

GA기반 최적 PD제어기에 의한 도립진자의 제어

Inverted Pendulum Control using the PD controller optimized with the GA

송영준*, 공성곤
송실대학교 전기공학과
Young-Jun Song* and Seong-Gon Kong
Department of Electrical Engineering
Soongsil University

요 약

본 논문에서는 플랜트를 제어하는데 있어 광범위하게 사용되는 PD제어기의 파라미터를 결정하는 문제에 대한 연구를 하였다. 파라미터 결정 방법으로는 최근 최적화 문제에 많이 적용되고 있는 새로운 방법인 유전자 알고리즘을 사용하였다. 또한 이렇게 정해진 파라미터를 사용하여 이를 도립진자(Inverted Pendulum)에 적용하였고 도립진자의 응답특성을 분석, 고찰함으로써 PD제어기의 성능을 평가·확인하고 이 문제에 적용된 유전자 알고리즘의 우수성을 입증하였다.

1. 서 론

PD제어기는 응답특성이 빠르고, 과도응답특성의 개선효과가 있으므로, 산업체에서 많이 사용되는 제어기들 중 하나이다. 하지만 이러한 우수한 성능을 가진 제어기가 최적의 성능을 나타내기 위해서는 그 파라미터값이 최적의 조건을 만족해야 한다. 지금까지는 제어기의 성능을 최적화시키는 방법으로, 어느정도 범위내의 파라미터값을 설정한 후 시행착오를 통해 그 파라미터값을 튜닝하는 방법으로 제어기의 파라미터값을 정하였다. 하지만 이런 방법은 많은 시간과 노력이 필요하므로 효율적인 방법이라 할 수 없다.

본 논문에서는 파라미터 설정방법에 있어 보다 효율적인 방법을 이용하고자 최근 최적화 문제에 많이 응용되고 있는 유전자 알고리즘을

사용하였다. 유전자알고리즘은 여러특성을 갖는 함수를 최적화 시키거나 시스템의 특성이 비선형적이고 해석하기 복잡할 때 시스템의 성능 및 구조를 최적화 시키는 문제에 있어 유용한 알고리즘이다. 유전자 알고리즘은 응용범위가 매우 넓으며 특히, 적응적 탐색과 학습 및 최적화를 통한 공학적인 문제의 해결에 많이 이용되고 있다.

도립진자를 제어함에 있어 유전자 알고리즘을 이용하여 PD제어기의 파라미터를 설정하였고, 제어 플랜트인 도립진자에 이 파라미터를 적용하여, 도립진자의 응답특성을 분석, 고찰함으로써 제어기의 성능을 평가 하였다.

유전자 알고리즘을 기반으로 한 PD제어기에 의한 도립진자 제어를 나타내는 전체 블록다이아그램은 그림1과 같다.

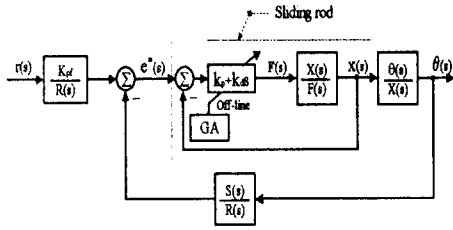


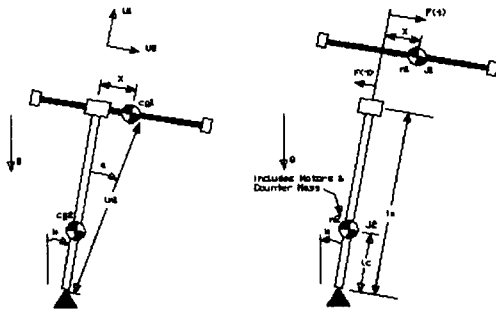
그림 1. 전체 블록 다이어그램

그림 1에서 점선으로 둘러싸인 부분은 도립진자의 Sliding rod 제어를 나타내고, K_p, K_d 는 프리필터의 이득, K_p, K_d 는 제어기 파라미터, $r(s)$ 는 기준입력, $F(s)$ 는 제어기 출력, $X(s)$ 는 Sliding rod 출력, $\theta(s)$ 는 Pendulum rod 출력이다.

2. 도립진자의 모델링

2.1 비선형 표현

그림 2는 실험에 사용된 도립진자를 나타낸 것이며, 이 플랜트를 대상으로 모델링 하였다.



a) 전체 플랜트 b) 분리된 플랜트

그림 2. 플랜트 모델링

먼저 플랜트를 모델링 함에 있어, 비선형 식을 얻기 위해 플랜트의 운동에너지와 위치에너지를 구했다. 플랜트의 운동에너지 T 는 식(1)과 같다.

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_{c1}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

여기서 v_{c1} 과 v_{c2} 는 각각의 무게 중심점 cg_1 과 cg_2 에서의 속도이고, 그림 2에서 m_1, m_2 그리고 J_1, J_2 는 각각 Sliding rod와 Pendulum rod의 질량이고 관성 모멘트이다. 식(1)을 전개하면 식(2)와 같은 형태가 된다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (J_1 + J_2 + m_1(l_o^2 + x^2) + m_2 l_c^2) \dot{\theta}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + m_1 l_o \dot{x} \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} J_o(x) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + m_1 l_o \dot{x} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $J_o(x) = J_1 + J_2 + m_1(l_o^2 + x^2) + m_2 l_c^2$ 이고, 이것은 0점에서의 전체 플랜트의 관성 모멘트이다. 다음으로 식(3)은 플랜트가 $\theta = 90^\circ$, $x = 0$ 일 때의 위치에너지를 나타낸 식이다.

$$\begin{aligned} V_p &= m_1 g l_{m1} \cos(\theta + \alpha) + m_2 g l_c \cos \theta \\ &= m_1 g (l_o \cos \theta - x \sin \theta) + m_2 g l_c \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

플랜트의 비선형 식을 유도함에 있어 위의 식(2)와 식(3)을 라그랑주 방정식에 대입하여 구하면 식(4), 식(5)와 같다.

$$m_1 \dot{x}'' + m_1 l_o \dot{\theta}'' - m_1 x \dot{\theta}^2 - m_1 g \sin \theta = F(t) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} m_1 l_o \dot{x}'' + J_o \dot{\theta}'' + 2m_1 x \dot{x} \dot{\theta} - (m_1 l_o \\ + m_2 l_c) g \cdot \sin \theta - m_1 g x \cdot \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 선형화

선형화는 테일러 급수를 이용하여 한다. 이때 테일러 급수 전개는 평형점 $x = x_e$, $\theta = \theta_e$ 즉, $x = 0$, $\theta = 0$ 에서 구한다. 식(4)와 식(5)로부터 테일러 급수를 근사화 하면 다음과 같은 두 개의 식을 얻었다.

$$m_1 \dot{x}'' + m_1 l_o \dot{\theta}'' - m_1 g \theta = F(t) \quad (6)$$

$$m_1 l_o \dot{x}'' + J_{oe} \dot{\theta}'' - (m_1 l_o + m_2 l_c) g \theta - m_1 g x = 0 \quad (7)$$

여기서 J_{oe} 는 평형점에서의 관성이고 $F(t)$ 는 외력이다. 다음으로 식(1)부터 식(7)까지 정리하면 다음과 같은 식들을 얻는다.

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{m_1 l_o}{J_{oe}} \frac{-s^2 + g/l_o}{s^2 - (m_1 l_o + m_2 l_c)g/J_{oe}} \quad (8)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{J_{oe}}{m_1 J^*} \frac{s^2 - (m_1 l_o + m_2 l_c)g/J_{oe}}{s^4 + ((m_1 l_o - m_2 l_c)g/J^*)s^2 - m_1 g^2/J^*} \quad (9)$$

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{l_o}{J^*} \frac{-s^2 + g/l_o}{s^4 + ((m_1 l_o - m_2 l_c)g/J^*)s^2 - m_1 g^2/J^*} \quad (10)$$

$$l_o = 0.330(m), l_c = -0.0464(m), J_{oe} = 0.067(kg \cdot m^2)$$

$$m_1 = 0.213(kg), m_2 = 1.785(kg), J^* = 0.0438(kg \cdot m^2)$$

$$g = 9.801(m/sec^2)$$

3. Sliding rod 제어

도립진자의 Sliding rod 제어 블록다이아그램은 그림 1 에서의 점선으로 둘러싸인 부분이고, 그림 1에서의 $X(s)/F(s)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_{hw}}{m^* s^2} \quad (11)$$

식(11)은 식(9)를 근사화 시킨 것이며, m^* 는 평형점에서 전체 플랜트의 무게 중심, k_{hw} 는 Sliding rod의 이득(=2088.32), $F(s)$ 는 제어기 출력, $X(s)$ 는 Sliding rod의 출력이다. 여기서 Sliding rod 전달함수를 $G(s)$ 라 놓으면 $G(s)$ 는 식(12)와 같다.

$$G(s) = \frac{X(s)}{e^*(s)} = \frac{(K_{hw}/m^*)(K_d s + K_p)}{s^2 + (K_{hw}/m^*)(K_d s + K_p)} \quad (12)$$

$e^*(s)$ 는 프리필터를 통과한 기준입력이다.

도립진자의 Sliding rod와 같은 2차 시스템은 식(13)과 같은 표준상태 방정식으로 표현가능하다.

$$G(s) = \frac{2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (13)$$

따라서, 식(12)와 식(13)을 비교하면, 표준상태 방정식의 비제동 고유주파수 ω_n 과 제동률 ζ 를 K_p 와 K_d 로 나타낼 수 있으며, 그 관계식은 다음과 같다.

$$\zeta \triangleq \frac{K_{hw} \cdot K_d}{2\sqrt{m^* K_{hw} \cdot K_p}} \quad (14)$$

$$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{K_{hw} \cdot K_p}{m^*}} \quad (15)$$

식(13)에 단위 계단 함수를 인가 했을 때 이 식을 부분분수로 전개하여 역라플라스변환하면 식(16)이 된다.

$$g(t) = 1 + \left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) - \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \right] \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \quad (16)$$

다음으로 오버슈트가 일어나는 시간을 알기 위해 $g(t)$ 를 미분하고, $\zeta = \cos \alpha$, $\sqrt{1-\zeta^2} = \sin \alpha$ 라 놓으면 식(16)은 식(17)과 같이 된다.

$$g'(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot [\sin(2\alpha - \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t)] \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \quad (17)$$

식(17)을 통해 $g(t)$ 의 오버슈트가 발생하는 시간 t_p 를 구하면 식(18)과 같이 된다.

$$t_p = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \quad (18)$$

따라서, 식(18)을 식(16)에 대입하여 정리하면 최종적으로 $g(t_p)$ 는 식(19)가 된다.

$$g(t_p) = 1 + \exp\left[-\frac{2\zeta \cdot \cos^{-1}(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] = 1 + F(K_p, K_d) \quad (19)$$

4. 적합도 함수 설정방법

유전자 알고리즘에서 가장 중요한 것이 인코딩방법과 적합도 함수 설정방법인데, 본 논문에서는 인코딩 부분은 제어기 계수인 K_p 와 K_d 를 이진수로 코딩 하였으며, 적합도 함수 설정 방법에서는 제어 성능지표 중의 하나인 오버슈트를 적합도 함수로 설정하였다.

제어기 계수 K_p 와 K_d 로 나타내지는 오버슈트 함수 $F(K_p, K_d)$ 는 식(19)에 식(14)를 대입해 정리하여 얻었다. 그 결과는 식(20)과 같이 되며, 오버슈트함수 $F(K_p, K_d)$ 의 형태는 그림 3과 같다.

$$F(K_p, K_d) = \exp\left[-\frac{\left(\sqrt{\frac{K_{hw}}{m^* K_p}} K_d\right) \left(\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{K_{hw}}{4m^* K_p}} K_d\right)\right)}{\sqrt{1 - \frac{K_{hw} K_d^2}{4m^* K_p}}}\right] \dots (20)$$

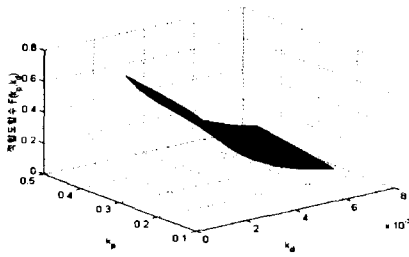


그림 3. K_p, K_d 에 따른 적합도함수

다음으로 Sliding rod에 단위계단입력을 가했을 때 K_p, K_d 변화에 따른 Sliding rod 출력 $g(t)$ 를 보면 그림 4와 같다.

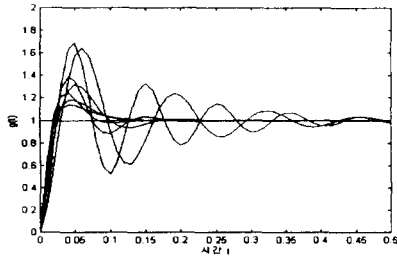


그림 4. K_p, K_d 변화에 따른 함수 $g(t)$

본 논문에서는 유전자 알고리즘을 사용하여 그림 4의 오버슈트들 중 가장 작은 오버슈트를 일으키는 k_p, k_d 를 찾아 그 값을 PD제어기의 파라미터로 설정한 후, 그 제어기로 도립진자의 sliding rod를 제어하였다.

유전자 알고리즘에서 사용한 파라미터값들은 표 1과 같다.

표 1. 실험에 사용된 GA 파라미터

Population Size	Crossover Probability	Mutation Probability	Gene Length	Max Generation
50	0.25	0.1	27(bit)	1000

5. 도립진자의 제어

4절에서는 유전자 알고리즘을 통해 구한 PD제

어기의 파라미터값을 이용하여 Sliding rod를 제어하였고, 본 절에서는 이를 통해 Pendulum rod를 제어하였다. 먼저 도립진자의 각을 제어하기 위해 식(8)을 식(21)과 같이 정의한다.

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{k_d m_1 l_o}{k_x J_{oe}} \frac{-s^2 + g/l_o}{s^2 - (m_1 l_o + m_2 l_c)g/J_{oe}} \triangleq k^* \frac{N_{ax}(s)}{D_{ax}(s)} \quad (21)$$

여기서 k^*, N_{ax}, D_{ax} 는 다음과 같다.

$$k^* = 0.0532$$

$$N_{ax} = -s^2 + 29.7182$$

$$D_{ax} = s^2 + 1.8346$$

이 때 Sliding rod 전달함수 $G(s)$ 가 제어 대역폭에서는 거의 1 이므로 전체 페루프 전달함수의 분모 $D_c(s)$ 는 식(22)와 같이 표현 된다.

$$D_c(s) = D_{ax}(s)R(s) + k^*N_{ax}(s)S(s) \quad (22)$$

또한 식(22)는 식(23)과 같이 표현가능하다.

$$D_c(s) = (d_2 s^2 + d_1 s + d_0)(r_1 s + r_0) + (n_2 s^2 + n_1 s + n_0)(s_1 s + s_0) \quad (23)$$

여기서 우리가 원하는 분모값을 식(24)와 같이 놓자.

$$D_c(s) = (s + \pi + j\pi)(s + \pi - j\pi)(s + 3\pi) \quad (24)$$

그러면, 페루프 시스템의 극들은 $-\pi \pm j\pi$ 와 -3π 가 된다.

식(23)과 식(24)를 비교하면 다음과 같은 값들을 얻을 수 있다.

$$s_1 = 45.9443, \quad s_0 = 93.6612$$

$$r_1 = 3.4442, \quad r_0 = 20.6908$$

또한 그림 1의 블록다이어그램을 보면 프리필터이득 K_M 가 있는데 이것을 구하기 위해서 전체 전달함수를 구하여 정상상태 즉, $\frac{\theta(s)}{\tau(s)} = 1$ 일때를 고려하면 식(25)를 얻는다.

$$K_M = \frac{D_{ax}(s)R(s) + k^*N_{ax}(s)S(s)}{k^*N_{ax}(s)} \quad (25)$$

다음으로 위에서 구한 값들을 이용하고,

$s=0$ 을 대입하여 식(25)를 정리하면, $k_{pf} = 117.6708$ 이 된다.

결국, 위에서 구한 $K_p, K_d, r_0, r_1, s_0, s_1, K_{pf}$ 의 값들을 이용하여 Pendulum rod를 제어하였다.

6. 실험 및 결과

본 논문에서는 그림 4와 같이 PD제어기 계수인 K_p, K_d 에 따라 변하는 오버슈트 함수 $F(K_p, K_d)$ 에서 그림 6과 같은 오버슈트 함수들 중 오버슈트가 가장 적게 일어나는 함수를 가장 높은 적합도를 갖게하여 그 때의 K_p, K_d 의 값을 제어기의 파라미터로 선정하였다. 그림 5는 유전자 알고리즘에 의해 구해진 최소 $F(K_p, K_d)$ 이고, 결국 이 파라미터 값을 이용하여 도립진자의 Sliding rod를 제어하였으며, 이를 통해 최종적으로 Pendulum rod를 제어하였다. 그림 7은 단위 계단 함수를 인가했을 때 도립진자의 Pendulum rod 출력을 나타낸 것이다.

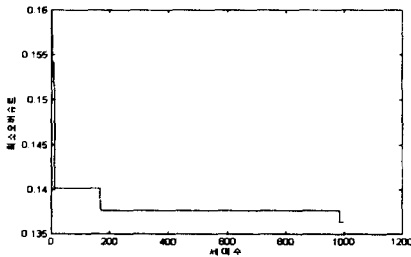


그림 5. GA로 찾은 최소 오버슈트 $F(K_p, K_d)$

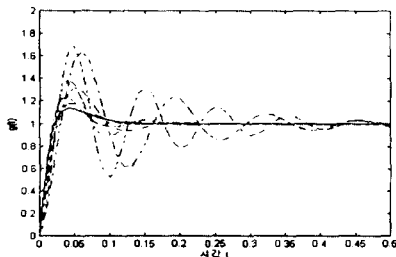


그림 6. GA로 찾은 K_p, K_d 일때의 $g(t)$

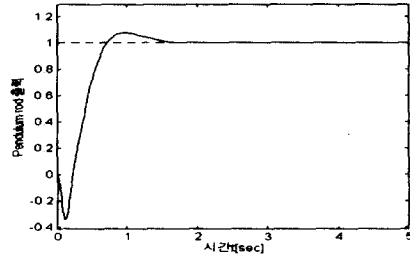


그림 7. GA로 찾은 K_p, K_d 일때의

Pendulum rod 출력 $\theta(t)$

7. 결 론

본 논문에서 유전자 알고리즘을 이용하여 10세대 이내에 Sliding rod의 최소 오버슈트를 나타내는 제어기계수 K_p, K_d 를 찾아내었고, 그 때의 계수값을 이용하여 Off-line으로 도립진자를 제어하여 그 성능이 좋음을 알 수 있었으며, 이를 통해 시스템 최적화 문제에 있어 GA의 우수함을 알 수 있었다. 앞으로의 연구계획은 유전자 알고리즘의 적합도 함수 설정에 있어 Rising-time과 Settling-time같은 성능지표를 더 고려하고, 또한 제어를 함에 있어 On-line 적응제어를 위한 연구가 필요하다고 생각된다.

참고문헌

- [1] S. M. Shinnars, *Modern Control System Theory and Design*, John-Wiley & Sons, 1992.
- [2] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison Wesley, 1989.
- [3] J. J. Grefenstette, "Optimization of Control Parameters for Genetic Algorithms," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, Vol. SMC-16, No. 1, 122-128, Jan./Feb. 1986.
- [4] K. Krishnakumar, D. E. Goldberg, "Control System Optimization using Genetic Algorithms," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.15, No. 3, May-June, 1992.
- [5] 김찬목, 박철희, *동역학*, 문운당, 1993.