분산된 데이터의 최적화를 통한 3차원 특성점 검출 알고리듬

3-D Vertex Detection Algorithm for Optimization of Scattered Data

문 성환, 조 임현, 강 훈
중앙대학교 공과대학 제어계측학과
서울시 동작구 흑석동 221번지
shmoon@sirius.cie.cau.ac.kr, hkang@cau.ac.kr

ABSTRACT

3차원 공간의 자료는 그 자료의 크기 ,처리속도 잡음 및 측정 오차 등의 불규칙성 등의 한계를 가지고 있다. 최근 인터넷과 같은 통신 속도의 증가와 함께 대용량의 자료 교환이 가능하게 되면서 3차원 정보에 대한 연구는 매우 중요한 문제로 대두되고 있는 실정이다.

본 논문에서는 3차원 물체를 표현해 줄 수 있는 특성점 (vertex)를 찾는 알고리듬을 제시함으로써 자료의 양을 줄일 수 있는 방법을 제시하고 있다.

I. 서론

3차원 물체를 표현하기 위해서는 많은 양의 데이터를 필요로 한다. 그러나 만약 물체의 특성점(vertex)를 안다면 적은 데이터로 효과적으로 물체를 표현해 줄 수 있다.

레이저, 혹은 CCD 카메라를 이용한 3-D 스캐너로 스캔한 물체의 이산적인 데이터들은 그 모양을 알 수 없을 뿐아니라 데이터의 양도 무척 방대하다. 스캔한 3차원 물체의 데이터의 부분적인 모양을 면으로 클러스터링[1][2] 하면 이러한 면들로 교차하는 특성점을 구해 물체를 적은 양의 데이터로 효과적으로 표현하는 것이 가능해진다.

통계학 상에서 Covariance Matrix는 분산된 데이터들의 기하학적 모양에 대한 정보를 제공해 준다[3]. Covariance 의 변형된 형태인 scatter matrix의 eigenvalue를 이용하여 물체의 모양을 추정할 수 있다[4].

본 논문에서는 먼저 Scatter Matrix의 성질

※ 본 연구는 1996년도 한국학술진흥재단 대학부설연구소과제 연구비에 의하여 연구되었음.

을 분석하고 이 정보를 이용하여 물체의 부분적인 모양을 알아내 물체를 표현 할 수 있는 면의 개수와 면에 대한 정보를 얻은 다음 각각의 면에 대한 정보를 이용하여 3차원 물체의 특성점(vertex)를 찾는 알고리즘을 제안하고 있다.

II. 본론

1. Scatter Matrix 와 Eigenvalues

Scatter Matrix는 기하학적으로 quadratic forms, 통계적으로 covariance 형태를 취하고 있다.

3차원 데이터 셋 $X=\{x_1, x_2, x_3, \cdots x_n\}$가 있다고 가정하자. 이때 X의 평균과 Covariance Matrix를 각각 (v_X, V_X)라 하면,

$$v_X = \sum_{i=0}^{n} x_i / n \text{ 이고}$$

$$V_X = \sum_{i=0}^{n} (x_i - v_X)(x_i - v_X)^T / (n-1)$$

이다. 데이터 셋 X의 scatter matrix는 양변에 (n-1)을 곱해줌으로써 얻어진다.

$$S_X = (n-1)V_X$$

Matrix S_X 와 V_X는 3x3 matrix로서 각각 symmetric, positive semi-definite 이고, S_X의 eigenvalue를 이용하여 데이터 셋 X의 모양을 추정 할 수 있다[3].

S_X는 각각 0보다 크거나 같은 양의 eigenvalue를 갖는다. S_X의 eigenvalue를 각각 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$라 할 때

(1) Ellipsoid : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 가 양수이고 만약 두 개가 같다면 rotational ellipsoid, 만약 셋 다 같다면 sphere이다.

(2) Elliptic cylinder : 3개의 λ중 하나가 0일 때(ex. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$)

(3) Two parallel planes : 3개의 λ중 두개가 0일 때(ex. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$)

부분적으로 물체의 모양을 추정하기 위해 파라메타 R을 도입하여 전체 데이터의 일부분을 scatter matrix를 구성하여 살펴볼 경우 대부분의 가장 작은 eigenvalue가 0에 가까운 값을 갖는다면 이 데이터는 평면상에 있는 점으로 판단할 수 있다. 그러나 특성점이나 edge상의 데이터들은 각각의 eigenvalue 가 0보다는 크고, 거의 같은 값을 갖는다. 이러한 성질을 이용해 물체를 이루고 있는 면을 부분적으로 추정하게 된다.

2. 차원 물체의 면의 개수 추정

3차원 물체의 면의 개수를 추정하는 데는 먼저 어떤 평면상에 위치한 점을 기준으로 면을 클러스터링 하는데 있다.

어떤 물체를 구성하는 3차원 데이터 셋 $X=\{x_1, x_2, x_3, \cdots x_n\}$ 가 주어졌을 때

모든 데이터들에 대해 국부적으로 반경 R을 갖는 구 안의 데이터에 대한 scatter matrix를 구한 다음 eigenvalue를 해석하면 각각의 데이터가 자신의 위치한 주변의 상황을 알 수 있다.

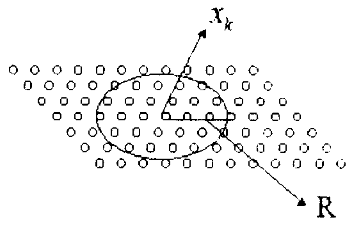

그림 1. 데이터 주변의 모양 추정

임의의 점 x_i의 scatter matrix의 가장 작은 eigenvalue 값이 임의의 0에 가까운 값(α)보다 작은 값을 갖는다면 이 점은 평면상에 놓인 경우이다. 이러한 평면상에 놓인 점에 대해서 분류해냄과 동시에 자신이 속해 있는 면의 normal vector도 함께 구한다. 이때 normal vector(w)는 scatter matrix의 eigenvalue에 대한 eigenvector를 이용하여 찾는다.

평면상의 점을 x_k이고 이 점을 지나는 평면의 normal vector를 $w=(a,b,c)^T$라 할 때 다음과 같은 식에 의해 면을 클러스터링 한다.

$$P_k(w_k, x_k, x_i) = \frac{| w_k^T x_k - w_i^T x_k |}{w_k^T w_k} \le \beta$$

3차원 데이터 x_i가 위식을 만족하면 점 x_i는 x_k와 같은 평면상의 점이다. 여기서 β는 임의의 작은 양수이다.

식(1)은 x_k 를 지나는 평면으로부터 점 x_i까지의 수직 거리로 [그림 2]에서 나타내고 있다.

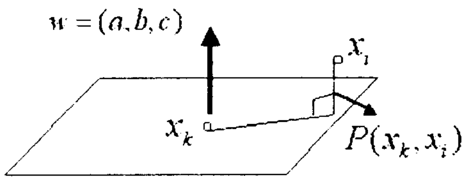

그림 2. 임의의 점에서 평면까지의 거리

3. 면의 최적화

면의 최적화는 클러스터링된 면에 대한 데이터들의 최적의 Normal Vector (w)를 찾는 데 있다.

평면이 $w=(a,b,c)^T$를 갖고 점 평면상의 점 x_{i0}를 지난다면, 최적화는 다음 식을 최소화하는 Normal vector, w를 찾는다

이때 $w^T x_{i0} = 1$을 만족해야 한다.

$$\min_w J(w) = \sum_{i=1}^{n} \| x_i - x_{i0} \|_Q^2$$

$$= \min_w \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i0}) Q (x_i - x_{i0})$$

여기서 $Q = WW^T$ 이다.

w에 관에 미분을 하면,

$$\partial J / \partial w = 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i x_i^T w - x_i) = 0$$

따라서 $w^* = [\sum_{i=1}^{n} (x_i x_i^T)]^{-1} [\sum_{i=1}^{n} x_i]$를 구할 수 있다.

Matrix Inversion Lemma[5]와 Recursive weight update Law를 사용하여 w^* 구할 수 있다.

$G_{n-1} = [\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_i^T]^{-1}$ 라 할 때

$$w_n = w_{n-1} + \frac{G_{n-1} x_n (1 - w_{n-1}^T x_n)}{1 + x_n^T G_{n-1} x_n} \text{ 이고}$$

$$G_n = (x_n x_n^T + G_{n-1}^{-1})^{-1}$$

$$= G_{n-1} - \frac{G_{n-1} x_n x_n^T G_{n-1}}{1 + x_n^T G_{n-1} x_n^T} \text{ 이다.}$$

각각의 초기값은

w_1은 임의로 클러스터링 할 때의 값으로

$G_1 = (x_1 x_1^T)^{-1}$, $x_1 \neq (0,0,0)$으로 한다.

4. 특성점 찾기

특성점(vertex)는 기본적으로 3개의 면이 만나는 점이다. 물체의 면에 대한 정보를 알고 있다면 특성점은 다음과 같이 구한다.

3개의 평면

$$P_k = [w_k , -w_k^T x_k] \quad k=1,2,3$$

이 존재 할 때, 만약

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

이 0이 아니고 같은 선상에 있지 않으면

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -w_1^T x_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -w_2^T x_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -w_3^T x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{or} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_1^T x_1 \\ w_2^T x_2 \\ w_3^T x_3 \end{bmatrix}$$

을 통해 구할 수 있다.

[그림 3]은 3개의 면으로 구성된 특성점의 위치를 나타내고 있다.

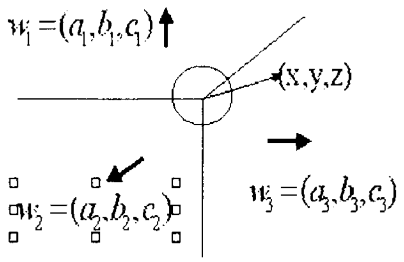

그림 3. 3면으로 구성된 특성점

III. 시뮬레이션 결과 및 결론

다음은 6면체와 8면체에 대한 시뮬레이션 결과를 보여주고 있다.
각 α 와 β 는 0.01과 0.5이다.

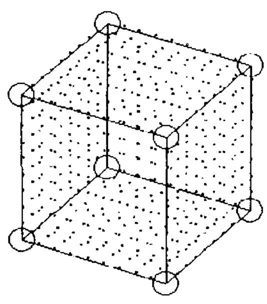

그림 5. 6면체의 특성점을 찾은 결과

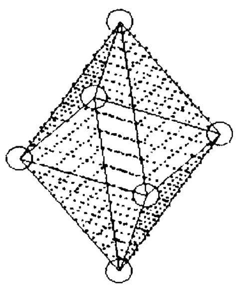

그림 6. 8면체의 특성점을 찾은 결과

시뮬레이션 결과 각각의 다면체에 대해 6개와 8개의 특성점을 찾은 것을 볼 수 있다.
지금까지 3차원 물체의 특성점을 찾는 알고리듬을 살펴보았다. 평면으로 이루어진 물체에 대해서 본 알고리듬을 사용하면 평면에 대한 최적의 normal vector를 구함으로써 물체의 특성점을 잘 찾을 수 있음을 알 수 있다. 그러나 만약 평면이 아닌 구와 같이 곡면을 가지고 있는 물체가 존재한다면 이러한 물체들은 특성점이라는 것이 존재하지 않는다. 그렇게 때문에 임의의 스펙에 맞게 평면을 정해주어 적당하게 표현해 주어야 한다
위에서 제안한 알고리듬은 물체의 특성점을 찾음과 동시에 면에 대한 정보도 줄 수 있기 문에 FCV(Fuzzy c-Variety)[2]와 같은 클러스터링 알고리듬의 초기 값을 줄 수 있을 것으로 예상된다.

IV. 참고 문헌

[1] J.C.Bezdek,C.coray,R.Gunderson and J.Watson, *"Detection and characterization of cluster substructure I. Linear structure"*
SIAM J.MATH. Vol.40, No. 2. April 1981.
p.339-357.

[2] J.C.Bezdek,C.coray,R.Gunderson and J.Watson, *"Detection and characterization of cluster substructure II.Fuzzy c-Varieties and convex combinations therof"* SIAM J.APPL MATH Vol. 40,No. 2. April 1981.
p.358-372.

[3]B. Noble, *Applied Linear Algebra.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1969

[4] I.M.Anderson and J.C.Bezdek , *"Curvature and Tangential Deflection of Discrete Arcs"*, IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell. vol. PAMI-6. p.27-40. 1984.

[5]F.L. Lewis, *Optimal Estimation whith an introduction to stochastic control theory*: Wiley-interscience, 1976