

반복하중을 받는 콘크리트의 재하속도 의존 점소성-손상 모델

Rate-dependent Viscoplastic-Damage Model of Concrete under Cyclic Loading

송 하 원* 임 현 우** 김 인 순***
Song, Ha Won Lim, Hyun Woo Kim, In Soon

ABSTRACT

The objective of this paper is to develop a consistent algorithm for the finite element analysis for behavior of concrete under cyclic loading using viscoplastic-damage model. For modeling the behavior of concrete under cyclic loading, consistent algorithms of rate-dependent viscoplastic-damage are employed with a Willam-Warnke 5-parameter failure criterion which can consider the softening behavior of concrete and consistent tangent moduli are derived.

Using finite element program implemented with the developed algorithms, the algorithms are verified and the behaviors of concrete under cyclic loading are simulated and compared with experimental data.

1. 서론

손상의 발생과 진전은 콘크리트 구조물의 궁극적인 파괴를 야기하므로 그 거동을 규명하는 것은 매우 중요하다. 손상이 있는 콘크리트 구조물에 동적하중이나 유사정적하중이 작용하는 경우, 재하/제하 (loading/unloading), 경화/연화현상(hardening/softening) 등과 같이 각기 다른 응력과 변형률 상태를 동시에 나타내게 된다. 동적하중을 받는 콘크리트 구조물에서 나타내는 연화현상은 재하속도에 영향을 많이 받는다. 콘크리트의 연화현상을 재현하기 위한 기존의 실험이나 유한요소해석 프로그램들은 재하속도를 고려하지 못한 소성모델이나 소성-손상모델들을 이용하였기 때문에, 동적하중이 작용하는 콘크리트구조물에서의 연화현상을 정확하게 재현하지 못하고 있는 실정이다. 그러므로, 동적하중하에서의 콘크리트의 연화현상을 보다 정확하게 재현할 수 있는 재하속도의 영향을 고려할 수 있는 점소성-손상모델을 이용하여 일관된 알고리즘을 개발하고, 이를 근거로 한 유한요소해석 프로그램을 개발하는데 본 연구의 목적이 있다

2. 손상변수를 도입한 콘크리트의 파괴기준

*정회원, 연세대학교 토목공학과 부교수
**정회원, 연세대학교 토목공학과 석사
***정회원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

Willam-Warnke 5 매개변수 파괴기준은 2차의 포물선형식으로 표현되는 압축과 인장의 자오선을 곡선화시킨 것이며, 항복함수에 손상계수 \bar{x} 를 적용하면, 식 (1)과 같다.

$$f(\sigma_m, \bar{x}) = \bar{\rho} - \bar{\mu}_N \rho_f(\sigma_m, \theta) \leq 0 \quad (1)$$

여기서, $\sigma_m = I_1/3$ 인 평균응력, $\bar{\rho}$ 는 식 (2)로 나타나는 파괴기준식의 편차길이이고, $\bar{\mu}_N$ 는 식 (3)과 같다.

$$\bar{\rho} = \sqrt{2f_2} \quad (2)$$

$$\bar{\mu}_N = \eta \bar{\mu}_{Ni} + (1 - \eta) \bar{\mu}_{Nf} \quad (3)$$

여기서, η 는 손상변수 \bar{x} 에 의해서 식 (4)로 나타나는 손상함수이다. 아래첨자 i 는 초기 파괴상태를 나타내고, f 는 최종적인 파괴상태를 나타낸다.

$$\eta = (1 + \bar{x})e^{-\bar{x}} \quad (4)$$

식 (1)의 손상변수 \bar{x} 는 일축상태에서 다음 식 (5)와 같이 정의된다.

$$\bar{x}_N = \frac{1}{g_N} \int_0^{\epsilon^p} \sigma_N(\epsilon^p) d\epsilon^p \quad (5a)$$

$$g_N = \int_0^{\infty} \sigma_N(\epsilon^p) d\epsilon^p \quad (5b)$$

식 (5)에서 아래첨자 N 는 인장일 경우에는 t , 압축일 경우에는 c 를 사용한다. 에너지 소산에 의해서 계산되는 일반적인 손상변수의 전개식은 식 (6)과 같다.

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \sigma) : \dot{\epsilon}^p \quad (6)$$

3. 일관된 점소성-손상모델

Perzyna 점소성모델, Duvant-Lions 점소성모델과 소성이론 간의 중요한 차이점은 현재의 응력상태가 항복면 바깥쪽에 존재할 수 있다는 것과 항복함수가 0보다 큰 값을 가질 수 있다는 사실로부터 생기므로, Kuhn-Tucker 조건이 적용될 수 없었다. 그러나, 속도 기여분(contribution), 즉 점소성이 재하 속도에 의존하는 항복면을 통하여 수행된다는 측면을 고려하게 되면, Kuhn-Tucker 조건의 적용이 가능하게 된다. 이와 같은 방법을 일관된 점소성모델의 접근법(consistency method)이라고 한다. 일관된 점소성모델의 점소성 전개식은 식 (7)로 정의된다.

$$\Delta \epsilon^{vp} = \Delta \lambda \mathbf{n} \quad (7)$$

여기서, $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ 이다.

응력-변형률 관계를 이용하여 응력을 강성감소부분과 유효응력부분으로 분리하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma = (1 - d(\bar{x})) \bar{\sigma} \quad (8)$$

또한 점소성에서의 유효응력-변형률 관계식은 아래와 같다.

$$\bar{\sigma} = D_0 : (\epsilon - \epsilon^{vp}) \quad (9)$$

여기서, D_0 는 탄성 점선강성행렬이다. 손상을 고려한 점선강성계수는 식 (10)과 같게 된다

$$D = (1 - d(\bar{x})) D_0 \quad (10)$$

여기서, D 는 손상을 고려한 점선강성행렬이다. 한편, 손상변수로 강성의 감소를 표현하는 강성감소 계수를 인장과 압축에 대하여 동시에 고려하게 되면 식 (11)과 같다.

$$d(\bar{x}) = 1 - (1 - d_c(\bar{x}))(1 - d_t(\bar{x})) \quad (11)$$

여기서, d 는 인장과 압축을 고려한 단일강성감소계수이다. 손상에 의해 발생하는 강성감소계수의 값은 $0 \leq d \leq 1$ 의 범위에 있게 된다.

재하속도에 의존하는 재료에 대하여 항복함수와 컨시스턴시 조건은 각각 식 (12), 식 (13)과 같다.

$$f(\sigma, \lambda, \dot{\lambda}) = 0 \quad (12)$$

$$f(\sigma, \lambda, \dot{\lambda}) = \mathbf{n} : \dot{\sigma} - h\dot{\lambda} - \mu\dot{\lambda} = 0 \quad (13)$$

이때 h 는 경화계수이며, μ 는 점성이며 식 (14)와 같이 정의된다.

$$h = -\frac{\partial f}{\partial \lambda}, \quad \mu = -\frac{\partial f}{\partial \dot{\lambda}} \quad (14)$$

즉, 일관된 점소성모델에서 항복면은 경화현상이나 연화현상 효과에서 뿐만 아니라 경화속도 효과나 연화속도 효과를 고려할 수 있다.

4. 재하속도에 의존하는 점소성-손상모델의 일관된 알고리즘

일관된 점소성-손상모델에서 소성계수 $\Delta\lambda$ 는 컨시스턴시 조건에 의해서 결정되므로, 식 (13)을 다시 반복계산을 위해 전개하면 아래 식과 같게 된다.

$$f(\sigma, \lambda, \dot{\lambda}) \approx f^{(i)} + \mathbf{n}^T \delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \delta\lambda + \frac{\partial f}{\partial \dot{\lambda}} \delta\dot{\lambda} = 0 \quad (15)$$

여기서, $f^{(i)} = f(\sigma^{(i)}, \lambda^{(i)}, \dot{\lambda}^{(i)})$ 는 항복함수의 i 번째 잔류값이다.

소성계수 $\Delta\lambda$ 를 계산하기 위하여 국소적인 Newton-Raphson 반복계산법을 사용하였다. 소성계수 $\Delta\lambda$ 는 Euler backward 알고리즘에 의해서 적분되며, 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\delta\dot{\lambda}^{(i)} = \delta\dot{\lambda}\Delta t, \quad \Delta\lambda^{(i)} = \sum_j \delta\lambda^{(i)} \quad (16)$$

따라서, 반복계산 $i+1$ 에서 Newton-Raphson 반복계산과정은 식 (16)을 식 (15)에 대입하면, 잔류값 $f^{(i)}$ 를 가지는 다음 식으로 표현된다.

$$\mathbf{n}^T \delta\sigma + \left[\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial f}{\partial \dot{\lambda}} \right] \delta\lambda = -f^{(i)} \quad (17)$$

식 (7)과 손상을 고려한 응력-변형률 관계식을 이용하면 식 (18)을 얻는다.

$$\Delta\sigma = (1 - d_{n+1})D_0 : [\Delta\varepsilon - \Delta\lambda \mathbf{n}] \quad (18)$$

식 (18)을 미분을 하고, 식 (16)을 이용하면 식 (19)와 같이 된다.

$$\delta\sigma = -\frac{\partial(d_{n+1})}{\partial x} \delta x \Delta\sigma^{vir} + \bar{\mathbf{H}} \delta\varepsilon - \bar{\mathbf{H}} \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} + \Delta\lambda^{(i)} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \lambda} + \frac{\Delta\lambda^{(i)}}{\Delta t} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \dot{\lambda}} \right] \delta\lambda \quad (19)$$

여기서, $\Delta\sigma^{vir}$ 은 식 (20)으로 정의되고, $\bar{\mathbf{H}}$ 는 식 (21)로 정의된다.

$$\Delta\sigma^{vir} = D_0 : (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{vp}) \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \left[\frac{1}{1 - d_{n+1}} D_0^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \right]^{-1} \quad (21)$$

이와 같은 과정을 통하여 재하속도에 의존하는 점소성-손상모델의 응력과 변형률을 구할 수 있다.

5. 일관된 알고리즘에 의한 접선탄성계수의 유도

식 (19)를 식(17)에 대입하면 아래와 같다.

$$\delta\lambda = \frac{1}{\beta} \left(\mathbf{n}^T \bar{\mathbf{H}} \delta\boldsymbol{\varepsilon} + f^{(i)} - \mathbf{n}^T \frac{\partial(d_{n+1})}{\partial \mathbf{x}} \delta \bar{\mathbf{x}} \Delta \boldsymbol{\sigma}^{vir} \right) \quad (22)$$

여기서,

$$\beta = \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{H}} \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \Delta\lambda^{(i)} \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \lambda} + \frac{\Delta\lambda^{(i)}}{\Delta t} \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \lambda} \right] - \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \quad (23)$$

식 (22)를 이용하여 식 (19)에서 계산되는 응력의 증가량을 잔류값을 계산하여 검증하게 된다. 이상의 단계로 검증된 응력의 증가량을 구하는 식 (19)와 식 (22)로부터 일관된 접선강성행렬을 도출한다.

식 (22)를 식 (19)에 대입하면 다음과 같다.

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} \quad (24)$$

여기서, \mathbf{D} 와 back stress $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{H}} - \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{H}} \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \Delta\lambda^{(i)} \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \lambda} + \frac{\Delta\lambda^{(i)}}{\Delta t} \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \lambda} \right] \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{H}} \quad (25)$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial(d_{n+1})}{\partial \mathbf{x}} \delta \bar{\mathbf{x}} \Delta \boldsymbol{\sigma}^{vir} + \frac{1}{\beta} \left[f^{(i)} - \mathbf{n}^T \frac{\partial(d_{n+1})}{\partial \mathbf{x}} \delta \bar{\mathbf{x}} \Delta \boldsymbol{\sigma}^{vir} \right] \quad (26)$$

만약 전체 반복계산(global iteration)이 수행되는 동안에 국부적인 반복계산(local iteration)을 사용한다면, 반복계산에 의한 변형을 변화량 $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ 은 식(22)로부터 없어지게 된다.

재하속도에 의존하는 점소성-손상모델의 알고리즘은 재하속도와 무관한 소성-손상모델의 반복계산법을 사용하지만, 재하속도와 무관한 일반적인 소성-손상모델에서의 접선강성행렬은 재하속도에 의존하는 일반적인 점소성-손상모델에서의 접선강성도행렬 식에서부터 재하속도에 영향을 주는 점성항인 점성변수 μ 를 0에 근접시켜서 구할 수 있다. 재하속도와 무관한 일반적인 소성-손상모델의 일관된 접선강성행렬은 식 (28)이고, 식 (27)은 유효응력에 관한 접선강성행렬이다.

$$\frac{d \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \left[\mathbf{D}_0^{-1} + \nabla G \frac{d \bar{\lambda}}{d \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} + \bar{\lambda} \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^2} \right]^{-1} \quad (27)$$

$$\frac{d \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \left[(1 - d_{n+1}) \mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \frac{d d_{n+1}}{d \mathbf{x}_{n+1}} \frac{d \bar{\mathbf{x}}_{n+1}}{d \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right] \frac{d \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (28)$$

6. 콘크리트의 점소성-손상해석

유도된 점소성-손상모델을 이용한 일관된 접선강성계수와 알고리즘을 바탕으로 하여 본 연구에서 개발한 프로그램을 검증하며, 개발된 프로그램을 이용하여 반복하중 하에서 콘크리트의 거동을 재현하였다.

반복하중상태에서의 알고리즘을 검증하기 위해 개발된 프로그램을 사용해서, 그림 1, 그림 2와 같은 일축인장과 일축압축을 받는 평면응력 상태의 1개의 유한요소체에 대해 변위조절에 의한 유한요소해석을 실시한다.

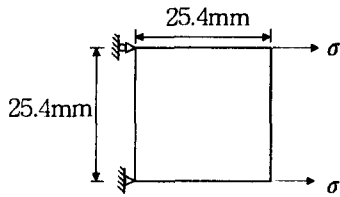


Fig. 1 A finite element under uniaxial tension

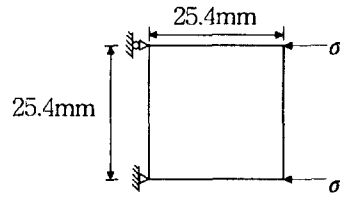


Fig. 2 A finite element under uniaxial compression

대상시편의 물성치로 대표적인 콘크리트의 물성치로서 탄성계수는 2.4×10^4 MPa, 압축강도는 24.6MPa, 포아송 비는 0.18을 사용하였으며, α_p 는 콘크리트에서의 일반적인 값인 0.232을 사용하였다. 그밖의 강도감소계수와 손상변수는 소성변형률에 의해서 계산하도록 프로그래밍하였다. 특히 손상 변수 x 는 프로그램 내에서 소성이 발생하고 난 이후에 계산하도록 하였기 때문에 변수로 취급하지는 않았고, 인장강도는 압축강도의 1/10로 하여 계산하였다. 또한 하중은 변형률을 조절하여 변하도록 하였으며, 두께는 단위두께를 사용하였다.

그림 1에 나타나있는 대상 구조물에 재하속도가 0.0001초 단위의 인장하중이 반복적으로 작용할 경우에 발생하는 반복하중하에서의 해석결과와 타 연구결과를 비교하여 그림 3에 나타내었으며, 그림 2의 대상시편에 대해 0.001초 단위의 일축압축하중이 반복적으로 작용할 경우에 대한 해석결과와 타 연구결과^{1),2)}를 그림 4에 비교하였다.

해석결과에서 보듯이 해석결과와 실험결과가 거의 일치하고, 강도저감 현상이 비교적 잘 나타나있으며, 반복하중이 작용할 경우 일관된 점소성 해석을 수행함과 동시에 손상을 고려하였기 때문에 강성감소계수의 보다 사실적인 구현이 가능하였고, 최대하중이후의 제하 및 재재하의 거동이 잘 구현되었다.

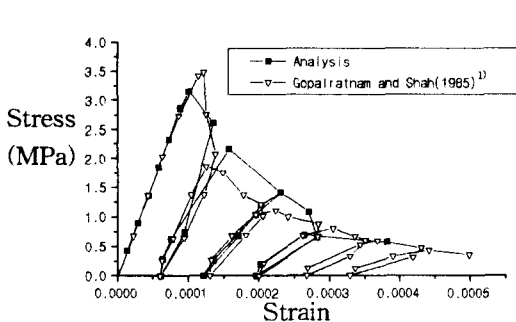


Fig. 3 Comparison with experiment for cyclic uniaxial tensile loading

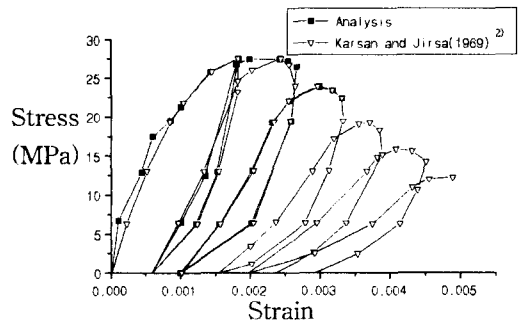


Fig. 4 Comparison with experiment for cyclic uniaxial compressive loading

그림 5와 그림 6은 본 해석결과와 타 해석결과³⁾와 비교한 것이다. 특히 압축 해석결과인 그림 6은 두 해석결과가 거의 일치함을 알 수 있으며, 인장 해석결과인 그림 5는 해석결과 값과 본 연구의 연구결과 값이 차이가 있음을 알 수 있다. 본 해석결과는 Lee의 모델보다 실제 콘크리트의 파괴기준에 가까운 Willam-Warnke 파괴기준을 도입하였기에 좀 더 개선되었음을 알 수 있다.

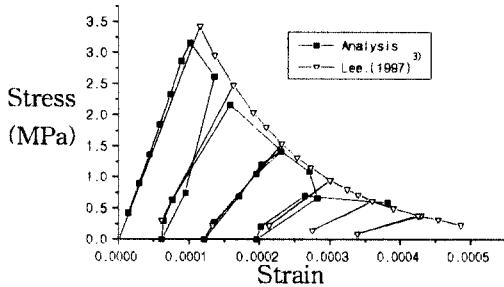


Fig. 5 Comparison with experiment for cyclic uniaxial tensile loading

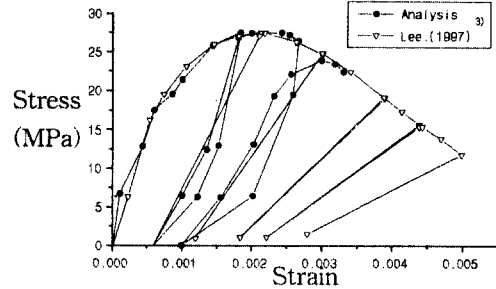


Fig. 6 Comparison with experiment for cyclic uniaxial compressive loading

7. 결 론

반복하중을 받는 콘크리트의 재하속도 의존 점소성-손상모델에 의한 해석을 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1. 반복하중하에서의 콘크리트 거동을 구명하기 위하여 손상변수가 도입된 Willam-Warnke 5 매 개변수의 파괴기준식을 도입하였고, 재하속도에 의존하는 점소성-손상모델의 일관된 알고리즘을 전개하였고, 유한요소 프로그램을 개발하였다.
2. 개발된 유한요소 프로그램을 이용하여 반복하중하에서의 콘크리트의 거동해석을 수행하였으며, 실험결과 및 타 모델에 의한 결과와 비교하여 검증하였다.

참 고 문 헌

1. Gopalaratnam, V. S. and Shah, S. P. (1985), "Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension," *ACI journal*, No. 3, pp. 310-249.
2. Karsan, I. D. and Jirsa, J. O. (1969), "Behavior of concrete under compressive loadings," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 95, No. ST12, pp. 6935-2563.
3. Lee, J., (1997), "*Theory and implementation of plastic-damage model for concrete structure under cycle loading*", Ph. D. dissertation, Department of civil and environmental engineering, University of California, Berkeley, USA
4. Wang, W. M., Sluys, L. J., and de Borst, R., (1997), "Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening", *International Journal for Numerical methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 3839-3864.