한 시각을 잃는 폐단과 이와 관련하여 산업체의 전문화와 복잡성이 증가됨에 따라 전체 시스템의 입장에서 효과적으로 가용한 자원들을 다양한 작업에 적절히 배정하기가 점점 어려워지게 되었다. 이러한 문제들을 더 나은 방법으로 해결하려는 노력이 OR을 태동시키게 된 것이다. 따라서 OR의 뿌리는 몇 세기 전으로 거슬러 올라간다고 할 수 있다.

그러나, 일반적으로 말해서 소위 Operations Research(작전연구 또는 운용연구)라 불리는 학문은 제2차 세계대전 초기의 군사활동으로부터 유래되었다. 영국의 과학자들은 부족한 군 자재를 여러 군사 작전에 적절히 배치하여 효과적인 작전수행을 할 수 있도록 하였고, 이어서 미국에서도 군사작전에 응용되었다. 이와 같은 제2차 세계대전에서의 OR의 성공적인 활용의 영향은 전후 여러 산업분야에 파급되기 시작하였고, 전쟁 중 OR팀에 합류했었거나 성공담을 접한 학자들이 OR에 관한 연구를 수행하게 되는 동기를 부여하였다. 그 결과 이 분야에 많은 학문적 발전을 가져오게 하였다. 그 대표적인 예를 들면 1947년에 George Dantzig는 선형계획법의 해석을 위한 단체법(simplex method)을 개발하였으며 OR의 대표적인 기법인 선형계획법(linear programming), 동적 계획법(dynamic programing), 재고문제(inventory problem)등은 이미 1950년대 말 이전에 비교적 잘 개발되었던 것이다. 이후 일어난 컴퓨터혁명은 이 분야의 발전에 큰 원동력이 되었다.

수자원시스템(hydrosystems)이라는 용어는 수문학, 수리학, 수자원공학에 경제학, 최적화기법, 확률론, 통계학, 경영학등의 개념을 도입한 학문영역을 가리키기 위하여 V.T. Chow에 의해서 처음 사용되었다. 수자원시스템에는 지표수공급시스템, 지하수공급시스템, 물 배분시스템, 홍수관리시스템, 폐수처리시스템등이 포함된다. 이러한 다양한 수자원시스템문제의 일반적인 형태는 다음과 같다.

①프로젝트의 적정 개발정도의 결정

②시스템을 형성하고 있는 다양한 구성체의 적정크기 결정

③시스템의 적정운영방법의 결정

12.3 최적화 기법의 소개

최적화 문제의 일반적인 형태는 결정변수 ($\boldsymbol{x}$)를 이용하여 나타내는데, 그 목적 함수는

$$\text{Optimize } f(\boldsymbol{x})$$

이며 다음과 같은 제약조건식

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

과 한계조건식

$$\underline{\boldsymbol{x}} \le \boldsymbol{x} \le \overline{\boldsymbol{x}}$$

을 만족시켜야 한다.

여기서 $\boldsymbol{x}$는 n개의 결정변수(x_1, x_2, · · ·, x_n)를 나타내는 벡터이고, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$는 m개의 제약조건식을 나타내는 벡터이며, $\underline{\boldsymbol{x}}$와 $\overline{\boldsymbol{x}}$는 각각 결정변수들의 하한과 상한 값을 나타낸다.

모든 최적화 문제는 목적함수와 제약조건식들의 두 중요한 부분으로 구성되어 있다. 목적함수는 시스템의 최적화 정도를 나타내는 척도라고 볼 수 있고 그 척도가 비용(경비)일 경우는 최소화(minimizing)문제이며, 이익일 경우는 최대화(maximizing)문제가 된다. 제약조건식은 시스템이 설계 또는 해석되어야 하는 조건들을 수식으로 나타낸 것이며 등식 또는 부등식의 형태로 주어진다. 제약조건식으로는 기술적 조건, 경제적 또는 예산에 관련된 조건, 설계조건, 운영조건, 수요조건 등이 있을 수 있다. 가능해영역(feasible region)이란 제약조건식들에 의해 정의되는 가능해의 영역이고, 가능해(feasible solution)는 제약조건식들을 동시에 만족시키는 결정변수값의 집합이며, 최적해(optimal solution)는 가능해 중 최적의 목적함수를

제공하는 해를 말한다.

12.3.1 재래식 모의방법과 최적화 방법의 비교

재래식설계 및 해석방법은 주로 반복적인 시행착오법에 의한 것인데, 이방법의 효율성은 공학자의 경험, 기술, 직감, 수자원시스템의 지식정도 등에 좌우된다. 따라서 재래식 방법은 인간적인 요소와 밀접한 관계에 있으며 그 결과 복잡한 시스템의 설계 및 해석에는 비효율적일 경우가 많다. 이에 반하여 최적화 방법은 설계를 계속 변경해야 하는 시행착오과정을 거치지 않고 대신 설계변수를 최적화 모델 자체가 변화시키는 방법이다.

최적화 모델은 어떤 시스템의 구성과 그 시스템이 다양한 설계변수에 따라 어떠한 반응을 보이는가를 수식들로 나타내는데 이들을 제약조건이라 한다. 제약조건식은 설계변수의 한계를 설정하는데 쓰이기도 하는데, 설계되는 시스템의 최적화 정도는 목적함수를 통해서 평가된다.

재래식 방법의 장점은 공학자의 경험과 육감이 시스템에 개념적으로 변화를 주는데 유용하게 쓰일 수 있고 추가적인 조항을 만들거나 바꾸는 데에도 유용하다는 점이다. 그러나 이 방법은 최적이 아닌 해를 구하기 쉽고 비경제적인 설계나 운영계획을 하게 될 수 있으며 대체로 적정해를 구하는데 아주 많은 시간을 요구하게 된다. 이에 반하여 최적화 방법은 의사결정을 위해 수학적 접근방법을 사용함으로써 논리 전개가 정연하다 할 수 있다. 최적화 방법을 사용하기 위해서는 공학자는 설계변수를 밝히고, 목적함수와 제약조건식을 세워야 하며, 때로는 수식으로 시스템을 나타내는 과정에서 오류를 범할 수도 있으므로 실무적인 견지에서 모델을 개발하도록 노력해야 한다.

12.3.2 선형계획법 (Linear Programming)

개발된 최적화 모델의 목적함수와 제약조건식 모두가 선형함수로 주어지면 이 최적화문제는 선형계획법문제(linear programming problem)라 불리우며, 선형계획법에 의해 풀이될 수 있다.

선형계획법문제의 일반적인 형태는 다음과 같이 나타내어질 수 있다

$$Max \ (\text{or } Min) \ x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (12.1\ a)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \cdots\cdots, n \qquad (12.1\ b)$$

$$x_j \ge 0 \quad \text{for } j = 1, 2, 3 \cdots\cdots, n \qquad (12.2\ c)$$

여기서 식 12.1 a는 목적함수식, C_j는 목적함수계수이며 식 12.1 b는 기술적 제약조건식, a_{ij}는 기술적 계수, b_j는 우변(RHS)계수, 식 12.1 c는 비음조건 (nonnegativity constraint)이다.

제약조건식들이 전부 선형함수이므로 가능해영역은 다각형의 내부와 경계선으로 주어지게 되는데 이 다각형의 꼭지점을 가능꼭지점(feasible extreme point)이라 한다. 이와 관련해서 선형계획법은 다음과 같은 세가지의 중요한 특성을 가진다.

특성 1 - 선형계획법문제의 최적해가 하나만 존재한다면 그것은 어떤 한 꼭지점이다. 만약 최적해가 여러 개 존재한다면 그중 적어도 두 개는 인접한 꼭지점들이다.

특성 2 - 가능꼭지점의 갯수는 유한하다.

특성 3 - 어떤 한 가능꼭지점이 인접해 있는 두 가능꼭지점보다 낫다면 (목적함수로 비교해서) 그 꼭지점은 바로 인접해 있는 다른 어떤 꼭지점보다도 낫다.

위의 세가지 특성으로 미루어 선형계획법의 최적해는 항상 가능꼭지점에서만 발생함을 알 수 있고 일단 어떤 한 가능꼭지점에서의 목적함수값을 인접한 주위의 두

가능꼭지점에서의 값과 비교하기만 하면 되며, 일단 특성3이 만족되기만 하면 현재의 가능꼭지점이 전체최적해(global optimum)임을 알 수 있고, 더 이상 다른 가능꼭지점을 조사할 필요가 없게 된다. 위와 같은 선형계획법의 특성3이 유효하기 위해서는 가능해영역이 볼록(convex)하여야 하며, 만약 그렇지 못할 경우 얻어진 최적해는 전체최적해라고 할 수는 없으며 국지최적해(local optimum)라 불리운다. 이런 현상은 특히 비선형계획법(nonlinear programming)문제에서 흔히 일어나는데, 다행히도 선형계획법 문제에서는 가능해영역이 거의 언제나 볼록(convex)으로 주어진다.

가. 선형계획법문제의 예
(공장폐수처리문제, Mays & Tung 1992)

어떠한 제조공장과 폐수처리장으로 되어 있는 시스템을 생각해 보자. 이 제조공장의 완제품은 개당 $1,000에 팔린다. 개당 제조비용은 $3,000이다. 그러나 이 제품의 제조과정에서 1개의 완제품 제조를 위해서는 2개단위의 폐수가 발생된다. 이 시스템의 매니저는 얼마나 많은 완제품을 만들것인가 결정해야 함은 물론 발생되는 폐수중 얼마를 처리하지 않고 방류할 것인가를 결정하여 강 하류의 수질조건을 범하지 않는 범위 내에서 회사의 총 순이익을 극대화 하여야한다. 폐수처리장은 최대 개 단위의 폐수를 처리할 용량을 가지고 있으며 처리효율은 80%이다. 처리에 드는 비용은 폐수 1개 단위당 $600이다. 처리되지 않고 방류되는 폐수에 대해서는 1개 단위당 $2,000 의 환경세금을 부과한다. 이 지방 환경청은 각 공장이 배출할 수 있는 폐수의 최대 방류허용치를 4개 단위로 규제하고 있다. 이 문제를 선형계획법으로 수식화하라.

〈풀이〉

제일 먼저 할 일은 이 시스템의 구성체를 밝히고 서로간의 관계를 규명하는 것인데 이 예제의 경우 시스템 구성체는 제조공장, 폐수처리장, 강으로 볼 수 있다. 문제 설명에서 볼 때 이 문제는 다음과 같은 두 개의 결정변수를 가짐을 알 수 있다. 즉, (1)제조해야 할 완제품의 갯수, x_1; (2)처리하지 않고 방류할 폐수의 양, x_2.

이 문제의 시스템 구성체간의 연관 관계는 그림 12.1과 같이 도식화될 수 있다.

모델을 세우기 전에 목적함수와 제약조건식을 밝힐 필요가 있다. 이 예제의 경우 목적은 이윤을 최대화 시키는 것이며, 제약조건은 주로 폐수처리장의 처리용량의 한계 그리고 지방환경청에 의해 정해진 폐수방류 최대허용한계에 의해 정해진다. 이것을 수학적 식으로 나타내는 것을 수식화한다고 한다.

다음의 네가지가 공장주의 이윤과 관련된다: (가)완제품의 판매(단위:$1,000), x_1; (나) 제품제조비용, $3x_1$; (다)폐수처리에 드는 비용, $0.6\,(2x_1-x_2)$; (라)처리되지 않고 방류되는 폐수에 대한 세금, $2[x_2+0.2(2x_1-x_1)]$. 공장주의 이윤은 총 판매수입에서 총 비용을 뺀 것과 같으므로 이 문제의 목적함수는 (가)-{(나)+(다)+(라)}를 최대화 하는 것이다. 즉, $10x_1-\{3x_1+0.6(2x_1-x_2)+2[x_2+0.2(2x_1-x_2)]\}=5x_1-x_2$ 이다. 따라서 목적함수는 다음과 같이 나타내진다.

$$Max \quad x_0=5x_1-x_2$$

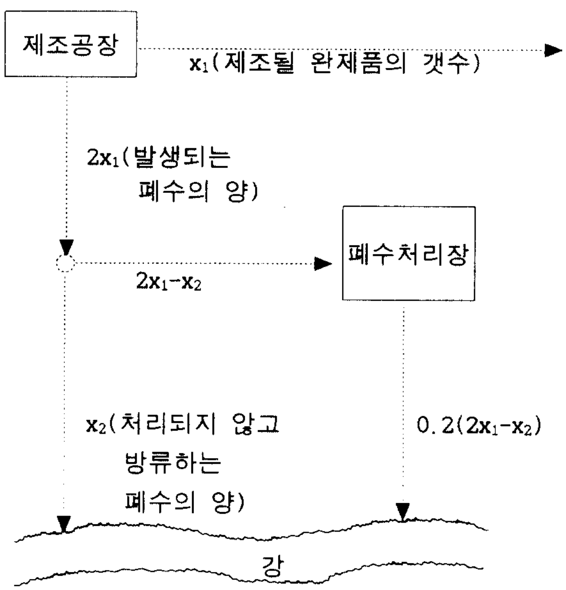

그림 12.1 시스템 구성체간의 관계를 나타내는 모식도

그림 12.1에 의하면 폐수처리장의 처리용량한계에 의한 제약조건식은

$$2x_1 - x_2 \leq 10$$

로 주어지며, 폐수처리장으로 보내지는 폐수는 10개 단위를 초과할 수 없다는 의미이다.

마찬가지로 폐수처리방류 최대허용한계에 관한 제약조건식은

$$x_2 + 0.2(2x_1 - x_2) \leq 4$$

로 나타내어지며, 위 식에서 좌변은 강으로 방류되는 폐수의 총량이며 우변의 4는 방류허용치이다.

이상에서 정의한 두 개의 명확한 제약조건식 외에 이 문제와 관련해서 제약조건식을 하나 더 추가한다면 폐수처리장으로 가는 폐수의 양은 음수일 수가 없다는 것이다. 다시 말해서 $2x_1 - x_2$에 대한 비음조건이며, 다음과 같이 주어진다.

$$2x_1 - x_2 \geq 0$$

마지막으로 두 결정변수 x_1과 x_2는 실제적으로 음의 값을 가질 수 없다는 비음조건 즉, $x_1 \geq 0$과 $x_2 \geq 0$ 이 추가되어야 한다. 따라서 최종적으로 이 문제에 대한 수학적 모델은 아래와 같이 요약된다.

$$Max \quad x_0 = 5x_1 - x_2$$

subject to

$$2x_1 - x_2 \leq 10$$

$$0.4x_1 + 0.8x_2 \leq 4$$

$$2x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

위에서 개발된 최적화 모델의 목적함수와 제약조건식들로부터 이 문제는 선형계획법문제임을 알 수 있다. 이와 같은 문제의 해를 위해서는 도해법(graphical method)과 단체법(simplex method)이 있다.

나. 도해법

도해법은 선형계획법의 풀이를 위한 제일 간단한 방법이지만 결정변수가 3개 이상이 되면 거의 풀이가 불가능해진다. 앞 절의 공장폐수처리 예제의 최적해를 도해법으로 구해보기로 한다.

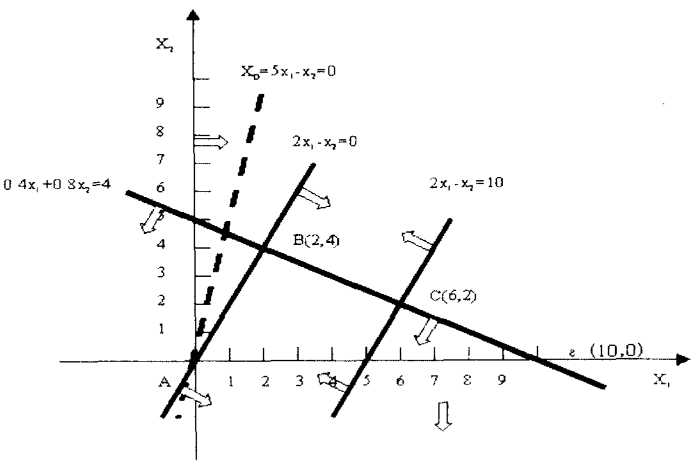

그림 12.2 공장폐수처리문제의 가능해 영역과 목적함수

우선 제약조건들을 이용하여 그림 12.2와 같이 가능해영역을 그리도록 한다. 그림 12.2와 같이 가능해영역은 빗금친 사각형(테두리 포함)이다. 굵은 실선은 각각

의 제약조건식을 등식으로 놓았을 경우를 나타내며 실제로 이 문제의 제약조건식은 부등식이므로 그림 상에는 반쪽평면 (half-plane)으로 나타내야하며 이를 위해 화살표 표시를 하였다. 비음조건을 포함한 제약조건식들을 동시에 만족하는 영역이 가능해 영역이고, 이 문제의 경우 가능꼭지점은 A, B, C, D의 4개이다.

우선 $x_0=0$ 인 직선을 그린다. 즉, 목적함수식이 원점을 지나도록 한다. 수학적으로 말하면 $5x_1-x_2=0$ 선상의 모든 점은 총 순이익이 0임을 의미한다. 이들 점중에서 빗금친 가능해영역 안에 해당되는 점들에게만 우리의 관심이 있음은 물론이다. 총 순이익이 증가될 수 있는지 알아보기 위해 $x_0=0$인 선을 평행하게 좌우로 움직이면 목적함수의 값이 변하는 것을 알 수 있다. 목적함수 x_0의 값을 증가시킨다는 것은 $x_2=5x_1$인 직선의 절편을 "-"방향으로 증가시킴을 의미하므로 목적함수의 값을 증가시키기 위해서는 직선을 계속해서 오른쪽으로 평행하게 움직여야 함을 알 수 있다. 목적함수직선이 적어도 가능해영역의 한 점을 통과해야 하므로 C점보다 더 이상 오른쪽으로 간다는 것은 의미가 없다. 따라서 C점을 통과하는 직선이 최적의 목적함수값을 나타내는 선이며 C점에서$x_1=6$, $x_2=2$이므로 이 제조공장은 6개의 완제품을 만들고, 부수적으로 생기는 12개단위의 폐수중 2개단위를 처리하지 않고 직접 강으로 방류할 때 총 순이익 $x_0=5x_1-x_2=$ \$28,000 (모델을 수식화 할 때 화폐단위를 \$1,000으로 했으므로)임을 알 수 있다.

다. 단체법 (Simplex Method)

선형대수학에서 미지수 즉, 결정변수의 갯수(n)가 식의 갯수(m)보다 많을 경우 (n-m)개의 미지수를 0으로 놓고 나머지 m개의 미지수에 대해 해를 구한다. 이와 같이 해서 구한 해를 기본해(basic solution)라 하고, 이 m개의 미지수를 기본변수(basic variable)라 부른다. 한편 0으로 놓는 (n-m)개의 결정변수를 비기본변수(nonbasic variable)라 부른다. 앞 절의 예제에서 결정변수는 x_1과 x_2 두 개였으나 실제로 선형대수로 해석하려면 부등호인 3개의 제약조건식을 등호로 바꾸어 주기위해 3개의 여유변수(slack variable)를 추가로 고려해야 하므로 총 5개의 결정변수에 대하여 3개의 제약조건식(등식)이 있는 것이다. 따라서 비기본변수의 갯수는 5-3=2개이고 기본변수의 갯수는 3개이다. 이 경우 이론상 총 ${}_nC_m$ = ${}_5C_3$ = 10개까지의 기

본해가 존재할 수 있으며, 기하학적으로 각각의 기본해는 두 제약조건식간의 교차점이라 할 수 있다. 그림 12.2에서의 경우 총 6개의 기본해가 존재함을 알 수 있으며 이중 4개만이 가능꼭지점이다.

단체법의 기본 풀이방법은 각 가능꼭지점과 이에 근접한 두 가능꼭지점에서의 목적함수값의 크기를 비교해 가면서 순차적으로 최적값을 찾아가는 것이다. 단체표(simplex tableau)를 작성하여 변수를 가능꼭지점마다 기본해와 비기본해로 나누어서 차례로 목적함수값을 구하여 최적값을 구한다.

이 방법을 행렬(matrix)형태로 나타내어 수정단체법(revised simplex method)으로 설명하면 다음과 같다.

목적함수:

$$Max(\text{or } Min) \ \ x_0 = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

제약조건;

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

여기서 **I** 는 단위행렬, **c**는 목적함수 계수벡터이고, **A**는 제약조건식의 계수벡터, x는 변수이다. 목적함수식과 제약조건식을 전개하면

$$Max \ \ x_0 = \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T \boldsymbol{x}_N$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

첨자 B는 기본해(basic variable)를 의미하고 첨자 N은 비기본해(nonbasic variable)를 의미한다. 벡터 B와 N은 제약조건식의 기본해와 비기본해에 관계되는 계수값이다. 풀이과정에서 비기본해는 0이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Max \ \ x_0 = \boldsymbol{c}_T^B \boldsymbol{x}_B$$

$$\boldsymbol{Bx}_B = \boldsymbol{b}$$

위 식의 해가 최적해이며 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}_I^T & \boldsymbol{c}_B^T - \boldsymbol{c}_{II}^T \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x}_I \\ \boldsymbol{x}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

여기서 $\boldsymbol{x}_I$는 초기 비기본변수 벡터이고 $\boldsymbol{x}_{II}$는 초기 기본변수 벡터이다.

12.3.3 비선형계획법 (Nonlinear Programming)

목적함수와 제약조건이 선형이라는 선형계획법에서의 조건은 많은 실제 문제에서도 적용되지만 그렇지 못한 경우도 많이 있다. 비선형계획법 문제의 예를 들기 위해서 선형계획법에서의 예제를 다시 생각해 보기로 한다. 이 문제에서 다른조건은 다 동일하되 한 개의 완성품생산당 폐수발생량이 $2x_1$인 대신에 $2x_1^{0.8}$으로 주어진다고 가정하면 이 문제는 아래와 같은 비선형계획법 문제가 된다.

$$Max \quad x_0 = -2x_1^{0.8} + 7x_1 - x_2$$

subject to

$$2x_1^{0.8} - x_2 \leq 10$$

$$0.4x_1^{0.8} + 0.8x_2 < 4$$

$$2x_1^{0.8} - x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

비선형계획법 문제의 형태는 아주 다양하기 때문에 선형계획법에서의 단체법과

는 달리 어떤 한 알고리즘이 모든 형태의 비선형계획법 문제에 적용될 수는 없다. 따라서 비선형계획법의 알고리즘들은 다양한 문제의 형태에 맞추어 개발되어 왔다. 이들 중 가장 중요하다고 생각되는 것들만 소개해 보기로 한다.

가. 제약조건이 없는(unconstrained) 경우의 최적화

이 경우 목적함수는 **x**의 모든 값에 대하여

$$Max\ (or\ Min)\ \ f(\mathbf{x})$$

여기서 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot, x_n)$이다. $f(\mathbf{x})$가 미분 가능할 때 어떤 해 **x**가 최적해 $\mathbf{x}^*$이기 위한 필요충분조건은

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad \text{at } \mathbf{x}^* = \mathbf{x} \quad \text{for } j = 1,\ 2,\ \cdot\cdot\cdot,\ n. \qquad (12.2)$$

단, 최대화 문제일 경우 $f(\mathbf{x})$는 오목(concave), 최소화 문제일 경우는 $f(\mathbf{x})$는 볼록(convex)이어야 한다. (convexity에 관한 자세한 설명은 Hillier & Lieberman 1990, Appendix 1 참조). 그러면 (12.2)식의 n개의 편미분방정식을 풀면 $\mathbf{x}^*$의 해를 구할 수 있다. 그러나 비선형함수 $f(\mathbf{x})$의 미분방정식들도 비선형일 경우가 많으며, 이 경우 해석적으로 풀기가 난해해지므로 어떤 알고리즘을 이용한 탐색과정을 거쳐서 $\mathbf{x}^*$를 구하게 된다. 이러한 탐색과정들은 제약조건식이 있는 최적화문제의 해석에서도 유용하게 쓰이는 경우가 많다. 대체로 제약조건식이 있는 문제의 해석을 위한 알고리즘들은 매 반복계산 때마다 제약조건이 없는 최적화문제의 형태로 계산하기 때문이다.

우선 결정변수가 하나인 경우 (n=1), (12.2)식에서 x^*의 탐색과정은 x의 탐색구간을 정해놓고 하는 반복계산이다. 즉 그 구간의 일부분을 삭제하여 탐색구간을 줄

여 나가는 과정이다. 따라서 이러한 방법들을 구간제거법(interval elimination techniques)이라 부르며, Golden section method, Half-interval search method (Bolzano search plan) 등이 있다.

결정변수의 갯수가 n>1인 경우를 위한 알고리즘들은 아래와 같은 기본 단계를 거친다.

(0) 시작점을 결정한다. $\mathbf{x}^{k=0} = (x_1^0, x_2^0, \cdot \cdot \cdot, x_n^0)$

(1) 탐색방향 $\mathbf{d}^k$를 결정한다

(2) 다음 식을 이용하여 새로운 점을 구한다.

$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \beta^k \mathbf{d}^k$ β^k는 $f(\mathbf{x}^k + \beta^k \mathbf{d}^k)$를 최적화시키는 step size이다.

(3) 계산을 종료할 지 결정한다. (convergence criteria)

아직 만족스럽지 못하면 k=k+1로 놓고 다시 (1)단계로 간다.

알고리즘의 종류는 (2)단계에서의 선분탐색(line search), $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \beta^k \mathbf{d}^k$ 에서 탐색방향벡터 $\mathbf{d}^k$를 결정하는 방법에 따라 크게 descent methods, Newton's methods, quasi-Newton methods, conjugate direction methods의 네 부류로 나뉘게 된다. 이들 중 제일 단순한 방법은 steepest descent method로서 $\mathbf{d}^k$를 최대화 문제에서는 $\nabla f(\boldsymbol{x})$, 최소화 문제에서는 $-\nabla f(\boldsymbol{x})$로 하는 방법이다. 더 자세한 설명과 다른 방법들에 대해서는 참고문헌에 잘 나와있다.

나. 제약조건이 있는(constrained) 경우의 최적화

제약조건이 있는 경우의 최적화 문제에서는 가능해영역이 유한한 공간에 국한된다. 따라서 제약조건이 없는 경우의 최적조건이 제약조건이 있는 경우에도 항상 적용이 되지는 않는다. 다시 말해서 제약조건이 있는 최적화 문제의 최적해는 (12.2)식의 gradient vector가 0이 아닌 가능해 영역의 경계나 꼭지점에서 발생할 수도 있는 것이다. 이에 따라 제약조건이 있는 비선형문제의 최적조건이 따로 개발되었는데 그것이 바로 KKT조건(Karush-Kuhn-Tucker conditions)이다. 이 KKT조건들은 제약조건이 있는 어떠한 선형이나 비선형계획법 문제에서 국지 또는 전체최적해가

되기 위해서는 꼭 만족이 되어야 한다.

모든 제약조건식이 선형이고 목적함수만 비선형인 문제를 linearly constrained optimization 이라고 하며, 비선형 목적함수를 고려하기 위해 단체법을 연장하는 방법들이 개발되었다. 이들 중 하나가 quadratic programming이며 목적함수가 어떤 변수의 자승 또는 다른 변수와의 곱과 같이 2차 함수로 주어지는 특별한 경우에 해당된다.

Convex programming 이란 모든 제약조건식이 convex이고 목적함수는 최대화 문제에서는 concave, 최소화문제에는 convex인 최적화문제에 해당된다. 이러한 유형의 모든 문제에 적용되는 하나의 표준알고리즘은 없으며 제각기 다른 장단점을 지닌 알고리즘들이 개발되었는데 이들은 다음의 세가지 부류로 나뉜다. 첫째는, gradient algorithms으로 12.3.3.1절의 경사 탐색과정을 수정하여 탐색경로가 제약조건식의 경계를 넘어가지 않도록 하는 방법으로서 generalized reduced gradient (GRG) method가 가장 대표적이다. 둘째로는, sequential unconstrained algorithms로서 penalty function method 와 barrier function method가 있다. 이 방법들은 제약조건을 목적함수에 포함시킴으로써 unconstrained 문제를 연속적으로 푸는 것으로 제약조건을 어기는 변수값에 대해서 목적함수에 벌점을 주는 방법이다. 셋째 부류는 sequential-approximation algorithms으로서 이에는 선형근사법(linear approximation)과 2차함수 근사(quadratic approximation)법이 있다. 이 방법들은 비선형 목적함수를 연속적인 linear(또는 quadratic) approximation으로 대체하는 것이다. 만약 제약조건식들이 전부 선형일 경우는 선형계획법이나 quadratic programming을 반복적으로 푸는 것일 것이다. 이 두가지 중 전자의 대표적인 방법이 Frank-Wolfe algorithm 이다.

표 12.1 각 프로그램의 기능비교

프로그램	풀이가능
AMPL	LP, NLP, MILP
GAMS	LP
GAMS/MINOS	LP, NLP
GAMS/OSL	LP, MILP
GAMS/DICOPT	LP, NLP, MILP,MINLP
LINDO	LP, QP, MILP
GRG2	NLP
GINO	NLP
LINGO	LP, NLP
MINOS	LP, NLP
OSL	LP, QP, MILP
CPLEX	LP, MILP

LP : Linear Programming
QP : Quardratic Programming
NLP : Nonlinear Programming
MILP : Mixed-Integer Linear Programming
MINLP: Mixed-Integer Nonlinear Programming

위에서 소개된 convex programming의 방법들은 전체최적해를 목표로 하는 방법들이지만 불행히도 실무에서 대하게 되는 비선형계획법 문제에서는 제약조건식과 목적함수의 convexity에 관한 convex programming의 가정이 잘 적용되지 않는 경우가 많다. 이러한 nonconvex programming을 위한 방법은 시작점을 계속 바꾸어서 여러번 convex programming을 시도한 뒤, 얻어진 여러 국지최적해중 제일 나은 것을 채택하는 것이다. SUMT(sequential unconstrained minimization technique)는 이런 방법중의 하나이다.

이상에서 최적화기법에서 가장 기본이 되는 선형계획법과 비선형계획법에 대해 간단히 알아보았다. 지면이 부족한 관계로 최적화이론에 대한 설명으로 미흡한 점이 많으나, 최적화 기법이란 무엇이며 대표적인 알고리즘에는 어떤 것들이 있는지 소개하는데 역점을 두었다. 각 알고리즘의 기본이론과 상세한 서술을 위해서는 참고문헌을 활용하기를 적극 권장하는 바이다.

12.4 관망시스템에 대한 적용

관망시스템은 크게 분기형(branched)시스템과 회로형(looped)시스템으로 나뉘어 해석이 되는데 두 시스템의 대표적인 차이점은 분기형시스템에서는 각 관에서의 유량이 정해져 있는데 반하여 회로형시스템에서는 각 관에서의 유량이 변수로 취급되어야 하기 때문에 그 해석과정이 더 복잡하다 할 수 있다. 최적화기법의 적용에 있어서도 두 시스템을 나누어 고찰해 보는 것이 이해에 더 도움이 되리라 생각된다.

12.4.1 분기형 관망시스템

가. 해석/설계절차

분기형 관망시스템은 말단부에서의 수요유량(water demand)이 정해져 있어 각 관에서의 유량은 말단부의 관으로부터 역으로 합산해 나가면 쉽게 구해진다. 따라서 각 절점 또는 분기점에서의 연속방정식인 절점방정식(각 절점에서 들어오는 유량과 나가는 유량은 같다)은 이미 충족이 되어 있는 상태라 할 수 있다. 일단 어떤 한 관에서의 유량이 주어지면 관의 길이, 조도와 함께 어떤 실험관경에 대해서 그 관에서의 손실수두를 Darcy-Weisbach공식 또는 Hazen-Williams공식으로부터 계산할 수 있게 된다. 각 관에서의 손실수두가 계산되면 전체 노선에서의 손실수두의 합을 구하여 주어진 펌핑(양수)시설의 양정고가 이 손실수두의 합을 제외하고도 말단부에 충분한 수압을 전달하는지 확인해야한다. 만약 수압조건이 만족되지 않으면 실험적으로 취했던 각 관의 관경을 다시 조정하거나 펌핑시설을 늘려서 다시 위의 계산과정을 만족스러울 때까지 반복하여야 한다.

나. 최적설계이론

위에서 소개된 설계절차는 많은 시행착오를 거쳐야 하며 특히 분기된 노선이 많을 경우 요구되는 작업량은 방대해진다. 많은 시행착오과정을 통해 조금씩 나은(수리학적으로 안정되고 경제적인)시스템의 설계가 가능하지만 투자되는 많은 시간과

노력에도 불구하고 최적조건의 설계라고는 할 수 없다. 따라서 일찍부터 분기형관망시스템의 최적설계를 위한 연구가 있어왔다. Karmeli등(1968), Gupta(1969), Calhoun(1971), Gupta등(1972)은 분기형 관망시스템의 최적설계를 선형계획법(linear programming)으로 수식화하였다. Schaake와 Lai(1969), Liang(1971)은 비선형계획법(nonlinear programming)을 이용한 분기형 관망의 최적설계를 시도하였으나 선형계획법을 이용한 방법에 비해서 더 나은 결과나 계산상의 이점을 보여주지는 못하였다. 여기에서는 선형계획법을 이용한 분기형 관망시스템의 최적설계의 한 예를 소개하기로 한다.

일반적으로 관망시스템의 기능은 각 수요지에서 요구되는 유량을 충분한 수압으로 도달시키는 것이며 설계자는 이 유량 및 수압조건을 만족시키면서도 경제적인 시스템을 찾아야 하는 것이다. 최적화설계는 선형계획법과 같은 수학적 도구를 이용하여 설계자가 많은 시행착오를 거치지 않고도 최소비용의 시스템을 설계할 수 있도록 해준다. 따라서 최적화모형의 목적함수는 관망시스템 전체의 시설비를 최소로 하는 것이다. 목적함수를 식으로 나타내면

$$\text{Min } Z = \sum_{(i,j)\in I} \sum_{m\in M_{i,j}} C_{i,j,m} X_{i,j,m} + \sum_{k} CP_k XP_k \tag{12.3}$$

여기서 $C_{i,j,m}$은 단위길이당 관비용이며, I는 전체관망시스템내의 관의 집합, 지수 (i,j)는 절점 i와 j 사이의 관을 나타내고, m은 어떠한 상업용 규격관경, $M_{i,j}$는 절점 i와 j 사이의 관으로 선택될 수 있는 상업용 규격관경의 집합을 나타낸다. $X_{i,j,m}$는 m의 관경을 가지는 관의 길이이며, CP_k는 펌프 k의 단위양정고당 설치비용이며, XP_k는 펌프 k의 양정고이다.

제약조건으로는 관의 길이에 대한 제약조건, 필요압력수두에 관한 제약조건, 결정변수값이 음수일 수 없다는 비음조건 등이다. 관의 길이에 관한 제약조건식은

$$\sum_{m\in M_{i,j}} X_{i,j,m} = L_{i,j} \qquad (i,j)\in I \tag{12.4}$$

으로 주어지는데 여기서 $L_{i,j}$는 (i,j)구간의 관의 총 길이를 말한다. $X_{i,j,m}$은 (i,j)구간의

관의 전체길이가 아니라 각각의 관경을 가진 관길이를 나타낸다. 예를 들어 10개의 상업용 규격관경을 고려한다면 (i,j)구간내의 각각의 규격관경을 가진 10개의 관이 조합을 이루고 있다고 보면 된다. 따라서 위의 제약조건은 그 10개의 관의 총길이는 (i,j)구간의 길이와 같다는 의미이다. 이론상으로는 한 구간내에서 10개관경 각각에 대한 길이가 다 구해질 수 있지만 실제 최적결과로는 대개의 경우 한 구간에 1개의 관경이 선택되며, 간혹 두 개의 관경이 선택되는 경우도 있으나 실무적인 입장에서도 한 구간에서 두 관경의 관을 각각 어떤 길이로 시공하는 데는 어려움이 없다고 본다.

압력수두에 관한 제약조건은 용수를 공급하는데 있어서 용수의 사용성을 향상시키기 위해서 각 수요절점에서 일정 압력수두 이상을 유지시켜 주어야 한다는 것으로서 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$H_{D,n} + H_{\min,n} \le H_s + \sum_k XP_k IV_k - \sum_{(i,j)\in I_n} \sum_{m\in M_{i,j}} J_{i,j,m} X_{i,j,m} \quad n=1,\cdots,N \qquad (12.5)$$

$H_{min,n}$은 수요지점 n에서 요구되는 최소압력수두이며, H_s는 배수지(source)에서의 위치수두, $H_{D,n}$은 수요지점 n의 표고이다. $J_{i,j,m}$은 (i,j)구간에서 사용 가능한 관경별 관에서의 단위길이당 손실수두이며 Darcy-Weisbach공식으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$J = \frac{8\,f\,Q^2}{\pi^2\,g\,D^5}$$

여기서 f는 관의 마찰계수, Q는 유량, g는 중력가속도, D는 관경을 나타낸다. 이 식에서 f, Q, π, g 등은 각 관에 대하여 이미 주어진 값이며, 관경 D도 상업용 규격관경으로 정해져 있으므로 각 관경별로 $J_{i,j,m}$은 미리 구해지는 값이다.

마지막으로 결정변수인 관길이와 펌프양정고의 값은 음수일 수 없다는 비음조건(non-negativity)은 다음과 같다.

$$X_{i,j,m} \geq 0 \qquad (12.6\ a)$$

$$XP_k \geq 0 \qquad (12.6\ b)$$

다. 최적설계의 예

그림 12.3과 같은 분기형 시스템에 대하여 최소비용의 관경과 양수시설을 결정하는 선형계획법모형을 만들어 보기로 한다. 전체 관로구간의 갯수는 7개이고, 양수시설의 위치는 절점 0의 직하류이며, 절점 3, 6, 7은 수요절점이다. 관로구간의 길이는 각각 1000m씩이며, 상업용 규격관경은 5개만 고려하기로 하고 표 12.2에 예시한 관경별 단위길이 당 관의 비용을 사용하기로 한다. 각 관의 관마찰계수 f는 0.02로 한다. 배수지의 수위는 100m, 각 수요절점에서의 표고는 110m이며 수압조건은 0.5kg/cm^2(수두로는 5m)이다. 수요절점에서의 요구유량은 각각 0.1m^3/sec이고, 양수시설의 1m 양정고당 비용은 3,500,000원으로 하기로 한다.

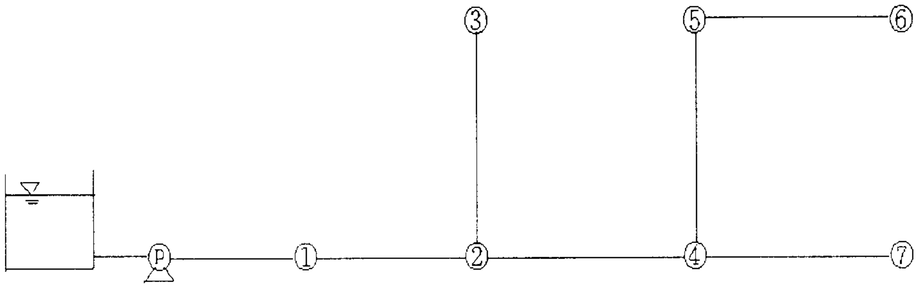

그림 12.3 분기형 관망시스템의 예

표 12.2 상업용 PE 일반관의 관경별 총공사비용

관경(mm)	재료비(원/m)	설치비(원/m)	총비용(원/m)
200	9,080	6,680	15,760
250	12,830	7,460	20,290
300	16,560	8,230	24,790
350	26,810	9,020	35,830
400	34,710	9,810	44,520

우선 선형계획법으로 수식화하면

$$
\begin{aligned}
\text{Min } Z = & + C_{0,1,1}\ X_{0,1,1} + C_{0,1,2}\ X_{0,1,2} + \cdots + C_{0,1,5}\ X_{0,1,5} \\
& + C_{1,2,1}\ X_{1,2,1} + C_{1,2,2}\ X_{1,2,2} + \cdots + C_{1,2,5}\ X_{1,2,5} \\
& + C_{2,3,1}\ X_{2,3,1} + C_{2,3,2}\ X_{2,3,2} + \cdots + C_{2,3,5}\ X_{2,3,5} \\
& + C_{2,4,1}\ X_{2,4,1} + C_{2,4,2}\ X_{2,4,2} + \cdots + C_{2,4,5}\ X_{2,4,5} \\
& + C_{4,5,1}\ X_{4,5,1} + C_{4,5,2}\ X_{4,5,2} + \cdots + C_{4,5,5}\ X_{4,5,5} \\
& + C_{5,6,1}\ X_{5,6,1} + C_{5,6,2}\ X_{5,6,2} + \cdots + C_{5,6,5}\ X_{5,6,5} \\
& + C_{4,7,1}\ X_{4,7,1} + C_{4,7,2}\ X_{4,7,2} + \cdots + C_{4,7,5}\ X_{4,7,5} \\
& + 3{,}500{,}000\ XP_1
\end{aligned}
$$

Subject to

(a) 관길이에 대한 제약조건

$$X_{0,1,1} + X_{0,1,2} + X_{0,1,3} + X_{0,1,4} + X_{0,1,5} = 1000 \quad (\text{0-1구간})$$
$$X_{1,2,1} + X_{1,2,2} + X_{1,2,3} + X_{1,2,4} + X_{1,2,5} = 1000 \quad (\text{1-2구간})$$
$$X_{2,3,1} + X_{2,3,2} + X_{2,3,3} + X_{2,3,4} + X_{2,3,5} = 1000 \quad (\text{2-3구간})$$
$$X_{2,4,1} + X_{2,4,2} + X_{2,4,3} + X_{2,4,4} + X_{2,4,5} = 1000 \quad (\text{2-4구간})$$
$$X_{4,5,1} + X_{4,5,2} + X_{4,5,3} + X_{4,5,4} + X_{4,5,5} = 1000 \quad (\text{4-5구간})$$
$$X_{5,6,1} + X_{5,6,2} + X_{5,6,3} + X_{5,6,4} + X_{5,6,5} = 1000 \quad (\text{5-6구간})$$
$$X_{4,7,1} + X_{4,7,2} + X_{4,7,3} + X_{4,7,4} + X_{4,7,5} = 1000 \quad (\text{4-7구간})$$

(b) 필요압력수두에 관한 제약조건

(수요절점 3)

$$
\begin{aligned}
100 + XP_1 \quad & J_{0,1,1}\ X_{0,1,1} - J_{0,1,2}\ X_{0,1,2} - \cdots - J_{0,1,5}\ X_{0,1,5} \\
& - J_{1,2,1}\ X_{1,2,1} - J_{1,2,2}\ X_{1,2,2} - \cdots - J_{1,2,5}\ X_{1,2,5}
\end{aligned}
$$

$$- J_{2,3,1}\,X_{2,3,1} - J_{2,3,2}\,X_{2,3,2} - \cdots - J_{2,3,5}\,X_{2,3,5} \ge 110 + 5$$

(수요절점 6)

$$\begin{aligned}100 + XP_1 &- J_{0,1,1}\,X_{0,1,1} - J_{0,1,2}\,X_{0,1,2} - \cdots - J_{0,1,5}\,X_{0,1,5}\\ &- J_{1,2,1}\,X_{1,2,1} - J_{1,2,2}\,X_{1,2,2} - \cdots - J_{1,2,5}\,X_{1,2,5}\\ &- J_{2,4,1}\,X_{2,4,1} - J_{2,4,2}\,X_{2,4,2} - \cdots - J_{2,4,5}\,X_{2,4,5}\\ &- J_{4,5,1}\,X_{4,5,1} - J_{4,5,2}\,X_{4,5,2} - \cdots - J_{4,5,5}\,X_{4,5,5}\\ &- J_{5,6,1}\,X_{5,6,1} - J_{5,6,2}\,X_{5,6,2} - \cdots - J_{5,6,5}\,X_{5,6,5} \ge 115\end{aligned}$$

(수요절점 7)

$$\begin{aligned}100 + XP_1 &- J_{0,1,1}\,X_{0,1,1} - J_{0,1,2}\,X_{0,1,2} - \cdots - J_{0,1,5}\,X_{0,1,5}\\ &- J_{1,2,1}\,X_{1,2,1} - J_{1,2,2}\,X_{1,2,2} - \cdots - J_{1,2,5}\,X_{1,2,5}\\ &- J_{2,4,1}\,X_{2,4,1} - J_{2,4,2}\,X_{2,4,2} - \cdots - J_{2,4,5}\,X_{2,4,5}\\ &- J_{4,7,1}\,X_{4,7,1} - J_{4,7,2}\,X_{4,7,2} - \cdots - J_{4,7,5}\,X_{4,7,5} \ge 115\end{aligned}$$

(c) 비음조건

$$X_{i,j,m} \ge 0$$
$$XP_1 \ge 0$$

위에서 수식화된 선형계획법문제를 GAMS(Generalized Algebraic Modeling System)패키지를 이용하여 풀이한 결과 표 12.2와 같은 최적관경과 관길이를 구할 수 있었다. 이 결과에 의하면 (0,1), (1,2), (2,4)구간에서는 400mm관을 각각의 총 구간길이인 1000m씩 시공하고 (4,5), (5,6)구간에서는 300mm관을 1000m씩 시공하고 (2,3)구간은 250mm관을 910m, 200mm관을 90m로 선택하고 (4,7)구간은 300mm관을 330m, 250mm관을 670m로 선택한다. 아울러 이때 양정고는 64.2m로 하면 최적설계가 된다.

이상에서 살펴본 분기형관망의 최적설계는 시공비를 위주로 한 예이다. 그러나 완공 후 이 관망시스템의 유지관리비까지 고려하려 한다면 위에서 수식화된 문제를 약간 변경할 필요가 있게 된다. 그 대표적인 예가 펌프운영에 필요한 전기비용이라 할 수 있는데 이를 고려하기 위해 목적함수에 펌프양정에 필요한 전기비용항을 추가해야한다. 그 결과 대개의 경우 최적의 관경은 커지는 반면 최적양정고는 낮게 되는 결과를 보이게 된다. 이는 더 큰 관경을 통하여 마찰수두손실을 줄임으로써 필요한 양정고를 줄이게 되어 펌프운영비를 절약하는 효과에 기인한다.

표 12.3 분기형 관망예의 최적관경, 관길이, 양정고

(단위 : m)

구간 \ 관경(mm)	200	250	300	350	400
(0,1)					1000
(1,2)					1000
(2,3)	90.3	909.7			
(2,4)					1000
(4,5)			1000		
(5,6)			1000		
(4,7)		671.9	328.1		
최적양정고 = 64.2 m					
최적(최소)공사비 = 449,504,400 원					

12.4.2 회로형 관망시스템

가. 기본이론

분기형 관망의 최적설계예에서는 각 관에 대해 여러 상업용 규격관경에 대한 관길이를 변수로 하였으나 비선형계획법을 쓰게 되는 폐합회로형 관망의 최적설계에서는 변수의 갯수에 제한이 크므로 각 구간에서의 관경을 변수로 하게된다. 이에따라 목적함수에 포함되는 관의 시공비용은 관경에 따른 비선형함수로 주어지게 된다. 분기형 관망의 경우와는 달리 폐합회로형 관망에서는 각 관에서의 유량이 미지

의 값이므로 손실수두를 계산하는 Darcy-Weisbach 공식이나 Hazen-Williams 공식은 Q에 대해 비선형으로 주어진다. 따라서 한 회로내에서의 손실수두의 합은 0이라는 폐합회로 방정식 역시 비선형으로 나타내진다.

위에서 언급된 바와 같이 회로형 관망시스템의 최적설계는 비선형문제로 주어지게 되는데 이 문제를 선형화시켜서 해석하려는 다양한 형태의 모형이 있어왔다. 그 대표적인 것들로는 Alperovits과 Shamir(1977), Shamir(1979), Quindry등(1981), Morgan과 Goulter(1985)등이 있으나 이 모형들은 최적관경의 선택에만 촛점이 맞추어져 있는 단점이 있었다. 다음절에서는 일반적인 비선형계획법을 이용한 방법을 소개해 보기로 한다.

나. 비선형계획법을 이용한 최적설계

폐합회로형(Looped) 관망 시스템의 최적화모형을 위한 목적함수는 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} L_j \,(a + b\, D_j^c) + \sum_{k=1}^{K} CP_k XP_k \tag{12.7}$$

여기서 L_j, D_j는 관로길이 및 관경이고 a, b, c는 상수이며, CP_k와 XP_k는 펌프 k의 양정고당 설계비용과 양정고이며, n은 관의 총갯수, K는 펌프의 갯수이다.

목적함수와 함께 고려해야 할 제약조건은 교차점 방정식에 의한 제약조건, 폐합회로방정식에 의한 제약조건, 손실수두방정식에 의한 제약조건, 수요절점에서 잔류수압 기준에 대한 제약조건, 결정변수의 값이 음일 수 없다는 Nonnegativity 제약조건 등 5가지이다.

(a) 교차점방정식에 의한 제약조건

$$\sum_{j \in I} q_j \geq Q_i \tag{12.8}$$

여기서 q_j는 j번 관을 통해 흐르는 유량, Q_i는 수요절점 i에서의 수요유량, I_i는 수요절점 i와 연결된 관의 조합이며 각각의 수요절점에 대하여 관로를 통한 유량의 합이 수요유량을 충족시켜야 한다는 조건으로 가장 기본적인 식이다.

(b) 폐합회로방정식에 의한 제약조건

$$\sum_{j \in J_s} h_{Li} = 0 \tag{12.9}$$

관망시스템의 폐합회로(loop) 각각에 대하여 손실수두의 합이 항상 0이라는 제약조건으로 여기서 J_s는 폐합회로 s에 속한 관의 조합이며, 각 관의 손실수두는 식 (12.10)과 같다.

(c) 손실수두방정식에 의한 제약조건

$$h_{Li} = \frac{10.66\ L_i\, Q^{1.85}}{C^{1.85}\, D_j^{4.87}} \tag{12.10}$$

모든 관로 각각에 대해 Hazen-Williams 공식을 만족시켜야 하며 결정변수가 되는 관로에 대한 손실수두, 관경 및 유량의 항으로 표시된다.

(d) 잔류수압기준에 대한 제약조건

$$\underline{H} \le H \le \overline{H} \tag{12.11}$$

각 수요절점에서의 잔류수압이 설계기준이 되는 하한치($\underline{H}$)와 상한치($\overline{H}$) 사이에 존재해야 된다는 제약조건으로 상수도 설계기준에 의해 하한치는 15m, 상한치는 40m로 주어진다.

(e) Nonnegativity 제약조건

$$\begin{aligned} D_i &\geq 0 \\ q_i &\geq 0 \\ h_{Li} &\geq 0 \\ XP &\geq 0 \end{aligned} \qquad (12.12)$$

결정변수가 되는 관로의 관경, 유량, 손실수두, 펌프양정고 값은 양수의 값을 가지므로 이 조건을 만족시켜야 한다.

위에서 보면 목적함수는 관경 및 펌핑수두에 따른 비용으로 나타내지며 5가지의 제약조건항에는 모형에 필요한 제반조건들을 모두 포함하고 있어서, 이 식들을 GAMS/MINOS를 이용하여 풀이하면 설계기준을 만족시키는 범위에서 결정변수(손실수두, 관경, 관로유량 등)를 구할 수 있다. 특히 각 관에 대한 최적관경이 구하고자 하는 설계변수이다.

다. 복잡한 관망시스템설계의 최적화기법

앞에서 언급되었다시피 비선형계획법의 해석에서는 다룰 수 있는 결정변수의 갯수가 제한적이어서 최적설계가 가능한 전체 관망시스템의 크기(특히 관로의 갯수)에도 제한이 있게 된다. 김정환 등(1994)에 따르면 관로수가 30개이고, 용수수요 절점수가 22개, 폐합회로가 9개로 구성되어있는 고양지구 관망시스템의 경우 최적화모형에서 고려된 제약조건식은 196개, 변수는 91개로써 이는 비선형문제로서의 그 규모가 아주 작다고는 할 수 없다. 따라서 더욱 복잡하고 규모가 큰 관망의 최적화설계 문제에서는 비선형계획법(nonlinear programming)의 한계에 의해 해석이 어려워지게 된다. 이와 같이 수공학분야의 최적화문제에 있어 비선형 문제의 규모가 너무 커질 경우에는 수리모의모형(hydraulic simulation model)을 최적화모형(optimizer)에 연계(interface) 시킴으로써 문제의 크기를 최적화모형이 다룰 수 있는

크기로 줄일 수 있다. 이는 최적화문제에 있어 제약조건식의 대부분인 수리학 공식들을 수리모의모형이 대신 해석해 줌으로써 가능해지는데 이는 최적제어이론(optimal control theory)에 근거하고 있다. 그림 12.4는 최적제어이론에 의한 최적화모형과 수리모의모형과의 상호연계를 상징적으로 나타내고 있다. 수리모의모형의 최적화모형에의 연계는 최적화모형만을 사용했을 경우 결여되기쉬운 여러 수리학적 세부사항까지도 고려될 수 있다는 장점도 가지고 있다. Lansey와 Mays(1989)는 위의 기법을 사용하여 최적관경은 물론 펌핑시설, 급수탱크, 밸브 등의 크기와 위치까지도 결정하였다.

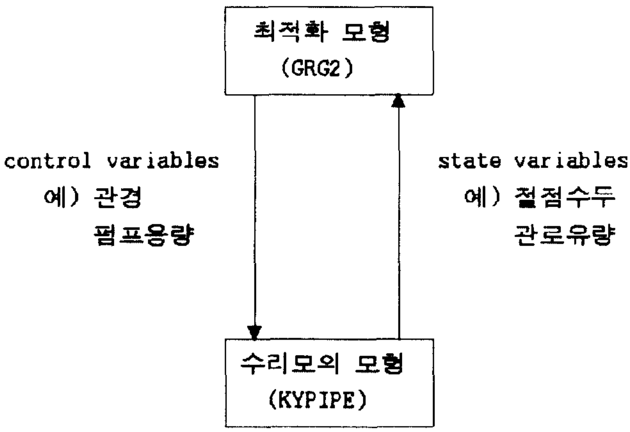

그림 12.4 최적제어이론에 의한 상호연계

12.4.3 관망시스템에의 기타 적용 예

최적화기법은 관망시스템내의 펌핑시설의 최적운영에도 적용이 될 수 있는데 이는 하루중 용수수요가 적을 시간동안에 급수탱크에 양수해두면 용수수요가 많을 때 펌핑시설에 부담을 덜 주게 되는 원리를 이용하는 것이다. Brion과 Mays(1991), Ormsbee와 Lansey(1994)등은 펌핑시설의 최적운영을 통해서 많은 전기비용을 절감시킴은 물론 더욱 안정된 관망시스템 운영이 가능함을 보여주었다.

노후화 되어가는 관망시스템의 관 교체 또는 갱생이 최근 들어 더욱 이슈화되고

있는 가운데 최적화기법을 이용하여 노후관 개량을 위한 의사결정지원을 하려는 연구로는 Lansey 등(1992), Kim과 Mays(1994) 등이 있는데 각 관을 교체할 것인가, 갱생할 것인가, 그대로 둘 것인가를 결정하는 모형이며 아울러 펌핑시설을 늘릴 것인지도 고려한다. 김중훈 등(1995)은 수도권 광역상수도 1단계 관로시스템에 대하여 연차별 교체계획이 가능한 모형을 개발하였다.

최근에는 유전자 알고리즘(Genetic Algorithm)을 이용한 상수도 최적설계(Savic과 Walters, 1997)와 관망 최적갱생(Halhal 등, 1997) 등도 활발히 연구되고 있다. 이는 유전자 알고리즘이 선택교배를 통하여 우량해를 다음세대에 전달하고, 적절한 돌연변이를 도입함으로써 얻어지는 해가 국지해에 빠지는 것을 방지할 수 있다는데 착안한 것이다.

12.4.4 실무적용에 있어서의 문제점

관망시스템의 설계에 있어서 최적화이론의 적용은 그동안 많은 연구가 있어왔으며 실무에서도 성공적으로 적용되리라 예상이 되어왔으나 실제로는 국내에서는 물론 외국에서도 실무에 널리 쓰이지 않고 있는 실정이다. 그렇다면 왜 최적화모형이 실무에서 아직 쓰이지 못하는지 몇 가지 가능한 유추를 해 볼 필요가 있다.

첫째, 상식 밖의 결과나 실무적용이 불가한 결과를 준다. 이 문제는 Walski 등(1987)이 수없이 많은 모형을 비교 분석한 결과 대부분의 최적화모형이 좋은 결과를 보여주고 있으며, 실제로 최종결과는 아니더라도 관망해석모의기법(simulation techniques)으로 마무리만 하면 되는 좋은 결과(지표)를 제공해 줄 수 있음을 보여주었다.

둘째, 기존의 관망해석모의기법과 오랜 경험에 의한 결정에 비해 더 나은 결과를 주지 않는다. 이 문제는 첫째 문제보다 더 심각한 것이다. 아직도 최적화모형들과 기존의 방법들중 어느 편이 나은 결과를 제공하는지 광범위하고 철저한 비교연구는 되지 않은 실정이라 단언할 수는 없으나 비슷한 결과를 더 짧은 시간에 더 작은 비용으로 얻을 수 있다면 이것만으로도 최적화모형의 가치가 있다 하겠다.

셋째, 실무자들은 최적화기법을 이용한 접근방식에 익숙하지 않다. 대부분의 토목실무자들은 최적화이론에 대해 정규적으로 배울 기회를 가지지 못하였으며 따라

서 경우에 따라서는 약간의 거부감을 가지고 있을 수도 있다. 그러나 이 점이 진정한 걸림돌이라 여겨지지는 않는다. 왜냐하면 기존의 관망모의기법을 사용하고있는 실무자중에도 상당수는 그 모의기법에서 쓰이는, 예를 들어, Newton-Raphson을 이용한 해석알고리듬을 완전히 이해하면서 쓰고 있는 것은 아닐 것이기 때문이다.

넷째, 사용하기에 너무 어렵다. 이 문제는 셋째문제와 상당부분 관련이 있는 문제로 볼 수 있다. 실제로 최적화기법을 이용한 모형중 상당수는 사용하기가 쉽지 않은데 주된 이유는 복잡해서라기보다는 입출력을 위한 접속형태가 형편없기 때문일 경우가 많다. 이 모형들은 대개의 경우 입출력형태보다는 알고리듬 그 자체를 중요시하는 학교에서 연구용으로 개발되었기 때문이다. 이 연구용 최적화 모형들이 잘 안 쓰이는 이유의 또 하나는 학교 밖의 실무자가 구하기 어렵다는 것이다. 만약 최적화모형들이 구하기 쉽고 또 입출력이 기존의 KYPIPE(Wood, 1980)와 같은 모의모형과 같은 정도로 개발된다면 실무에서도 받아들여지리라 예상된다.

이상에서 최적화모형의 실무적용에의 문제점을 살펴보았는데, 이는 관망시스템뿐만 아니라 모든 수자원시스템공학분야에 해당하는 문제점으로 볼 수 있다. 그러나 위에서 언급된 문제들은 적어도 분기형 관망시스템의 최적설계에는 해당되지 않음을 밝혀둔다. 12.3.1절에서 소개된 분기형시스템의 최적화모형은 간단명료하여 GAMS라는 상용패키지를 이용하여 쉽게 결과를 도출할 수 있다. 폐쇄회로형 관망시스템의 경우에도 비선형계획법을 해석해야하는 어려움은 있으나 기존의 모의모형을 이용한 설계에 적어도 초기해 또는 지표를 제공할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. 환경부, (1997), "상수도 시설기준".
2. 김정환, 김태균, 김중훈, 윤용남, (1994), "비선형계획법을 이용한 상수도 관망설계에 관한 연구", 한국수문학회, 한국수문학회지, 제27권, 제4호.
3. 김종우, (1995), "분기형 관로시스템의 최적설계에 관한 연구", 고려대학교 석사학위논문.
4. 김중훈, 김종우, 이현동, 김성한, (1996), "기존 상수도 노후관망의 개량 및 관리기법의 개발", 한국수자원학회지, 제29권, 제3호.

5. 김중훈, 김종우, 김한주, 김태균, (1996), "분기형 관로에서의 펌핑시설의 최적갯수와 위치선정에 관한 연구", 대한토목학회지, 제16권, 제2-4호.

6. 김중훈, 김종우, 연상호, (1996), "GIS를 이용한 분기형 관로의 최적설계", 한국지형 공간정보학회지, 제4권, 제2호.

7. 김중훈, 김종우, (1997), "MILP를 이용한 광역상수도의 최적설계", 대한토목학회, '97년 학술발표회.

8. 김중훈, 김한주, 이현동, 김성한, (1995), "배수시설의 최적 관개량 시기 의사결정 모형에 관한 연구", 한국수자원학회, '95년 한국수자원학회 학술발표회 논문집.

9. 안태진, 박정응, (1994), "논관개용 관수로시스템의 최적설계", 한국수문학회, 한국수문학회지, 제27권, 제4호.

10. 전환돈, 김태균, 김중훈, 윤용남, (1994), "선형계획법을 이용한 분기형 관망시스템의 최적설계", 한국수문학회, 한국수문학회지, 제27권, 제3호.

11. 현인환, (1987), "배수관망의 최적설계법에 관한 연구", 서울대학교 박사학위논문.

12. Alperovits, E., and Shamir, U., (1977), "Design of Optimal Water Distribution Systems", Water Resour. Res., 13(6), 885-900.

13. Brion, L. M., and Mays, L. W., (1991), "Methodology for Optimal Operation of Pumping Stains in Water Distribution Systems", J. Hydr. Engr., ASCE, 117(11), 1551-1569.

14. Brooke, A., Kendrick, D., and Meerhaus, A., (1988), "GAMS: A User's Guide", Boyd & Fraser, Danvers, M.A.

15. Calhoun, C., (1971), "Optimization of Pipe Systems by Linear Programming", Control of Flow in Closed Conduits, J. P. Tullis, ed., Colorado State Univ., Ft. Collins, pp. 175-192.

16. Cunningham, K. and Schrage, L., (1989) "The LINGO Modeling Language" Lindo Systems, Chicago, I.L.

17. Dantzig, G.B., (1963). "Linear Programming and Extensions", Princetion University Press, Princetion, N.T.

18. David Kendrick et al, (1992), "GAMS a User's Guide", Release 2.25, The

Scientific Press.

19. Edgar, T.F. and Himmelblau, D.M., (1988), "Optimization of Chemical Process", McGraw-Hill, New York, N.Y.
20. Fourer, R., Gay, D.M., and Kernighan, B.W., (1993), "AMPL A Modeling Language for Mathematical Programming", The Scientific Press, San Francisco, C.A.
21. Goulter, I. C., (1992), "Systems Analysis in Water-Distribution Network Design: From Theory to Practice", Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 118, No. 3, ASCE, pp. 238-248.
22. Gupta, I., (1969), "Linear Programming Analysis of a Water Supply System", AIIE Trans. 1(1), pp. 56-61.
23. Gupta, I., M. S. Hassan and J. Cook, (1972), "Linear Programming Analysis of a Water Supply System with Multiple Supply Points", AIIE Trans. 4(3), pp. 200-204.
24. Halhal, D., Walters, G.A., Ouazar, D., and Savic, D.A., (1997), "Water Network Rehabilitation with Structured Messy Genetic Algorithm", Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol.123, No.3, pp.137-146.
25. Hillier, F.S., and Lieberman, G.J., (1990), "Introduction to Operations Research", 5th ed., McGraw-Hill, New York, N.Y.
26. IBM, (1990), "Optimization Subroutine Library Guide and Reference", IBM Corp., New York, N.Y.
27. Karmeli, D., Gadish, Y., and Meyers, S., (1968), "Design of Optimal Water Distribution Networks", J. Pipeline Div., ASCE, 94(1), 1-9.
28. Kim, J. H. and Mays, L. W., (1994), "Optimal Rehabilitation/Replacement Model for Water Distribution Systems", Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol.120, No.5, pp.674-692.
29. Kim, J. H., Geem, Z. W., Lee, H. D., Kim, S. H., (1997), "A Decision-Supporting Model for Rehabilitation of Old Water Distribution System", Korean Journal of Hydrosciences, Vol. 8.

30. Lansey, K., Duan, N., Mays, L., and Tung, Y-K., (1989), "Water Distribution Design under uncertainties", J. Water Resour. Planning and Mgmt., ASCE, 115(5), 630-645.

31. Lansey, K. E., Basnet, C., Mays, L. W., and Woodburn, J., (1992), "Optimal Maintenance Scheduling for Water Distribution Systems", to be published in Civil Engineering Systems, England.

32. Lasdon, L. S., Waren, A.D., Jain, A., and Ratner, M., (1978), "Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming", Design and Implementation of Optimization Software, H.J. Greenberg ed., Sijthoff and Noordhoff, pp. 363-397.

33. Lee, H-L., Liebman, J., Mays, L., Morgan, D., and Orsmbee, L., (1987), "Battle of the network models: Epilogue", J. Water Resour. Planning and Mgmt., ASCE, 113(2), 191-203.

34. Liang, T., (1971), "Design of Conduit System by Dynamic Programming", J. Hydr. Div., ASCE, 97(3), 383-393.

35. Liebman, J.S., Lasdon, L.S., Schrage, L., and Waren, A., (1986), "Modeling and Optimization with GINO", The Scientific Press, Palo Alto, C.A.

36. Luenberger, D.G., (1984), "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley, Reading, M.A.

37. Mantell, J. B. and Lasdon, L. S., (1978), "A GRG Algorithm for Econometric Control Problems", Annuals of Economic and Social Management, Vol.6, No.5.

38. Mays, L.W. and Tung, Y.K., (1992), "Hydrosystems Engineering and Management", McGraw-Hill, New York, N.Y.

39. Morgan, D., and Goulter, I., (1985), "Optimal Urban Water Distribution Design", Water Resour. Res., 21(5), 642-652.

40. Murtagh, B.A. and Saunders, M.A., (1987), "MINOS 5.1 User's Guide", Report SOL 83-20R, Stanford University, Stanford, C.A.

41. Ormsbee, L., and Lansey, K., (1994). "Optimal control of water supply pumping systems", J. Water Resour. Plng. and Mgmt., 120(2), 237-252.

42. Quindry, G., Brill, E., Leibman, J., and Robinson, A., (1979), "Comments on 'Design of Optimal Water Distribution Systems' by Alperovits and Shamir", Water Resour. Res., 15(6), 1651-1656.

43. Savic, D.A. and Walters, G.A., (1997), "Genetic Algorithms for Least-Cost Design of Water Distribution Networks", Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol.123, No.2, pp.67-77.

44. Schaake, J., and Lai, D., (1969). "Linear Programming and Dynamic Programming-application of Water Distribution Network Design", Report 116, MIT Press, Cambridge, Mass.

45. Schrage, L., (1987), "User's Manual for Linear, Integer, and Quadratic Programming with LINDO", The Scientific Press, San Francisco, C.A.

46. Shamir, U., (1979), "Optimization in Water Distribution Systems Engineering", Mathematical Programming, no.11, pp. 65-75.

47. Taha, A.T., (1987). "Operations Research : An Introduction", 4th ed., Macmillan, New York, N.Y.Walski, T., Brill, E., Gessler, J., Goulter, I., Jeppson, R., Lansey, K.,

48. Wood, D., (1980), Computer Analysis of Flow in Pipe Networks Including Extended Period Simulation - KYPIPE User's Manual, Office of Engineering, Continuing Education and Extension, University of Kentucky.