

# 퍼지추론에 의한 비선형시스템의 제어

## Control of Nonlinear System by Fuzzy Inference

심영진\*\* 송호신\*\*\* 이오걸\*\* 이준탁\*

\*\*:동의공업전문대학 전기과, \*\*\*:부산정보대학 전기과, \*:동아대학교 전기,전자,컴퓨터공학부

Shim Y.J.\*\* , Lee O.K.\*\* , Song H.S.\*\*\* , Lee J.T.\*

**Abstracts** In this paper, a fuzzy controller for stabilization of the inverted pendulum system is proposed. The facility of this fuzzy controller which has a swing-up control mode and a stabilization one, moves a pendulum in an initial natural stable equilibrium point and a cart in arbitrary position, to an unstable equilibrium point and a center of rail. Specially, the virtual equilibrium point ( $\theta_{VEq}$ ) which describes functionally considers the interactive dynamics between a position of cart and a angle of inverted pendulum is introduced. And comparing with the convention optimal controller, the proposed hierarchical fuzzy inference structur made substantially the inverted pendulum system robust and stable.

**Keywords** Pendulum, Adaptive, Fuzzy, Stabilization

### I. 서론

대부분의 시스템은 비선형성을 가지며, 이 불확실한 비선형 시스템을 제어하기 위한 수학적인 모델링은 상당히 번거로우며, 모델링을 하는데 있어서도 많은 제약이 따른다.

특히, 동작 범위가 넓거나 시변 파라미터와 외란이 있는 비선형 시스템의 해석 및 제어 문제에서는 최적제어와 같은 고전적 제어기법으로는 한계가 있다. 비선형 시스템을 제어하기 위해 1965년 L. A. Zadeh에 의해서 제안된 퍼지 제어기법은 수학적 모델링이 곤란하거나, 비선형성이 강한 시스템에 많이 적용되고 있다. 퍼지제어기의 구성시 규칙과 전·후 건부의 파라미터는 전문가의 경험이나, 지식에 의존하여 주관적으로 결정되기 때문에, 안정한 제어 시스템의 설계가 곤란해진다.

따라서, 본 논문에서는 로켓트나 2족 보행 로봇

(biped robots)의 자세 제어의 기본이 되는 비선형 시스템의 하나인 도립 진자 (inverted pendulum) 시스템을 적용 퍼지 추론 기법에 의해서 안정화 제어를 하고자 한다. 즉, 평형점에 대한 위치 각도와 거리에 대한 위상면으로부터 최적한 적용 퍼지 규칙을 생성하는 데 목적을 두고 있다. 도립진자 시스템은 복잡한 비선형성으로 인해 정확한 수학적 모델링이 곤란하며 고전적인 제어기 설계법과 상태 공간 해석법에 근거한 현대제어이론으로는 제어기 설계가 쉽지않다. 따라서, 본 논문에서 제안하는 퍼지 안정화(stabilization)제어기는 진자와 운송차의 상호작용을 고려한 가상 평형점(virtual equilibrium point)을 하부 구조에서 추론하고, 상부 구조에서는 이를 고려하여 진자의 제어를 행하는 이중 추론 구조를 구성하여 이를 비선형성이 강한 도립진자 시스템에 적용 퍼지 추론기법을 적용하고, 시뮬레이션에 의해 적용 퍼지 제어기를 구현하여 일반 퍼지 제어기법과의

동특성 및 외란의 적응면을 비교하므로써 제안하는 적응퍼지 제어기법의 우수성과 그 유용성을 입증한다.

## II. 도립 진자 시스템의 수학적 모델링

도립진자 시스템은 그림 1에서와 같이 마찰을 고려하면 2계 미분방정식으로 표현될 수 있다.

### 대차

$$M\dot{z}(t) + \mu\dot{z}(t) = \alpha \cdot \mu(t) - H(t) \quad (1)$$

### 진자의 수평 방위

$$\begin{aligned} H(t) &= m \frac{d^2}{dt^2} (z(t) + L \sin(t)) \\ &= m \ddot{z}(t) + mL(\ddot{\phi}(t) \cos \phi(t) - \dot{\phi}^2(t) \sin \phi(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

### 수직 방위

$$\begin{aligned} V(t) - mg &= m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \phi(t)) \\ &= -mL(\ddot{\phi}(t) \sin \phi(t) + \dot{\phi}^2(t) \cos \phi(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

### 외진 방위

$$J_p \ddot{\phi}(t) = LV(t) \sin \phi(t) - LH(t) \cos \phi(t) - \eta \dot{\phi} \quad (4)$$

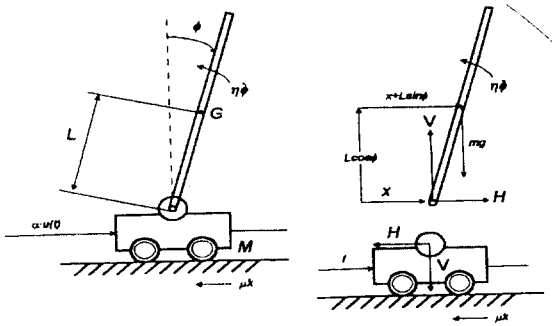


Fig. 1 Mathematical modeling of the inverted pendulum system

그림 1에서 수평반발력은 대차에서 크게 발생되며, 피봇에서는 미소하므로 위 식의  $H$ 를 무시할 수 있으므로 운송차에 관한 식(1)은

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{M} \mu - \frac{\mu}{M} x \quad (5)$$

으로 된다. 결과적으로 도립진자 시스템은 식(6)의  $x, \phi$ 의 각각에 대한 선형 2계 미분방정식으로 정리된다.

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{(J - p + mL^2)} \{ mgL\phi - mL\dot{x} - \eta\dot{\phi} \} \quad (6)$$

여기서,  $x_1 = \dot{x}, x_2 = x, x_3 = \dot{\phi}, x_4 = \phi$ 와 같이 상태변수를 선택하면 다음의 상태방정식으로 기술될 수 있다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7)$$

$$y = Cx \quad (8)$$

$$\text{단, } A = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu mL}{M(J_p + mL^2)} & 0 & -\frac{\eta}{J_p + mL^2} & \frac{mgL}{J_p + mL^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{M} \\ 0 \\ -\frac{\alpha mL}{M(J_p + mL^2)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

단, 운송차의 전동기 풀리에 감긴 와이어 벨트에 의해 X,Y상으로만 움직이며 각 변수들에 대한 정의와 그 파라미터 값은 표 1과 같다.

parameter	DESCRIPTION	VALUE	UNIT
$m$	Mass of the pendulum	0.112	kg
$L$	Length from the pivot to the mass center of pendulum	0.255	m
$V$	Vertical reactive force at the pivot	---	kg · m/s <sup>2</sup>
$H$	Horizontal reactive force at the pivot	---	kg · m/s <sup>2</sup>
$J_p$	Inertia moment of the pendulum	0.00292	kg · m <sup>2</sup>
$M$	Mass of the cart	0.886	kg
$z$	Horizontal position of the cart	-0.655	m
$\phi$	Angle of the pendulum from the vertical line	$\pi - \pi$	rad
$r$	Wire belt pulley radius	0.0235	m
$\alpha$	Driving force coefficient	0.738	kg · m/s <sup>2</sup> /V
$u$	Input voltage to push the cart	-10 ~ 10	V
$G$	Mass center of the pendulum	---	---
$g$	Gravitational acceleration constant	9.8	m/s <sup>2</sup>
$\mu$	Friction coefficient	2.215	kg/s
$\eta$	Coefficient related to rotation moment of the pendulum	0.00199	kg · m <sup>2</sup> /s

Table-1. Parameters of the invert pendulum system

### III. 독립진자 시스템의 퍼지 제어 기법

퍼지 제어시스템은 퍼지집합 이론에 기반을 둔 제어의 특수한 형태로서 비선형 시스템에 적용이 용이하고, 종래의 PID제어기나 정확한 모델에 근거하여 설계된 어떠한 종류의 제어기보다도 자유도가 많으며, 적절히 설계하면 외란에 대하여 강인한 제어특성을 갖는 병렬형, 논리형 제어기로서 언어적 제어의 특징을 가지고 있다.

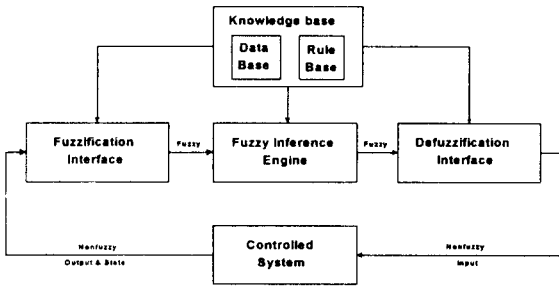


Fig. 2 Basic structure of a fuzzy logic Controller system

퍼지추론이란, 몇 가지의 퍼지 명제들로부터 어는 한 명제를 도출해 내는 것으로 본 논문에서는 직접법에 의해 비퍼지한 대표점  $y_0$ 를 그림 3의 무게 중심법을 이용하였다.

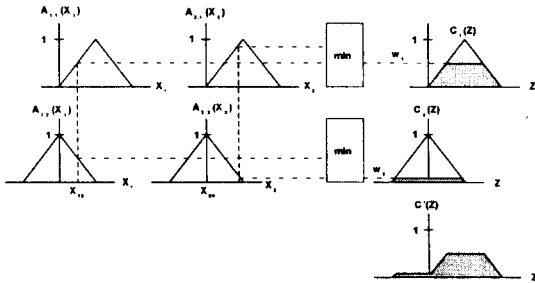


Fig. 3 Inference process of fuzzy inference method

### IV. 독립진자 시스템의 적응 퍼지제어기의 설계

#### 4.1 적응 퍼지 제어기

적응 퍼지추론기의 구조는 그림 4와 같으며, 다층

Feed-Forward 회로망으로 구성되어지며, 학습 데이터에 적용하는 구조와 학습 절차를 갖는다. 즉, 적응 회로망은 Node 와 Node를 연결하는 Link로 되어 있는 데, 각 Node의 출력은 Node가 갖고 있는 파라미터가 학습 데이터와의 오차크기를 최소화하기 위하여 구배법과 연쇄규칙에 따라 학습되어진다. 특히, 학습의 수렴 속도와 Local Minimum에 도달되는 것을 방지하기 위해 다음의 복합 학습 규칙을 사용한다.

#### 1) 기본 학습 규칙

그림 4에서 □ Node는 적응 파라미터를 가지며, ○ Node는 고정된 파라미터를 갖는다.

적응회로망이 L층일 경우, k번째층의 i번째 위치에 있는 노드의 출력  $O_i^k$ 는

$$O_i^k = O_i^k(O_i^{k-1}, \dots, O_i^{k-1}, a, b, c, \dots) \quad (10)$$

로 된다. 단,  $a, b, c, \dots$ 는 Node의 파라미터들이며, P쌍의 입·출력 학습 데이터중 j번째 요소의 학습에 대한 오차의 척도는

$$E_p = \sum_{m=1}^{*(L)} (T_{m,p} - O_{m,p}^L)^2 \quad (11)$$

로 된다. 단, \*(L)는 L층의 Node 수를 나타낸다.

따라서, L층 i번째 Node에서의 오차변화율  $\frac{\partial E_p}{\partial O_{i,p}^L}$ 은 구배법에 의해

$$\frac{\partial E_p}{\partial O_{i,p}^L} = -2(T_{i,p} - O_{i,p}^L) \quad (12)$$

로 되며, Chain Rule에 의해, k번째 i번째 Node의 오차 변화율은

$$\frac{\partial E_p}{\partial O_{i,p}^k} = \sum_{s=1}^{*(k+1)} \frac{\partial E_p}{\partial O_{m,p}^{k+1}} \cdot \frac{\partial O_{m,p}^{k+1}}{\partial O_{i,p}^k} \quad (13)$$

a를 임의의 적응 회로망의 파라미터라 하면,

$$\frac{\partial E_p}{\partial a} = \sum_{s=1}^{*(k+1)} \frac{\partial E_p}{\partial O^*} \cdot \frac{\partial O^*}{\partial a} \quad (14)$$

로 되며, a에 대한 전체 오차의 변화율은

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{p=1}^k \frac{\partial E_p}{\partial a} \quad (15)$$

로 되며, a의 조정 값은

$$\Delta a = -\eta \frac{\partial E}{\partial a} \quad (16)$$

여기서,  $\eta$ 는 학습시의 구배 천이를 나타내는 스텝 크기  $k_i$ 에 대한

$$\eta = \frac{k_s}{\sqrt{\sum_a \frac{\partial E}{\partial a}^2}} \quad (17)$$

의 값으로 조정된다.  $k_s$ 는 파라미터 공간 내에 있는 구배 변화의 길이이며, 수렴속도를 변화시키기 위한 것이다.

따라서, 본 논문에서 제안하는 적응 퍼지추론 시스템의 구조는 그림 4와 같다.

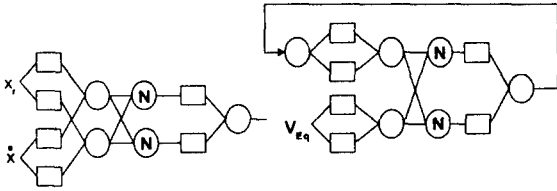


Fig.4 Structure of Adaptive fuzzy inference system

설계된 도립진자 시스템의 진자가 강제이고 구동력은 옴프에 인가되는 입력 전압에 비례하여 지연없이 운송차로 전달된다고 가정한다. 출력요소는 운송차의 위치  $x[m]$ 와 진자의 각도  $\phi[rad]$  이다.

퍼지제어기의 구성도는 그림 5와 같으며, 먼저 계속된 진자의 각도  $\phi[rad]$ 과 운송차의 위치  $x[m]$ 의 크리스프한 정보를 받아들여 퍼지화부에서 퍼지값으로 변환된다.

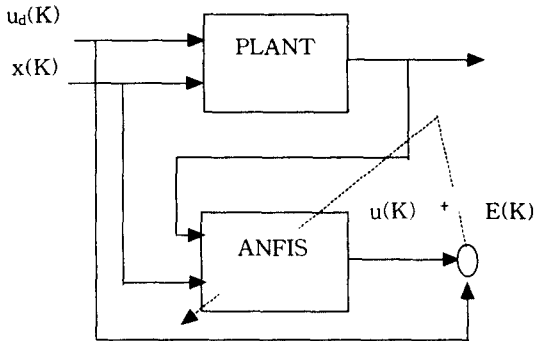


Fig.5 The Design block diagram of ANFIS Identifier for an Inverted Pendulum.

## 4.2 안정화 제어기의 설계

진자의 상태에 따라 안정한 제어기를 설계하기 위해 적응 퍼지 제어규칙을 제시한다. 진자를 바로 세우는 방법은 간단히 “진자가 오른쪽(positive)로 넘어지면 제어 입력  $u$  를 양(positive)으로 하여 운송차를 오른쪽으로 움직여라.”와 같이 쓸 수 있다.

If  $\phi$  is Positive then  $u$  is Positive (18)

로 된다. 여기서 진자가 넘어지는 속도  $\dot{\phi}$  까지 고려하면  $\phi$ 가 Positive일 때 다시 세가지의 경우가 생긴다. 표 2는 각도  $\phi$  및 각도의 변화량  $\dot{\phi}$ 에 대한 전체 25개의 퍼지 제어 규칙을 나타낸다.

Table-2. Fuzzy control rules for the inverted pendulum

$\dot{\phi} \backslash \phi$	NB	NM	ZO	PM	PB
NB	NG	NB	NM	NS	ZO
NM	NB	NM	NS	ZO	PS
ZO	NM	NS	ZO	PS	PM
PM	NS	ZO	PS	PM	PB
PB	ZO	PS	PM	PB	PG

그림 6은 입력변수 즉, 진자의 각도  $\phi$  및 각도의 변화량  $\dot{\phi}$ 와 출력변수인 제어입력  $u$ 에 대한 소속함수를 각각 나타내고 있다. 출력변수는 싱글톤으로 구성하였다.

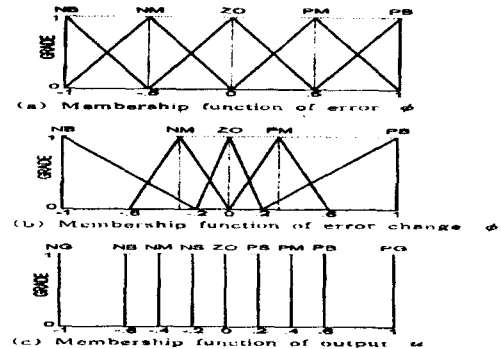


Fig. 6 Membership function for the inverted pendulum

그림 7은 운송차의 위치  $x$  및 위치 변화량  $\dot{x}$ 의 소속 함수와 가상 평형점  $\phi_{VEq}$ 의 소속 함수이다. 전건부는 삼각형, 후건부는 싱글톤 형태로 구성하였다.

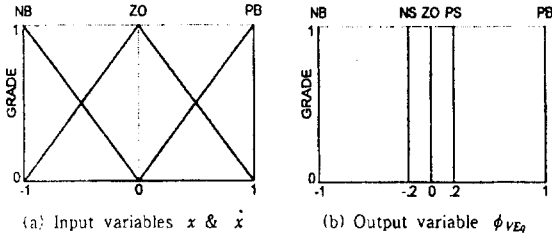


Fig. 7 Membership function for  $\phi_{VEq}$

표 3은 가상 평형점  $\phi_{VEq}$ 에 대한 퍼지 제어 규칙표이다.

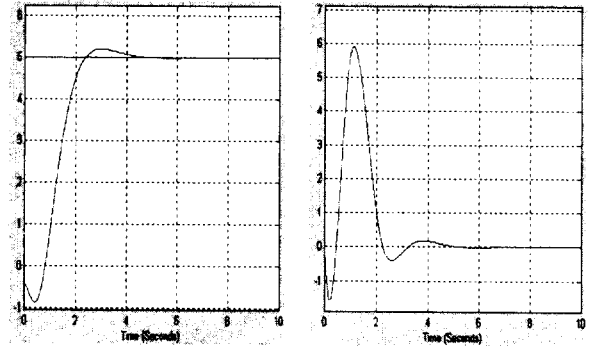
Table-3. Fuzzy control for the virtual equilibrium point  $\phi_{VEq}$

$x$	NB	ZO	PB
NB	NS	NB	ZO
ZO	NS	ZO	PS
PB	ZO	PB	PS

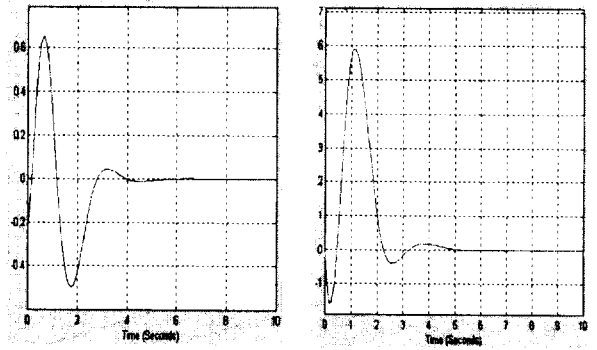
단,  
 NB: Negative Big    NS: Negative Small    ZO: Approximately Zero  
 PS: Positive Small    PB: Positive Big  
 이다.

### V. 시뮬레이션 및 결과 고찰

1) 운송차의 초기 위치는  $-0.4[m]$ , 진자의 초기 각도  $-0.2[rad]$  일 때 일반 퍼지 제어인 경우의 시뮬레이션의 결과이며 각각 운송차의 위치, 진자의 각도, 제어 신호, 가상 평형점을 나타낸다.



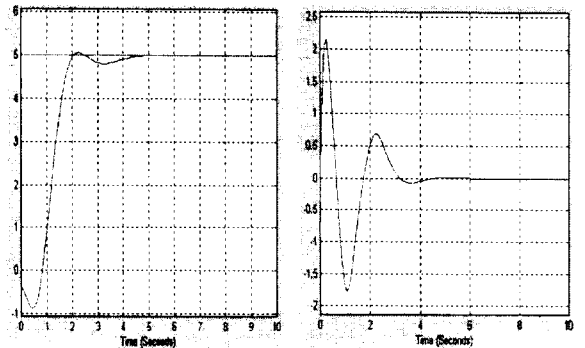
(a)진자의 각도  $\phi[rad]$  (b)진자의 각속도  $\dot{\phi}[rad]$



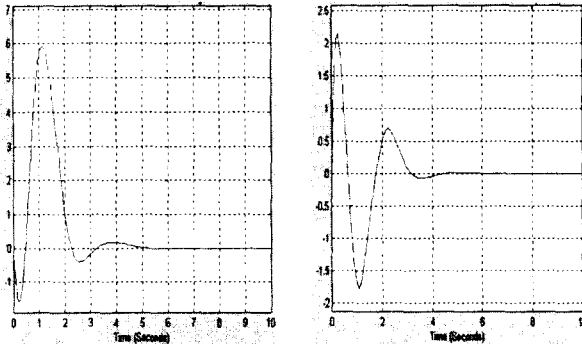
(c)진자의 위치  $x[m]$  (d)진자의 위치변화율  $\dot{x}[m/s]$

Fig. 8 General Fuzzy Control Results

2) 위와 동일한 조건하의 적응 퍼지제어의 경우를 나타낸다.



(a)진자의 각도  $\phi[rad]$  (b)진자의 각속도  $\dot{\phi}[rad]$



(c)진자의 위치  $x[m]$  (d)진자의 위치변화율  $\dot{x}[m/s]$   
 Fig.9 Adaptive Fuzzy Control Results

## VI. 결론

본 논문에서 제시한 적응 퍼지 제어인 경우 일반 퍼지 제어에 비해서 운송차의 위치가 오버 슈트없이 안정적으로 목표 위치에 수렴함을 보였다.

1) 운송차의 초기위치  $-0.4[m]$ , 진자의 초기각도  $-0.2[rad]$ 으로 운전한 결과 일반퍼지제어의 경우 운송차의 최대오버슈트는  $0.60[m]$ 인데 비해 적응 퍼지제어를 한 경우  $0.25[m]$ 로 약  $0.35[m]$  적게 나타났으며, 진자의 진동 각도도 적응퍼지 제어의 경우  $0.6[rad/sec]$ 의 진동으로 일반퍼지제어의 경우보다  $1.7[rad/sec]$  적게 진동하는 안정한 제어가 임을 알 수 있었다.

2) 시뮬레이션의 경우 레일의 마찰이나 진동, 구동력의 지연등은 고려하지 않았으며, 평가함수로 사용된 비중행렬은 시행착오적으로 미리 선정하였기 때문에 더 좋은 성능을 얻을 수 있었다.

3) 적응퍼지제어기의 경우 외부 외란등 비선형성이 강한 복잡함 플랜트에 대해 수학적 모델링이 필요하지 않기 때문에 제어기를 간단하게 구성할 수 있다.

## 참고 문헌

- [1] 川谷賣治, “現代制御理論を使った倒立振子の實驗 トランシスタ技術, pp.315-322, May, 1993.
- [2] 外川一仁, 川谷賣治, “現代制御理論を使った倒立振子の實驗[2]”, 트랜시스타技術, pp.367-374, June, 1993.
- [3] Shigeyasu Kawaji, Teruyuki Maede, “Fuzzy servo Control System for an Inverted Pendulum”, Fuzzy Engineering toward Human Friendly Systems, Vol2, pp.812-823, 1991.
- [4] Kazushi Nakano, Miyoichi Eguchi, Yoshihiro Yamaguchi, “Fuzzy Reasoning Control of Inverted Pendulum with Considering of Interaction with Cart”, T.IEE Japan, Vol.115-C, No.1, 1995.
- [5] 최우진, 박정훈, 이오걸, 이준탁, “퍼지 추론 기법을 이용한 도립 진자 시스템의 안정화 제어에 관한 연구”, 1995 한국 퍼지 및 지능시스템 학회 부산·경남지회 동계학술 발표대회 논문집, pp.29-34, 1995.