

철근콘크리트 골조의 연성화 해석

Softening Analysis of Reinforced Concrete Frames

나 유 성*

Na, Yu Sung

홍 성 곁**

Hong, Sung Gul

ABSTRACT

Softening is the name used for decreasing bending moment at advanced flexural deformation. To accommodate softening deformation in analysis, it is assumed that a hinge has finite length. The softening analysis of R/C frames relies on the primary assumption that softening occurs over a finite hinge length and that the moment-curvature relationship for any section may be closely described by a trilinear approximation. A stiffness matrix for elastic element with softening regions are derived and the stiffness matrix allows extension of the capability of an existing computer program for elastic-plastic analysis to the softening situation. The effect of softening on the collapse load of R/C frame is evaluated.

1. 서론

휨모멘트가 작용하는 철근콘크리트 부재의 변형특성에서 항복모멘트에 도달한 이후 곡률이 증가하면서 저항모멘트가 점차 감소하는 구간이 나타나는 데 이를 연성화(Softening)라 한다. 대부분의 철근콘크리트 부재는 파괴되기 전에 연성화 거동이 일어날 수 있다. 철근콘크리트 구조물이 강진 등으로 과도한 변형이 생기거나 심한 반복 하중을 받는 경우 또는 연성화가 발생하기 쉬운 형태를 가진 경우, 붕괴 하중(Collapse Load)의 계산에 반드시 연성화의 효과를 포함시켜야 한다.

비탄성 변형이 한 지점에 집중된다고 보는 기존의 방법으로는 변형이 일정길이에 걸쳐 점점 확산되는 연성화 거동을 포착하기 어렵다. 따라서, 구조물의 실제 연성화 거동을 근사하게 추적하기 위해 유한길이 힌지를 도입하고 유한길이 힌지를 지닌 휨부재의 강성행렬을 유도하여, 직접강성법(Direct Stiffness Method)을 이용하여 변위, 부재력, 붕괴하중을 산출하는 기존의 탄성-소성 해석 프로그램에 적용시킴으로써 연성화 해석까지 확장시키고자 한다. 연성화 거동이 일정길이의 힌지에서 일어나고, 단면에 대한 모멘트-곡률 곡선을 탄성-소성-연성화의 세 직선으로 근사화시킬 수 있다는 기본적인 가정을 바탕으로 연성화를 포함한 해석 프로그램을 이용하여 철근콘크리트 골조의 붕괴 하중에 대한 연성화 거동의 영향을 살펴본다.

* 서울대학교 건축학과 석사과정

** 정회원, 서울대학교 건축학과 조교수

2. 기존 연구의 고찰

Bazant 등은 1축 압축을 받는 변형-연성화 콘크리트 보의 불안정성(Instability), 연성(Ductility), 크기(Size)의 연성화에 대한 효과를 연구했고(1976), 유한요소법에 의해 균열이 발생한 콘크리트의 최대 하중 이후의 연성화 영역에서의 하중-변위 관계를 해석했다(1987). Darvall 등은 보 부재의 임계연성화(Critical Softening)를 정의하고, 연성화를 고려한 하중-변위 관계를 구했다(1984). 이를 발전시켜, 연성화 영역이 있는 보 부재의 강성행렬을 유도하여 프레임을 해석하였다(1985). 또, Darvall은 구조물의 동적 응답에서 각각의 응답 단계에서의 연성화를 고려한 강성행렬을 새로이 구하는 방법으로 동적 해석을 수행하였고(1987), 연성화 해석시에 수반되는 안정성(Stability) 문제를 연구하였다(1988).

3. 연성화 힌지 (Softening Hinge)

철근콘크리트 부재에 휨모멘트만 작용한다고 가정하고 실제 부재의 모멘트-곡률 관계를 살펴보면 그림 1과 같이 곡률이 증가함에 따라 모멘트가 증가하는 영역과 곡률이 증가하면서 모멘트가 점차적으로 감소하는 영역이 곡선 형태로 표현된다. 이를 단순화시키면 탄성-소성-연성화(이상화 (a)) 또는 탄성-소성(이상화 (b))으로 모델링할 수 있다. 여기서 연성화 영역의 강성은 탄성 영역의 강성 EI 에 연성화 기울기 a 를 곱한 aEI 로 나타낼 수 있다. 즉, 연성화 영역은 강성이 aEI 이고, 부재의 나머지 부분은 탄성 강성을 지니고 재하되거나 제하된다(Loading or Unloading). 연성화 기울기가 음의 값을 가지면 구조물의 붕괴 메커니즘이 형성되는 데 필요한 힌지 개수만큼 힌지가 형성되지 않더라도 전체 구조물이 증가하중을 지탱하지 못하는 상황이 발생하는 데, 이때의 모멘트-곡률 곡선에서 음의 기울기를 힌지의 임계연성화 매개변수(Critical Softening Parameter) a_{cr} 이라 정의한다.

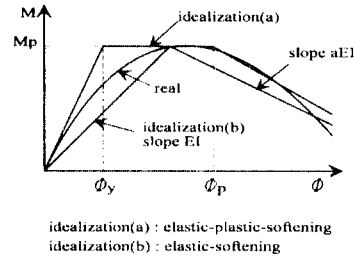


그림 1 Approximation for Moment-Curvature Curve

비탄성 변형을 하는 철근콘크리트 부재를 관찰하면 임계단면 주위의 일정길이에 걸쳐 철근의 항복과 콘크리트의 압괴가 발생함을 볼 수 있으며, 이는 점 힌지 모형이 실제의 거동과는 일치하지 않음을 의미한다. 이러한 점 힌지는 계산하기는 편리하나, 무한한 변형이 발생함을 가정하는 것이므로 이론적으로도 불가능하다. Bazant는 힌지가 연성화 거동을 할 때 점 힌지가 이론적으로 불가능함을 증명하였다. 따라서 연성화는 일정길이에 걸쳐 일어나며 이러한 한정된 길이를 힌지 길이라고 한다. 지금까지 철근콘크리트 부재에 대하여 힌지 길이를 이론적으로 결정하는 것이 불가능하였으나, 실험적인 관찰을 통하여 납득할 만한 값을 얻을 수 있다. 여러 연구자들에 의해 구해진 힌지의 유한 길이에 대한 경험적인 공식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \text{Darvall} &: 3.5d\left(\frac{z}{d}\right)^{0.49} \rho^{0.57} \left(1 - \left(\frac{p-p'}{p_b}\right)\right)^{0.25} & \text{Mottock} &: \frac{d}{2} + \frac{z}{20} \\
 \text{Corley} &: \frac{d}{2} + 0.2\left(\frac{z}{d}\right)\sqrt{d} & \text{Sawyer} &: 0.075z + 0.25d
 \end{aligned}$$

d : 단면의 유효층(Effective Depth).

z : 위험단면으로부터 반곡점까지의 거리, 단순지지보의 경우는 $L/2$

4. 연성화 힌지를 지닌 휨부재의 단위강성행렬 유도

그림 2에서 보이는 길이가 L 인 휨부재는 양단에 강성이 각각 aEI , bEI 인 연성화 힌지를 가지고 있으며 나머지 부분은 EI 를 강성으로 가진다. 하나의 휨부재를 이루는 세 부재의 단위강성행렬을 중첩시키고 부재의 중간 두지점에 작용하는 내부력이 영 행렬이 됨을 이용하면 식 과 같은 과정을 거쳐 연성화 힌지를 지닌 휨부재의 단위강성행렬을 유도할 수 있다.

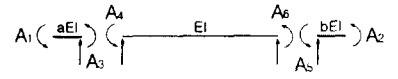


그림 2 Flexural Element with Finite Length Hinges

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ee} & S_{ce}^T \\ S_{ce} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \left(S_{ce} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + S_{cc} \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = -S_{cc}^{-1} S_{ce} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \left(S_{ce} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + S_{ce}^T \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \right) = \frac{EI}{L} \left[S_{ee} - S_{ce}^T S_{cc}^{-1} S_{ce} \right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

5. 유도한 강성행렬의 기존 해석프로그램에의 적용

5.1. 프로그램의 특징

기존의 철골 골조 탄성-소성 해석에 사용되는 프로그램을 수정하여 연성화를 포함시킴으로써 철근콘크리트 골조에도 적용 가능하도록 하였다. 해석 결과로는 절점 변위, 부재력, 지지점 반력, 소성한지 회전변형, 각 단계 종료시점에서의 하중계수와 힌지상태, 붕괴하중을 출력한다. 프로그램은 정적 점 하중을 받는 골조에 대해서만 적용 가능하다. 힌지는 소성 상태일 때는 한 점에 위치하고, 연성화나 경화 거동 중에는 입력에서 지정된 일정길이를 가진다고 가정한다.

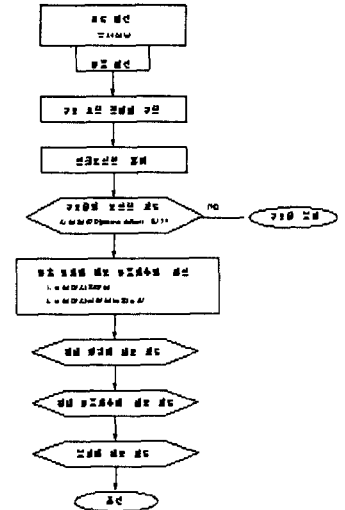


그림 3 Flow Chart for Program

5.2. 철근콘크리트 보의 부재 모델

철근콘크리트 부재의 비탄성 연성화 거동을 표현하기 위해 Two Component 모델(그림 4)을 사용한다. Two Component 모델은 동일한 두 절점을 연결하는 한 부재가 평행으로 배치된 가상의 두 요소로 구성되어 있으며, 그 요소 중 하나는 탄성-소성-연성화 거동을, 다른 하나는 탄성 거동만을 한다고 가정하는 모델이다. 이 부재의 강성행렬은 두 요소가 지닌 강성의 산술적인 합으로 구한다.

5.3. 각 하중 단계별 하중계수의 계산

소성-연성화 힌지를 지닌 구조물의 증가하중에 대한 총 응답은 다음에 의해 종료되는 일련의 선형단계들로 이루어진다. 각 단계의 종료시 구조강성행렬은 새로운 힌지의 조건에 적합하도록 수정되어야 하며, 그 상태의 구조물에 대한 하중증분이 계산된다.

- (1) 힌지 발생지점이 탄성영역이 종료되고 소성거동을 시작할 때
- (2) 힌지가 소성능력이 소진되고 연성화나 경화를 시작할 때
- (3) 힌지가 소성이나 연성화 영역으로부터 탄성적으로 제하될 때

각 절점에 대하여 식 1을 이용하여 잔존하는 소성모멘트 성능을 추가하중에 의한 모멘트로 나누어 하중계수를 계산한다(그림 5).

$$\lambda = (M_p - \Sigma S) / \delta S \quad (1)$$

새로운 소성힌지를 생성시키는 하중계수와 이미 형성된 힌지의 소성회전성능을 소진시키는 하중계수를 비교하여 더 작은 값이 그 단계의 하중계수가 된다. 이 하중계수를 적용하는 경우 절점의 변위가 제한 변위를 초과하거나 연성화 한계를 넘어서는 경우 새로운 하중계수를 구한다. 각 단계의 하중계수는 입력에서 규정한 최대 하중계수보다는 작아야 한다.

5.4. 연성화 힌지내의 절점

연성화를 포함하는 해석의 특징으로서 절점이 연성화 힌지 내에 위치할 때 강성행렬의 고유값 부호를 이용하는 안정성 검토가 유효하지 않게 되는 경우가 있다. 이 경우 절점이 힌지의 한쪽 가장자리로 이동한다면 안정성이 나타난다. 이러한 상황은 보에 집중하중이 작용할 때 하중작용점의 양쪽으로 힌지가 형성되는 경우 발생한다. 절점이 연성화 힌지의 중간에 위치하는 경우 연성화 기울기가 임계연성화 매개변수보다 작더라도 음의 고유값이 얻어진다. 이는 구조물의 강성행렬이 더 이상 Positive Definite 하지 않으며 따라서 구조물이 불안정함을 의미한다. 그러나 절점이 연성화 힌지의 가장자리에 위치한다면 동일한 연성화 매개변수에 대해서도 고유값은 모두 양수이다. 따라서 단부 고정모멘트(Fixed End Moment)를 사용하여 하중이 작용하는 절점을 연성화 힌지의 가장자리로 이동시킨다. 그림 6은 절점을 이동시키고 그에 해당하는 단부 고정모멘트를 적용시키는 과정을 보여준다.

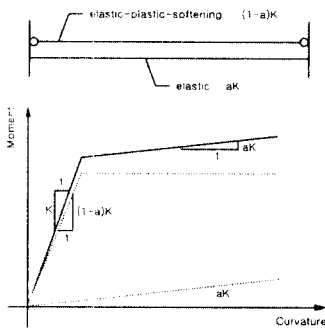


그림 4 Two Component Model

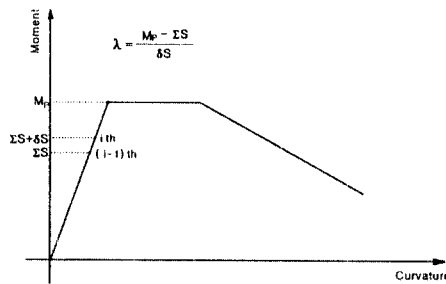


그림 5 Load Factor at the End of Each Load Step

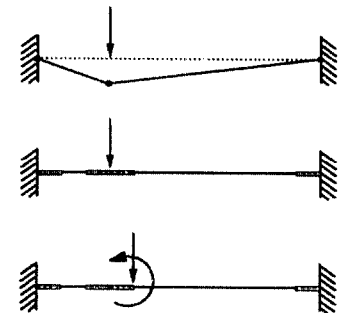


그림 6 Node within Softening Hinge

5.5. 변위 변환행렬

Local 변위벡터에 변위 변환행렬을 곱하여 Global 변위벡터를 구한다. 소성힌지가 형성되면 변위 변환행렬을 수정한다. 소성힌지가 우측단부 절점 j 에 생성되는 경우, 우측단부의 다음하중중분은 0이 됨을 이용하여 3 행을 $-k_{ij}/k_{jj}$ 를 곱한 2행으로 교체한다. 유사하게 소성힌지가 좌측단부 절점 i 에 생성되는 경우 2 행을 $-k_{ij}/k_{ii}$ 를 곱한 3행으로 변경한다.

$$\begin{aligned}
 f_2 = k_{ii} v_2 + k_{ij} v_3 = 0, \quad v_2 = -\frac{k_{ij}}{k_{ii}} v_3 \\
 f_3 = k_{ij} v_2 + k_{jj} v_3 = 0, \quad v_3 = -\frac{k_{ij}}{k_{jj}} v_2
 \end{aligned}
 \cdot \begin{bmatrix}
 -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\
 \frac{\sin \theta}{L} & -\frac{\cos \theta}{L} & 1 & -\frac{\sin \theta}{L} & \frac{\cos \theta}{L} & 0 \\
 \frac{\sin \theta}{L} & -\frac{\cos \theta}{L} & 0 & -\frac{\sin \theta}{L} & \frac{\cos \theta}{L} & 1
 \end{bmatrix}$$

5.6. 붕괴하중에 대한 검토

평형상태의 구조물은 미세한 형태변화에 필요한 외력의 일이 양의 값을 가지는 한 안정상태를 유지한다. 안정성에 대한 필요충분조건은 강성행렬이 Positive Definite한 것이다. 구조강성행렬(Structure Stiffness Matrix)의 판별식이 음이 될 때, 즉 강성행렬의 고유값(Eigenvalues)중 음수가 하나라도 존재할 때 구조물은 안정성을 상실하고 불안정해진다. 이로부터 각각의 힌지가 형성되거나 연성화 될 때 고유값의 부호를 검토하여 붕괴하중 도달 여부를 판단할 수 있다.

6. 수직하중을 받는 골조의 연성화 해석 결과

그림 7의 골조에 대한 단면특성과 부재 등의 입력자료는 다음과 같다. 힌지의 유한길이 l_p 는 Darvall이 제안한 경험식으로부터, 임계연성화 매개변수 a_{cr} 은 평형방정식과 적합방정식을 이용하여 구한다.

$$A = 0.10 \text{ m}^2, \quad I = 0.001 \text{ m}^4, \quad E = 2.07 \times 10^7 \text{ kN/m}^2, \quad L = 3 \text{ m},$$

$$M_{Pcol} = 100 \text{ kNm}, \quad M_{Pbeam} = 200 \text{ kNm}, \quad \text{hinge length ratio}(L/l_p) = 10$$

단조증가 수직하중을 받는 철근콘크리트 골조에 대하여 탄성-소성 거동을 하는 경우(i)와 탄성-연성화 거동을 하는 경우(ii, iii)에 각각 힌지가 생성되는 순서와 위치, 각 단계의 하중계수, 붕괴하중을 구하여 비교하면 표 1과 같고, 이를 절점 2에서의 하중과 변위의 관계 곡선으로 나타내면 그림 8과 같다.

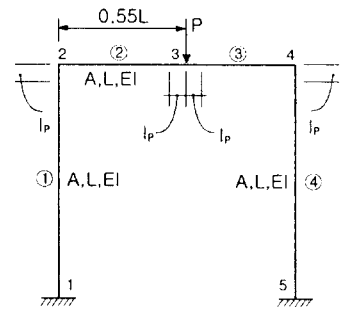


그림 7 Vertically Loaded Frame with Softening

표 1 소성 거동 해석과 연성화 거동 해석의 비교

Load Step	(i) Perfectly Plastic Hinge	Softening Hinge	
		(ii) Softening Slope: -0.04	(iii) Softening Slope: -0.08
1	HF 2, 3; HF 3, 3 Load: 202.235 kN	HF 2, 3; HF 3, 3 Load: 202.235 kN	HF 2, 3; HF 3, 3 Load: 202.235 kN
2	HF 4, 4 Load: 265.244 kN	HS 2, 3; HS 3, 3 Load: 202.235 kN	HS 2, 3; HS 3, 3 Load: 202.235 kN
3	HF 1, 2 Load: 269.360 kN	HF 4, 4 Load: 235.358 kN	SC
4	SC	SC	

(HF: Hinge Forms, HS: Hinge Softens, SC: Structure Collapses; HF 4, 4: Hinge Forms at Member 4, Node 4.)

탄성-소성 거동과 탄성-연성화 거동의 경우를 비교하면 연성화로 인하여 붕괴하중이 감소함을 알 수 있다. 또한, 같은 연성화 거동의 경우라도 연성화 기울기가 급할수록 붕괴하중이 감소되는 폭이 크다. 붕괴되기 전에 생성된 힌지 개수를 살펴보면, (i)의 경우 3번째 힌지가 생성되면서 붕괴메커니즘이 형성되어 붕괴되고, (ii)의 경우는 2번째 힌지가 생성되면서 붕괴된다. (iii)의 경우는 1번째 힌지가 생성된 이후 힌지에서 연성화 거동이 일어나는 도중에 붕괴되는 데, 이는 연성화 기울기가 임계연성화 매개변수 a_{cr} 보다 커서 붕괴메커니즘이 형성되기 전에 붕괴되기 때문이다.

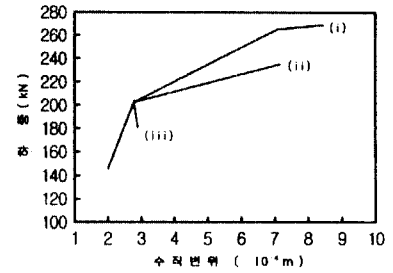


그림 8 Load-Deflection Curve

7. 결론

일정길이의 힌지와 세 직선으로 구성된 모멘트-곡률 관계에 대한 가정을 바탕으로 연성화 힌지를 지닌 휨부재의 강성행렬을 이용함으로써 기존의 탄성-소성 해석프로그램을 연성화 해석까지 확장하여 활용할 수 있다. 프로그램에 힌지가 발생가능한 모든 지점의 힌지 길이와 연성화 기울기를 입력하면 절점 변위, 부재력, 지지점 반력, 소성힌지 회전변형, 붕괴하중 등이 산출된다. 이 프로그램을 이용하여 해석한 결과 연성화 거동이 구조물의 붕괴하중에 미치는 영향은 다음과 같다.

- (1) 연성화 거동을 해석에 포함시키는 경우 탄성-소성해석에 비하여 붕괴하중이 감소한다.
- (2) 연성화 기울기가 급할수록 붕괴전에 생성되는 힌지의 수나 붕괴하중은 감소한다. 연성화 기울기가 변하면 힌지의 생성순서도 변할 수 있다.
- (3) 연성화 기울기가 임계연성화 매개변수 보다 작은 경우 붕괴메커니즘이 형성되는 데 필요한 힌지의 개수보다 작더라도 구조물은 안정성을 상실하여 붕괴된다.

감사의 글

본 연구는 1997년도 학술진흥재단 공모과제(신진교수과제) 연구비에 의해 수행되었음을 밝히며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Darvall P.L., "Critical Softening of Hinges in Portal Frames", J. Struct. Engrg., Vol.110, No.1, 1984, pp.157~162
2. Darvall P.L. & Mendis P.A., "Elastic-Plastic-Softening Analysis of Plane Frames", J. Struct. Engrg., Vol.111, No.4, 1985, pp.871~888
3. Sanjayan J.G. & Darvall P.L., "Singularities in RC Beam Elements with Finite-Length Hinges", J. Struct. Engrg., Vol.121, No.1, 1995, pp.39~47
4. ULARC, "Simple Elasto-Plastic Analysis of Plane Frames", Programmed by A. Sudhaker, G.H. Powell, G. Orr & R. Wheaton, University of California, Berkeley, California, 1972