

최소 근사화 에러를 고려한 퍼지 제어기의 설계

Design of Fuzzy Logic Controller Considering Minimum Approximation Error

명 환 춘(Hwan-Chun Myung)

한국 과학 기술원

Korea Advanced Institute
of Science and Technology
mhc@ctrsys.kaist.ac.kr

변 중 남(Zenn.Z.Bien)

한국 과학 기술원

Korea Advanced Institute
of Science and Technology
zbien@ee.kaist.ac.kr

요 약

본 논문에서는 분석적인 방법을 통하여 퍼지 제어기의 안정성을 증명할 경우에 고려해야 하는 근사화 에러를 슬라이딩 모드 제어 기법과 적응 제어 법칙을 이용하여 보정하는 방법을 제시하고 있다. 특히 본 논문에서는 퍼지 제어기의 안정성에 관한 이전의 연구들과는 달리 주어진 시스템의 각각의 상태 변수들에 대한 최대 민감도(Upper Bound of Sensitivity)에 관한 정보만이 미리 주어진 경우를 다루고 있다. 제안된 방법은 리아프노프(Lyapunov)함수를 사용하여 안정성이 증명될 수 있으며, 모의 실험(simulation)을 통하여 성능을 확인할 수 있다. 또한 제어기의 적용 방법에 따라서 퍼지 제어기의 특성을 강조하거나 또는 슬라이딩 모드 제어기의 특성을 보다 더 부각시킬 수 있도록 설계할 수 있다는 장점이 있다.

I. 서 론

퍼지 제어기는 주어진 시스템에 관하여 정확한 정보가 주어지지 않은 경우이거나 매우 복잡한 시스템의 경우에 뛰어난 효용성을 보여 왔다. 그러나, 이러한 퍼지 제어기는 내재되어 있는 비선형성과 설계 과정의 주관적인 면 등에 의하여 분석적인 해석에 있어서 많은 어려움을 내포하고 있다. 그 중에서도 특히 퍼지 제어기의 안정화 문제는 앞에서 언급한 특성 때문에 매우 어려운 문제로서 다루어져 오고 있다. 1990년대 이후로, L.X.Wang을 비롯한 많은 사람들이 이러한 문제를 해결하고자 노력하였다. [1][2][3][4] 그리고, 대부분의 경우, 퍼지 제어기의 안정화 문제를 해결하기 위하여 기존에 널리 연구되어져 온 슬라이딩 제어 기법과 적응 제어 법칙 등을 사용하는 방법들을 제시하였으며, 또한 제시한 방법들을 사용하기 위해서는 주어진 시스템의 상한값을 최소 정보로서 미리 알고 있어야 한다는 공통된 가정 등이 있었다.

본 논문에서도 이전의 접근 방법과 마찬가지로 슬라이딩 제어 기법과 적응 제어 법

칙을 함께 사용하였다. 그러나, 이전의 방법들과는 달리 시스템에 대한 최소 정보로서, 주어진 시스템의 상한값이 아닌 각각의 상태 변수들에 대한 최대 민감도를 사용하였다. 이러한 정보는 퍼지 제어를 사용함으로써 발생할 수 있는 근사화 에러에 대하여 제어기의 안정화를 보장하도록 사용되어진다. 본론에서는 제시된 방법의 유용성과 특성에 관하여 살펴보고, 모의 실험을 통하여 성능을 확인하도록 하겠다.

II. 본 론

본 논문에서 다루고자 하는 시스템은 다음과 같은 비선형 방정식으로 표현이 가능한 것들을 대상으로 하고 있다.

$$\dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + bu, y = x \quad (1)$$

식 (1)에서 제어 입력 u 로서 다음과 같이 퍼지 제어기와 슬라이딩 제어를 동시에 사용하고자 한다.

$$u = u_c(\bar{x}|\bar{\theta}) + Ksgn(s) \quad (2)$$

에러 방정식을 구하기 위하여 식 (2)를 (1)에 적용하면 다음과 같다.

$$\dot{e}^{(n)} = -\bar{k}^T e + b[u^* - u_c(\bar{x}|\bar{\theta}) - Ksgn(s)] \quad (3)$$

(단, $u^* = [-f(\bar{x}) + y_m^{(n)} + \bar{m}^T e]/b$, $\bar{x} = [x \dot{x} \dots x^{(n)}]^T$, y_m : 기준 입력, $\bar{m}^T = [k_1 k_2 \dots k_n]$)

식 (3)을 상태 방정식으로 고치면 식 (4)와 같이 된다.

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = A\bar{e} + \bar{b}_c[u^* - u_c(\bar{x}|\bar{\theta}) - Ksgn(s)], \bar{b}_c^T = [0 \dots b] \quad (4)$$

퍼지 제어기 $u_c = \bar{\theta}^T \zeta(\bar{x})$ 는 크게 퍼지 베이스스 함수(Fuzzy Basis Function)와 룰의 결론부에 해당하는 멤버쉽 함수들의 중심 벡터들로 나누어 질 수 있으며, 각각은 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\theta} = (c^1, \dots, c^M)^T, \zeta_i = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i)}{\sum_{l=1}^M (\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i))} : FBF \quad (5)$$

(단, M: 룰의 수, n:입력의 수, $\mu_{F_i}(x_i)$: 조건부의 멤버쉽 함수)

이때, 최소 근사화 에러는 다음과 같이 정의될 수 있다.[1]

$$\theta^* = ARGMIN_{|\bar{\theta}| \leq M_0} [SUP_{|\bar{x}| \leq M_1} |u_c(\bar{x}|\bar{\theta}) - u^*|] \\ \omega(\bar{x}) = u_c(\bar{x}|\bar{\theta}^*) - u^* : MAE \quad (6)$$

식 (6)을 식(4)에 대입하면 다음과 같은 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = A\bar{e} + \bar{b}_c[u_c(\bar{x}|\bar{\theta}^*) - u_c(\bar{x}|\bar{\theta})] - \bar{b}_c Ksgn(s) - \bar{b}_c \omega \\ = A\bar{e} + \bar{b}_c \bar{\Phi}^T \bar{\zeta} - \bar{b}_c (Ksgn(s) + \omega) \quad (7)$$

위에서 얻어진 식 (7)을 이용하여 리아프노프 함수를 통해서 제안된 퍼지 제어기의 안정화를 증명하기에 앞서서 다음과 같은 세 가지 가정을 미리 설정하도록 하겠다.

1. b 의 부호는 알려져 있다.

$$2. K \geq |\omega(\bar{x}(t))|_\infty$$

$$3. |\bar{x}(t)| \leq M_x, t \geq 0$$

제어기의 안정화를 증명하기 위하여 다음과 같은 리아프노프 함수를 사용하고자 한다.

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{b}{2\gamma} \Phi^T \Phi + \frac{1}{2} \Psi^T \Psi \quad (8)$$

(단, $A^T P + PA = -Q$, $s = \bar{b}_c P^2 [(I + P^{-1})\bar{e} - A \int \bar{e} dt] = \bar{b}_c^T P^2 \bar{h}$,

$$\bar{\Phi} = \bar{\theta}^* - \bar{\theta}, \bar{\Psi} = -\bar{e} + P\bar{h}, \bar{h} = (I + P^{-1})\bar{e} - A \int \bar{e}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{1}{2} e^T Q e + \frac{b}{\gamma} \Phi^T [\gamma e^T p_n \zeta(\bar{x}) + \frac{d\bar{\Phi}}{dt}] - e^T P e_c (K \text{sgn}(s) + \omega) \\ &\quad + (-\bar{e}^T + \bar{h}^T P^T) (-\frac{d\bar{e}}{dt} + P[(I + P^{-1})\frac{d\bar{e}}{dt} - A\bar{e}]) \\ &\quad (\because \bar{e}^T P \bar{b}_c = \bar{e}^T p_n b) \\ &= -\frac{1}{2} e^T Q e + b \bar{\Phi}^T [e^T p_n \zeta(\bar{x}) + (-\bar{e}^T p_n + \bar{h}^T P p_n) \zeta(\bar{x}) + \frac{1}{\gamma} \frac{d\bar{\Phi}}{dt}] \\ &\quad - \bar{h}^T P^2 \bar{b}_c (K \text{sgn}(s) + \omega) \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} e^T Q e - s(K \text{sgn}(s) + \omega) \leq 0, \frac{d\bar{\Phi}}{dt} = \gamma \bar{h}^T P p_n \zeta(\bar{x})$$

$\therefore e \in L^\infty, \int \frac{dV}{dt} < \infty \Rightarrow e \in L^2, \frac{d\bar{e}}{dt} < \infty \Rightarrow \frac{d\bar{e}}{dt} \in L^\infty, \lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$ by Barbalat's lemma

위의 증명에서 중요한 설정 변수 중의 하나는 학습률 γ 이다. γ 는 적응 법칙에서는 학습률로서 역할을 하지만, 리아프노프 함수에서는 가중치로도 작용한다. 이러한 γ 값의 알맞은 설정은 미리 결정된 룰의 영역을 벗어나지 않도록 조정하도록 사용될 수 있다.

위에서 가정된 최소 근사화 에러에 대하여 2차원인 경우에 다음과 같은 관계식이 존재한다.[5]

$$\omega \leq \|g - f\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_\infty h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_\infty h_2 \quad (9)$$

$$\omega \leq \|g - f\|_\infty \leq \frac{1}{8} \left[\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\|_\infty h_1 + \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\|_\infty h_2 \right]$$

(단, g : 임의의 비선형 함수, f : 퍼지 시스템, 멤버쉽 함수의 형태 : 삼각형, h : 멤버쉽 함수간의 길이)

식 (9)에 의하여 제안된 방법은 다음과 같은 세가지 특징을 가지게 된다. 먼저, 첫째로 최소 근사화 에러는 주어진 비선형 함수의 각각의 상태 변수들에 대한 편미분 값의 상한값으로 한정되어지기 때문에, 이전에 사용되어왔던 함수 자체의 상한값에 비하여 이득(gain) K 의 값을 줄일 수 있는 여지가 있을 수 있다. 이러한 가능성은 더욱이 비선형 함수가 다음의 식 (10)과 같이 표현될 수 있다면, 식 (9)의 두 번째 관계식에 의하여 이득 K 의 값을 0으로 줄일 수도 있게된다.

$$g(x) = \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 a_{k_1 k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \quad (10)$$

둘째로, 편 미분의 특성에 의하여 비 선형 함수에 있을 수도 있는 시간만의 함수 부분은 최소 근사화 에러의 상한 값을 설정하는데 있어서 어떠한 영향도 미치지 않게 된다. 이러한 결과는 주어진 시스템에 대하여 시간만의 함수 부분에 관한 정보를 알지 못한다고 하더라도 제어할 수 있게됨을 의미하게 된다. 이러한 특징은 이전의 함수의 상한 값을 알아야 하는 경우와 비교해서 보다 더 적은 정보만을 가지고 주어진 시스템을 제어할 수 있다는 사실을 보여주고 있다. 제안된 방법의 세 번째 특징은 편 미분의 물리적 의미와 관련되어 있다. 앞에서 이미 언급한 바와 같이 이득 K는 주어진 함수의 각 상태 변수들에 대한 편 미분의 형태로 나타나게 되는데, 이와 같은 편 미분의 형태는 시스템의 민감도(Sensitivity)를 나타낼 수 있는 물리적 의미를 가지게된다. 따라서, 사전에 필요로 하게 되는 정보는 시스템의 특성인 민감도와 관련되어 생각할 수 있으며, 이러한 관점에서 이전의 단순한 시스템의 상한 값보다 더 실제적인 측면을 내포할 수 있다.

제안된 방법은 크게 두 가지 관점에서 그 특성을 분석할 수 있다. 첫째는 퍼지 제어기 관점에서 살펴볼 수 있으며, 그 다음으로는 슬라이딩 모드 제어 방법의 측면에서 생각해 볼 수 있다. 먼저 퍼지 제어기 관점에서 살펴보면 제안된 방법은 퍼지 제어기의 필수적인 요소인 룰의 정확한 정보가 없더라도 시스템의 출력을 원하는 값으로 제어할 수 있으며, 또한 제어기와 주어진 시스템의 안정성을 분석적으로 증명할 수 있다는 장점을 가지게 된다. 이러한 장점은 앞에서 증명한 적용 법칙과 슬라이딩 제어 방법에 의하여 보장되게 된다. 퍼지 제어기가 내포하고 있는 분석적인 안정성의 증명은 이와 같이 기존에 연구되어온 제어 방법들과 결합됨으로써 보다 더 많은 기능을 가지도록 확장될 수 있음을 알 수 있다. 그러나, 정확한 룰이 존재하지 않는 경우에는 안정성은 보장될 수 있지만, 원하는 곳으로 시스템을 보내는 과정에서 좋은 응답 성능(performance)을 얻는 것이 어렵다는 단점이 존재하게 된다. 이러한 단점은 룰에 대한 정보의 양이 증가함에 따라서 극복될 수 있는데, 만약 정확한 룰과 멤버십 함수의 값들이 주어졌을 경우에 이전보다 응답 성능을 개선할 수 있다. 지금까지 설명된 내용들은 모의 실험에서 다시 비교, 분석될 것이다. 다음으로 슬라이딩 제어 방법의 측면에서 살펴보도록 하면 다음과 같은 특성을 발견할 수 있다. 이전의 퍼지 제어기 관점에서는 비록 시스템의 안정성을 위하여 슬라이딩 모드 방법을 사용하기는 하였지만, 주어진 제어기가 항상 슬라이딩 조건을 만족할 필요는 없었다. 그러나, 만약 슬라이딩 조건을 다음과 같이 만족시키도록 이득 K를 구하면,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &\leq -Ksgn(s) \\ \frac{ds}{dt} &= \bar{b}_c P^2 \left[\frac{d\bar{e}}{dt} - A\bar{e} + P^{-1} \frac{d\bar{e}}{dt} \right] \\ &= -\bar{b}_c^T P^2 \bar{b}_c Ksgn(s) - \bar{b}_c^T P^2 \bar{b}_c \omega + \bar{b}_c^T P^2 \bar{b}_c \Phi^T \zeta(\bar{x}) + \bar{b}_c^T P \frac{d\bar{e}}{dt} \\ K(t) &\geq \Phi^T \zeta(\bar{x}) - \omega + (\bar{b}_c^T P^2 \bar{b}_c)^{-1} \bar{b}_c^T P \frac{d\bar{e}}{dt} \end{aligned} \quad (11)$$

와 같이 된다. 또한, 슬라이딩 모드 제어 방법에서 발생하는 리칭페이즈(reaching phase) 문제를 해결하기 위하여 다음과 같이 슬라이딩 면을 바꾸어 줄 수 있다.

$$s = \bar{b}_c^T P^2 \left[(I + P^{-1})\bar{e} - A \int \bar{e} - (I + P^{-1})\bar{e}(0) \right] = \bar{b}_c^T P^2 \bar{h}$$

이때, 채터링(chattering) 문제를 고려하지 않는다고 할 때, s의 값은 항상 0을 유지하게 되며, 다음과 같은 응답 특성을 얻을 수 있게 된다.

$$\therefore \frac{d\bar{e}}{dt} = (I + P^{-1})^{-1}A\bar{e} = ((P + I)^{-1}PA)\bar{e}$$

위와 같은 슬라이딩 제어 방법에서 퍼지 제어기의 역할은 식 (11)을 통해서 이해될 수 있다. 식 (11)에서 $\bar{\theta} = \theta^* - \bar{\theta}$ 이므로, 보다 더 정확한 물과 멤버십 함수가 주어짐에 따라서 이득 K값의 범위를 줄일 수 있게 된다. 이러한 방법은 기존의 슬라이딩 제어 방법과는 이득 K의 값이 주어진 시스템의 상한 값에 의존하지 않고, 상태 변수에 대한 민감도에 의존하게 되며, 이러한 특성은 퍼지 제어기에 의하여 구현될 수 있게 된다.

다음은 이상에서 제안된 방법을 통하여 간단한 비 선형 시스템에 대한 모의 실험을 설명하고 있다. 사용된 각각의 파라메타들의 값들은 다음과 같다.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \sin(x_2) + u$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \bar{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

멤버십 함수의 종류 : 삼각형, 멤버십 함수의 크기: 2

이득 K : 4, 학습률 : 10, 상태 변수의 초기값 : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

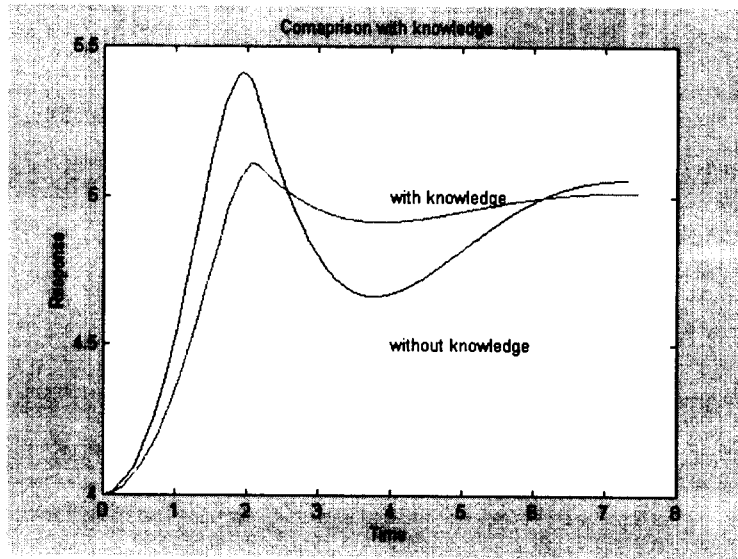
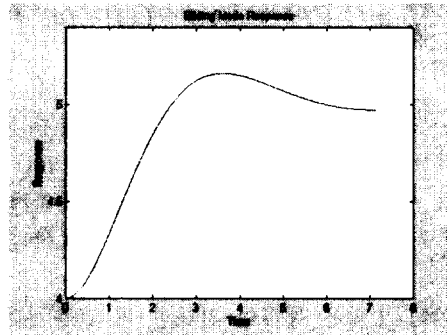


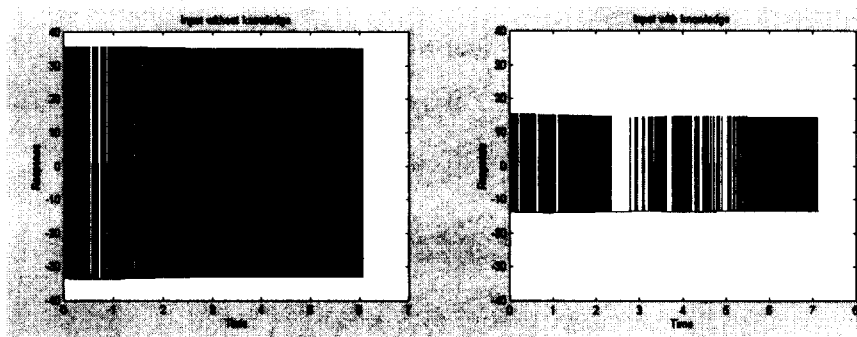
그림 1. 물의 정보 유무에 따른 응답 비교

그림 1에서 보여지는 결과는 퍼지 제어기의 관점에서 제안된 방법을 모의 실험한 결과이다. 물에 대한 사전 정보의 유무에 따라서 크게 두 가지로 나누어 수행하였다. 결과에서 알 수 있듯이, 물에 대한 사전 정보가 있었을 경우에 보다 더 응답 성능이 좋게

됨을 알 수 있다. 룰에 대한 사전 정보가 없는 경우에는 결론부의 멤버십 함수의 초기 중심값들을 모두 +1로 두었다.



(ㄱ) 응답 결과



(ㄴ) 룰의 정보가 없을 경우의 입력 (ㄷ) 룰의 정보가 있을 경우의 입력

그림 2. 슬라이딩 모드에서의 응답

다음으로 그림 2에서 보여지는 결과는 제안된 방법을 슬라이딩 모드 제어 측면에서 모의 실험을 수행한 결과이다. 이번 경우에도 룰의 사전 정보의 유무에 따라 두 가지로 나누어 수행하였다. 이전의 경우와는 달리, 두 가지 경우, 모두 응답 성능은 동일함을 알 수 있는데, 이것은 이득 K가 스위칭 조건을 만족하도록 주어졌기 때문이다. 하지만, 입력의 값들을 비교해보면 룰에 대한 사전 정보가 주어졌을 경우에 보다 더 적은 입력 값들을 사용하는 것이 가능함을 알 수 있다.

III. 결 론

본 논문에서는 퍼지 제어가 가지고 있는 단점들을 보완하기 위하여 기존에 연구 되어왔던 제어 방법들을 함께 사용하여 분석적인 측면에서 안정성을 보장하는 방법을 제시하였다. 또한 이전의 연구 방법들과는 달리 주어진 시스템의 상한값에 대한 정보가 아닌 상태 변수들의 민감도에 대한 정보를 이용하는 새로운 방법을 제시하였다. 제안된 제어 방법은 정확한 룰의 사전 정보의 유무에 상관없이 본래의 목적인 퍼지 제어

기의 안정성에 대한 분석적인 증명을 제시할 뿐만 아니라, 이득 K의 값을 재조정함에 따라서 슬라이딩 모드의 특성도 가질 수 있음을 알 수 있었다. 추후 연구 과제로서 알맞은 학습률과 스위칭 조건을 만족하기 시키기 위한 최적의 이득 K 등의 결정 문제들이 남아 있다.

참고 문헌

- [1] L.X.Wang, "Stable Adaptive Fuzzy Control of Nonlinear Systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.1, No.2, May 1993.
- [2] C.Y.Su and Y.Stepanenko, "Adaptive Control of a Class of Nonlinear Systems with Fuzzy Logic", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.2, No.4, Nov. 1994.
- [3] Y.S.Lu and J.S.Chen, " A Self-Organizing Fuzzy Sliding-Mode Controller Design for a Class of Nonlinear Servo Systems", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.41, No.5, Oct. 1994.
- [4] B.S.Chen, C.H.Lee, and Y.C.Chang, " H^∞ Tracking Design of Uncertain Nonlinear SISO Systems : Adaptive Fuzzy Approach", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.4, No.1, Feb. 1996.
- [5] L.X.Wang , *A Course In Fuzzy Systems and Control*, Prentice-Hall, 1997.
- [6] 변증남, *퍼지 논리 제어*, 홍릉 과학 출판사, 1997.
- [7] U.Itkis, *Control Systems of Variable Structure*, John Wiley & Sons, 1976.
- [8] K.S.Narendra and A.M.Annaswamy , *Stable Adaptive Systems*, Prentice-Hall, 1989.